

Die mathematischen Grenzen der künstlichen Intelligenz

Holger Stephan

Weierstraß Institut für Angewandte
Analysis und Stochastik (WIAS), Berlin

Lange Nacht der Wissenschaften
17. Juni 2023

Künstliche Intelligenz (KI oder AI) überall

Liste von frei zugänglichen Tools. Zusammengefaßt auf

<https://www.hcilab.org/ai-tools-directory/>

- ▶ Text Generation (z.B. ChatGPT)
- ▶ Translation and Transcription
- ▶ Image Generation and Manipulation
- ▶ Design, Marketing, Content Creation, SEO
- ▶ Audio and Music Processing, Transcription
- ▶ Programming and Code Generation
- ▶ Learning and Teaching
- ▶ Mathematics
- ▶ Productivity applications
- ▶ Tools to build AI applications

Technik nimmt dem Menschen die Arbeit weg/ab

- ▶ Seilspanner im alten Ägypten, Uhrmacher, Buchdrucker, ...
- ▶ Wissenschaftliche Rechner (70-er Jahre)
- ▶ Informatiker: Webseiten programmieren
(Früher konnte man viel Geld damit verdienen.)
- ▶ Schachspiel. Elon Musk:
„Kasparov spielt fast so gut Schach wie mein iPhone“

Was sollten unsere Kinder und Enkel lernen?

Ist Technik gut oder böse?

Der Sinn der Technik ist es, uns die Arbeit wegzunehmen!

Sollten wir Angst vor KI haben?

Eigentlich nicht, es wird uns aber Angst gemacht!

Plötzlich wird vor KI gewarnt – und von wem!



Elon Musk

„KI hat das Potenzial zur Zerstörung der Zivilisation“



Steve Wozniak



Geoffrey Hinton. Erfinder des Backpropagation-Algorithmus (1986)
Hat seinen Job bei Google gekündigt, um „sich über die Gefahren der KI zu äußern“.

Was wird nicht (oder wenig) kritisiert?

- ▶ Nanotechnologie
- ▶ Überwachung, Datensammelwut, Social credit
- ▶ mRNA-Therapien
- ▶ 5G-Netze
- ▶ Atomenergie (wird in Deutschland kritisiert)

Worin unterscheiden sich diese Technologien und KI?

KI kann jeder benutzen! Es gibt Baukästen, z.B. TensorFlow

... deshalb muß KI reguliert werden.

Wie funktioniert künstlichen Intelligenz?

- ▶ Typisches Blackboxproblem:



z.B.: Input = Bild, Output = Hund oder Katze

- ▶ Klassische Blackboxaufgaben: Die Box ist gegeben aber unbekannt. Frage: Wie arbeitet die Box?
- ▶ KI-Blackbox: Der Computer baut die Box selbst. Mich interessiert nicht, wie die Box arbeitet, ich vertraue ihr. \Rightarrow Fehler kommen vor (hoffentlich wenige).
- ▶ Lösungsmethode: Finde das Minimum eines hochdimensionalen Funktionals (ist seit Gauß gut bekannt).

Gibt es (theoretische) Grenzen für einen Computer?

- ▶ Wie arbeitet ein Computer? Schritt für Schritt.
- ▶ Endlich, aber potentiell abzählbar.
- ▶ Im Prinzip könnte er alle Varianten durchprobieren.
Der Mensch denkt sich einen Algorithmus aus,
der dieses “Probieren” schneller macht.
- ▶ Kann man alles – wenigstens theoretisch – berechnen?

Gleichheit reeller Zahlen?

Man löst eine Gleichung und macht die Probe.
Stimmt das Ergebnis (reelle Zahl)? LS=RS?

Beispiel 1: LS: $x = \sqrt{2} - 1$, RS: $y = \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

Frage: $x = y$?

Lösungsalgorithmus: Dezimalstellen berechnen.

$$x = 0,41421\dots$$

$$y = 0,41421\dots$$

Beweis (kreativ, ohne Algorithmus):

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{1 \cdot (\sqrt{2} - 1)}{(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}^2 - 1^2} = \\ &= \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1 = x \end{aligned}$$

(Inzwischen kann ein Computer solche Beweise führen.)

Gleichheit reeller Zahlen. Beispiel 2

$$x = \tan 7.5^\circ$$

$$y = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2$$

Frage: $x = y$?

$$x = 0.131652497\dots$$

$$y = 0.131652497\dots$$

(Beweis mit Additionstheoremen)

- ▶ Bei Ungleichheit: Früher oder später gibt es verschiedene Ziffern.
- ▶ Bei Gleichheit: Keine verschiedenen Ziffern!

⇒ **Ungleichheit feststellbar, Gleichheit (im allgemeinen) nicht.**

- ▶ Auch dieses Problem können inzwischen gute Computeralgebraprogramme lösen.

Beispiel 3: Srinivasa Ramanujan (1887–1920)

$$\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1 + \frac{e^{-2\pi/5}}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \frac{e^{-8\pi}}{1 + \ddots}}}}}$$



Wie kann man sich
so etwas ausdenken?

Diskussion mit ChatGPT I

Frage: *Kann der Computer immer entscheiden, ob zwei gegebene reelle Zahlen, z. B. $(\sqrt{2} - 1)$ und $1/(\sqrt{2} + 1)$, gleich sind?*

Ja, der Computer kann entscheiden, ob zwei gegebene reelle Zahlen gleich sind. Dazu verwendet er mathematische Operationen und vergleicht Zahlen mit einer bestimmten Genauigkeit. **In diesem speziellen Beispiel ist es möglich, beide Zahlen zu berechnen und sie mit einer gewissen Genauigkeit zu vergleichen**, z. B. bis auf 10 Dezimalstellen. Wenn sie gleich sind, gibt der Computer das Ergebnis True aus, wenn nicht - False.

⇒ Problem nicht verstanden! Was bedeutet Gleichheit?

Diskussion mit ChatGPT II

Frage: Wenn zwei reelle Zahlen ungleich sind, werden in der Dezimaldarstellung früher oder später verschiedene Ziffern erscheinen. Wenn sie gleich sind, niemals. Bedeutet das nicht, dass der Computer nicht entscheiden kann, ob zwei gegebene Zahlen gleich sind?

Nein, ein Computer kann mit einiger Genauigkeit entscheiden, ob zwei gegebene Zahlen gleich sind. Reelle Zahlen werden in einem Computer mit einer bestimmten Genauigkeit dargestellt, die vom verwendeten Zahlenformat abhängt. Das IEEE-754-Gleitkommaformat ...

⇒ Problem immer noch nicht verstanden!

Diskussion mit ChatGPT III

Frage (in anderer Sprache, ein paar Tage später): *Kann man mit einem Computer stets feststellen, ob zwei gegebene reelle Zahlen gleich sind?*

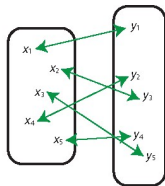
Nein, es ist nicht immer möglich, mit einem Computer festzustellen, ob zwei gegebene reelle Zahlen gleich sind. Dies liegt daran, dass es bei der Darstellung von reellen Zahlen auf einem Computer zu Rundungsfehlern kommen kann, die dazu führen können, dass zwei Zahlen, die mathematisch gleich sind, auf dem Computer als unterschiedlich dargestellt werden. Dieses Problem wird als Gleitkomma-Präzisionsproblem bezeichnet und kann bei vielen Arten von Berechnungen auftreten, die reelle Zahlen verwenden.

**⇒ Gegenteil zu erster Antwort.
Außerdem: Ungleichheit läßt sich ermitteln.**

Abzählbar oder überabzählbar?

- ▶ Abzählbar bedeutet: Beim Durchzählen erwischt man alle!
Jeder natürlichen Zahl kann man ein Objekt zuordnen.
- ▶ In der Mathematik:
Mächtigkeit = Anzahl der Elemente einer Menge

Mengen A und B sind gleichmächtig, wenn es eine eindeutige Abbildung gibt. Wenn nicht, ist eine Menge mächtiger.



eindeutige Funktion (umkehrbar)

- ▶ Frage: **Gibt es Überabzählbares?**

Bruchzahlen abzählbar, reelle Zahlen überabzählbar

► $\mathbb{N} \longleftrightarrow \mathbb{Q}$

Rationale (gebrochene) Zahlen sind abzählbar!

$$\frac{0}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{1}, \frac{0}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{0}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{0}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \dots$$

⇒ Analoges Problem mit rationalen Zahlen ist stets lösbar!

► $\mathbb{N} \not\leftrightarrow \mathbb{R}$ Reelle Zahlen sind überabzählbar!

Beweis:

- 1) Keine eindeutige Zuordnung zwischen Mengen und Teilmengen
- 2) Reelle Zahlen sind gleichmächtig (gibt es "genauso viele") zu den Teilmengen der natürlichen Zahlen.
 ⇒ "Viel mehr" reelle als natürliche Zahlen.

Mengen und Teilmengen

Beispiel: Menge mit 3 Elementen: $X = \{1, 2, 3\}$

X hat 8 Teilmengen:

$$\mathcal{P}(X) = \left\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} \right\}$$

Jeder Teilmenge: Dualzahl, z.B.

$$\emptyset \iff (000)_2$$

$$\{2\} \iff (010)_2$$

$$\{1, 3\} \iff (101)_2$$

$$\{1, 2, 3\} \iff (111)_2$$

Allgemein: Jeder Teilmenge eine n -stellige Dualzahl

\implies Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen.

Satz von Georg Cantor

Es gibt zwischen einer Menge X und der Menge ihrer Teilmengen $\mathcal{P}(X)$ keine eindeutige Zuordnung $X \longleftrightarrow \mathcal{P}(X)$.

Beweis (indirekt):

Angenommen $X \ni x \longleftrightarrow A_x \in \mathcal{P}(X)$.

2 Möglichkeiten: $x \in A_x$ oder $x \notin A_x$.

Es sei $B = \{x \mid x \notin A_x\} \in \mathcal{P}(X)$. $\bar{B} = X \setminus B \in \mathcal{P}(X)$

Es sei $y \longleftrightarrow B$ also $B = A_y$.

Frage: $y \in B$ oder $y \in \bar{B}$?

$y \in B \implies y \notin B, y \notin B \implies y \in B$. Widerspruch! □

$\implies \mathcal{P}(X)$ ist mächtiger als X !

Mengen und ihre Teilmengen gehören zu verschiedenen Welten!

\implies Die Menge der Teilmengen der natürlichen Zahlen ist überabzählbar.

Reelle Zahlen sind überabzählbar

Es gibt eine eindeutige Zuordnung zwischen

Reelle Zahlen in $x \in [0, 1] \iff$ Teilmengen der natürlichen Zahlen

$$(x)_2 = 0.1001011100101001110001101010101\dots$$

$$\iff \{1, 4, 6, 7, 8, 11, 13, 16, 17, 18, 22, 23, 25, 27, 29, \dots\} \subset \mathbb{N}$$

Aber die Menge der Teilmengen der natürlichen Zahlen ist überabzählbar nach dem Satz von Cantor.

- ▶ Viele Paradoxa bauen hierauf auf
(z.B. auch die Gödelsche Unvollständigkeitssätze)
- ▶ Endliche Mengen: P–NP–Problem (4. Millenium-Problem)

Mengen und Teilmengen aus philosophischer Sicht

- ▶ Der Mensch arbeitet nicht schrittweise einen Algorithmus ab.
Der Mensch wählt aus einer überabzählbaren Menge aus.
- ▶ Die physische Realität besteht aus einer Menge von Zuständen.
Der Mensch entscheidet,
welche Teil(menge) er davon interessant findet.
- ▶ Wie macht der Mensch das? Das weiß keiner!
- ▶ Das Gehirn ist offenbar kein Computer.
- ▶ Der Computer wird von allein nicht besser!
Das widerspricht dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik.
Aber das ist schon eine andere Geschichte ...

Kreativität = Fähigkeit, die richtige Teilmenge auszuwählen!