



Weierstraß-Institut für
Angewandte Analysis und Stochastik



Die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung als Wissenschaft

Wolfgang König

- Philosophische Fragen:
 - Was ist Zufall?
 - Was ist Wahrscheinlichkeit?
 - Ist alles um uns herum deterministisch oder alles zufällig?

- Philosophische Fragen:
 - Was ist Zufall?
 - Was ist Wahrscheinlichkeit?
 - Ist alles um uns herum deterministisch oder alles zufällig?

- Anwendungen im Glücksspiel, bei Versicherungen und Finanzkursen, später auch in der Physik, beim Wetter und in vielen anderen Gebieten

- Philosophische Fragen:
 - Was ist Zufall?
 - Was ist Wahrscheinlichkeit?
 - Ist alles um uns herum deterministisch oder alles zufällig?

- Anwendungen im Glücksspiel, bei Versicherungen und Finanzkursen, später auch in der Physik, beim Wetter und in vielen anderen Gebieten

- Anwendung(sversuche) im Rechtswesen

- Philosophische Fragen:
 - Was ist Zufall?
 - Was ist Wahrscheinlichkeit?
 - Ist alles um uns herum deterministisch oder alles zufällig?

- Anwendungen im Glücksspiel, bei Versicherungen und Finanzkursen, später auch in der Physik, beim Wetter und in vielen anderen Gebieten

- Anwendung(sversuche) im Rechtswesen

- Suche nach Systematik und Gesetzmäßigkeiten

Frequentistische Definition

Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** (= des Ausgangs eines Experimentes, das man oft unter gleichen Bedingungen wiederholen kann) ist der **Grenzwert** der **relativen Häufigkeit** des Eintretens dieses Ereignisses bei **vielen Wiederholungen**.

Frequentistische Definition

Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** (= des Ausgangs eines Experimentes, das man oft unter gleichen Bedingungen wiederholen kann) ist der **Grenzwert** der **relativen Häufigkeit** des Eintretens dieses Ereignisses bei **vielen Wiederholungen**.

- Wahrscheinlichkeit als physikalische Größe, die man beliebig genau messen kann und Messfehlern unterliegt
- stark von Glücksspielen und physikalischer Intuition beeinflusst
- versagt bei Experimenten, die man nicht oft wiederholen kann

Frequentistische Definition

Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** (= des Ausgangs eines Experimentes, das man oft unter gleichen Bedingungen wiederholen kann) ist der **Grenzwert** der **relativen Häufigkeit** des Eintretens dieses Ereignisses bei **vielen Wiederholungen**.

- Wahrscheinlichkeit als physikalische Größe, die man beliebig genau messen kann und Messfehlern unterliegt
- stark von Glücksspielen und physikalischer Intuition beeinflusst
- versagt bei Experimenten, die man nicht oft wiederholen kann

BAYES'sche Definition

Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** ist ein **Maß** dafür, wie stark man von dem Eintreten des Ereignisses **überzeugt** ist.

Frequentistische Definition

Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** (= des Ausgangs eines Experimentes, das man oft unter gleichen Bedingungen wiederholen kann) ist der **Grenzwert der relativen Häufigkeit** des Eintretens dieses Ereignisses bei **vielen Wiederholungen**.

- Wahrscheinlichkeit als physikalische Größe, die man beliebig genau messen kann und Messfehlern unterliegt
- stark von Glücksspielen und physikalischer Intuition beeinflusst
- versagt bei Experimenten, die man nicht oft wiederholen kann

BAYES'sche Definition

Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses** ist ein **Maß** dafür, wie stark man von dem Eintreten des Ereignisses **überzeugt** ist.

- Sehr pragmatisch, aber induziert unerwünschte subjektive Kriterien. (Wieviel wärest Du bereit zu setzen?)
- Es spielt keine Rolle, ob wirklich Zufall im Spiel ist.

Die Entwicklung der W'Theorie als Wissenschaft hatte Gegenwind

1. von der Kirche:

- Glückspiel unerwünscht
- Gottes Entscheidungen ergründen zu versuchen, ist nahe der Blasphemie.

Die Entwicklung der W'Theorie als Wissenschaft hatte Gegenwind

1. von der **Kirche**:
 - Glückspiel unerwünscht
 - Gottes Entscheidungen ergründen zu versuchen, ist nahe der Blasphemie.
2. von manchen **Naturwissenschaftlern** der Aufklärung
 - Zufall gibt es nicht, man muss nur genau genug messen
 - Daher gibt es keine seriöse W'Theorie.

Die Entwicklung der W'Theorie als Wissenschaft hatte Gegenwind

1. von der **Kirche**:
 - Glückspiel unerwünscht
 - Gottes Entscheidungen ergründen zu versuchen, ist nahe der Blasphemie.
2. von manchen **Naturwissenschaftlern** der Aufklärung
 - Zufall gibt es nicht, man muss nur genau genug messen
 - Daher gibt es keine seriöse W'Theorie.
3. von manchen **Mathematikern**
 - große Diskrepanz zwischen unsicheren Ereignissen und der Mathematik als Lehre der gesicherten Erkenntnis.

Die Entwicklung der W'Theorie als Wissenschaft hatte Gegenwind

1. von der **Kirche**:
 - Glückspiel unerwünscht
 - Gottes Entscheidungen ergründen zu versuchen, ist nahe der Blasphemie.
2. von manchen **Naturwissenschaftlern** der Aufklärung
 - Zufall gibt es nicht, man muss nur genau genug messen
 - Daher gibt es keine seriöse W'Theorie.
3. von manchen **Mathematikern**
 - große Diskrepanz zwischen unsicheren Ereignissen und der Mathematik als Lehre der gesicherten Erkenntnis.
4. von der Existenz gewisser **Paradoxa** und **logischen Problemen** wie etwa
 - dem Gefangenenparadoxon,
 - der Existenz von Ereignissen mit Wahrscheinlichkeit Null,
 - Wahrscheinlichkeiten auf Kugeloberflächen oder anderen Kontinuen.

Das Problem

Zwei von drei Gefangenen A , B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wärter W , ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. W antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A , dass sich seine Überlebenschancen auf $1/2$ erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.

Hat er Recht?

Das Problem

Zwei von drei Gefangenen A , B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wärter W , ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. W antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A , dass sich seine Überlebenschancen auf $1/2$ erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.

Hat er Recht?

- **Wichtig:** Wir gehen davon aus, dass, falls B und C hingerichtet werden, der Wärter beide **mit gleicher Wahrscheinlichkeit** nennt.
- Dann lautet die Antwort **Nein**, denn W 's Information enthält keine wesentliche neue Information. Daher ist die Überlebenschance von A gleich

$$\mathbb{P}(A \text{ überlebt} \mid W \text{ nennt } B) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ überlebt, } W \text{ nennt } B)}{\mathbb{P}(W \text{ nennt } B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Das Problem

Zwei von drei Gefangenen A , B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wärter W , ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. W antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A , dass sich seine Überlebenschancen auf $1/2$ erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.

Hat er Recht?

- **Wichtig:** Wir gehen davon aus, dass, falls B und C hingerichtet werden, der Wärter beide **mit gleicher Wahrscheinlichkeit** nennt.
- Dann lautet die Antwort **Nein**, denn W 's Information enthält keine wesentliche neue Information. Daher ist die Überlebenschance von A gleich

$$\mathbb{P}(A \text{ überlebt} \mid W \text{ nennt } B) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ überlebt, } W \text{ nennt } B)}{\mathbb{P}(W \text{ nennt } B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

- Falls W allerdings B mit Wahrscheinlichkeit p nennt, falls B und C hingerichtet werden, so ergibt sich die Überlebenschance von A als $\frac{p}{1+p}$!

Der berühmte Briefwechsel Pascal - Fermat

BLAISE PASCAL beschrieb am 29. Juli 1654 in einem Brief an PIERRE DE FERMAT **zwei Probleme**, die ihm von seinem Freund ANTOINE GOMBAUD, CHEVALIER DE MÉRÉ zugetragen wurden. Pascal und Fermat lösten diese Probleme, indem sie **fundamentale Begriffe** der Wahrscheinlichkeitsrechnung zunächst klärten. Diese neuen Herangehensweisen wurden noch von Zeitgenossen als der **Beginn** einer wissenschaftlichen **Wahrscheinlichkeitstheorie** gefeiert, wenn diese neuen Ideen auch erst im Jahre 1679 veröffentlicht wurden.



BLAISE PASCAL (1623-1662)



PIERRE DE FERMAT (1607/8-1667)

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein gerechtes Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf?

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein gerechtes Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf?

- erste Publikation des Paradoxons 1494 in Venedig von FRA LUCA PACCIOLI, falsche Lösung publiziert von NICCOLO TARTAGLIA

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein gerechtes Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf?

- erste Publikation des Paradoxons 1494 in Venedig von FRA LUCA PACCIOLI, falsche Lösung publiziert von NICCOLO TARTAGLIA
- Was heißt 'gerecht'? Nach den Gewinnchancen! (sonst Vorschläge: 5 : 3, im Verhältnis der gewonnenen Runden, oder 2 : 1.)

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein gerechtes Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf?

- erste Publikation des Paradoxons 1494 in Venedig von FRA LUCA PACCIOLI, falsche Lösung publiziert von NICCOLO TARTAGLIA
- Was heißt 'gerecht'? Nach den Gewinnchancen! (sonst Vorschläge: 5 : 3, im Verhältnis der gewonnenen Runden, oder 2 : 1.)
- richtige Lösung: 7 : 1, denn in sieben von acht möglichen fiktiven Fortsetzungen gewinnt der Führende.

Das Würfelproblem

Die Wahrscheinlichkeit, in vier Versuchen mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt mit $\frac{671}{1296}$ etwas mehr als 50 Prozent. Hingegen beträgt beim 24maligen Versuch, mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen (jeder Versuch hat die Gewinnchance $\frac{1}{36}$), die Gewinnchance knapp unter 50 Prozent.

*Es gilt also **nicht** die Regel, dass das Produkt aus Anzahl der Wiederholungen und der Erfolgswahrscheinlichkeit konstant ist.*

Das Würfelproblem

Die Wahrscheinlichkeit, in vier Versuchen mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt mit $\frac{671}{1296}$ etwas mehr als 50 Prozent. Hingegen beträgt beim 24maligen Versuch, mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen (jeder Versuch hat die Gewinnchance $\frac{1}{36}$), die Gewinnchance knapp unter 50 Prozent.

*Es gilt also **nicht** die Regel, dass das Produkt aus Anzahl der Wiederholungen und der Erfolgswahrscheinlichkeit konstant ist.*

- verwirrend wegen ungenügender Unterscheidung zwischen **Wahrscheinlichkeiten** und **Erwartungswerten**.

Das Würfelproblem

Die Wahrscheinlichkeit, in vier Versuchen mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt mit $\frac{671}{1296}$ etwas mehr als 50 Prozent. Hingegen beträgt beim 24maligen Versuch, mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen (jeder Versuch hat die Gewinnchance $\frac{1}{36}$), die Gewinnchance knapp unter 50 Prozent.

*Es gilt also **nicht** die Regel, dass das Produkt aus Anzahl der Wiederholungen und der Erfolgswahrscheinlichkeit konstant ist.*

- verwirrend wegen ungenügender Unterscheidung zwischen **Wahrscheinlichkeiten** und **Erwartungswerten**.
- Dass die Antworten $1 - (5/6)^4 \approx 0,5177$ und $1 - (35/36)^{24} \approx 0,4914$ sind, war Herrn de Méré klar. Er suchte nach einem Grund, warum die Regel nicht gelten sollte. Mit Pascals Antwort war er nicht zufrieden.

Das Würfelproblem

Die Wahrscheinlichkeit, in vier Versuchen mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt mit $\frac{671}{1296}$ etwas mehr als 50 Prozent. Hingegen beträgt beim 24maligen Versuch, mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen (jeder Versuch hat die Gewinnchance $\frac{1}{36}$), die Gewinnchance knapp unter 50 Prozent.

*Es gilt also **nicht** die Regel, dass das Produkt aus Anzahl der Wiederholungen und der Erfolgswahrscheinlichkeit konstant ist.*

- verwirrend wegen ungenügender Unterscheidung zwischen **Wahrscheinlichkeiten** und **Erwartungswerten**.
- Dass die Antworten $1 - (5/6)^4 \approx 0,5177$ und $1 - (35/36)^{24} \approx 0,4914$ sind, war Herrn de Méré klar. Er suchte nach einem Grund, warum die Regel nicht gelten solle. Mit Pascals Antwort war er nicht zufrieden.
- ABRAHAM DE MOIVRE zeigte 1718, dass die Regel nur in einem geeigneten asymptotischen Sinne stimmt.

Christiaan Huygens: erste Publikation

Die **erste Monographie** über Wahrscheinlichkeitsrechnung, **De Rationiis in Aleae Ludo**, veröffentlichte CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695) im Jahre 1657. Er kannte zwar die Ergebnisse von Pascal und Fermat, aber nicht ihren Lösungsweg. Seine Überlegungen zu den Themen "Gerechtigkeit" und "Erwartungswert" gingen weit über jene von Cardano, Pascal und Fermat hinaus. Insbesondere erhielt er eine neue Lösung des de Méré'schen Teilungsproblems.



Christiaan Huygens: erste Publikation

Die **erste Monographie** über Wahrscheinlichkeitsrechnung, **De Rationiis in Aleae Ludo**, veröffentlichte CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695) im Jahre 1657. Er kannte zwar die Ergebnisse von Pascal und Fermat, aber nicht ihren Lösungsweg. Seine Überlegungen zu den Themen "Gerechtigkeit" und "Erwartungswert" gingen weit über jene von Cardano, Pascal und Fermat hinaus. Insbesondere erhielt er eine neue Lösung des de Méré'schen Teilungsproblems.



Huygens war auch einer der führenden Physiker und Astronomen des 17. Jahrhunderts. Er begründete die Wellentheorie des Lichts, konstruierte die ersten Pendeluhrer und verbesserte Teleskope, so dass neue Himmelskörper damit entdeckt wurden.

- GEROLAMO CARDANO (1501-1576) schrieb 1524 das **erste Buch** über Wahrscheinlichkeitsrechnung: **De Ludo Aleae** (1663 veröffentlicht).

- GEROLAMO CARDANO (1501-1576) schrieb 1524 das **erste Buch** über Wahrscheinlichkeitsrechnung: **De Ludo Aleae** (1663 veröffentlicht).
- Auf Basis von Huygens' Lehre vom Erwartungswert bewies JOHN TILLOTSON (Erzbischof von Canterbury), dass sich der Glaube an Gott lohne. Er benutzt, dass das Ereignis, dass Gott existiert, **positive Wahrscheinlichkeit** hat.

- GEROLAMO CARDANO (1501-1576) schrieb 1524 das **erste Buch** über Wahrscheinlichkeitsrechnung: **De Ludo Aleae** (1663 veröffentlicht).
- Auf Basis von Huygens' Lehre vom Erwartungswert bewies JOHN TILLOTSON (Erzbischof von Canterbury), dass sich der Glaube an Gott lohne. Er benutzt, dass das Ereignis, dass Gott existiert, **positive Wahrscheinlichkeit** hat.
- JOHAN DE WIT (1625-1672) berechnet **Mortalitätsmodelle** und Witwenrenten auf Basis von Huygens' Überlegungen

- GEROLAMO CARDANO (1501-1576) schrieb 1524 das **erste Buch** über Wahrscheinlichkeitsrechnung: **De Ludo Aleae** (1663 veröffentlicht).
- Auf Basis von Huygens' Lehre vom Erwartungswert bewies JOHN TILLOTSON (Erzbischof von Canterbury), dass sich der Glaube an Gott lohne. Er benutzt, dass das Ereignis, dass Gott existiert, **positive Wahrscheinlichkeit** hat.
- JOHAN DE WIT (1625-1672) berechnet **Mortalitätsmodelle** und Witwenrenten auf Basis von Huygens' Überlegungen
- JAKOB BERNOULLI (1655-1705) benutzt in **Ars Conjectandi** (1713) **Kombinatorik**, betrachtet **Folgen von Zufallsgrößen** und beweist ein **Gesetz der Großen Zahlen**.

- ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) beweist in [The Doctrine of Chances](#) (1718) einen **Zentralen Grenzwertsatz** und führt die **Glockenkurve** ein.

Weitere Meilensteine (2)

- ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) beweist in *The Doctrine of Chances* (1718) einen **Zentralen Grenzwertsatz** und führt die **Glockenkurve** ein.
- THOMAS BAYES (1702-1761) führt **bedingte Wahrscheinlichkeiten** ein und begründet die **Statistik**.

Weitere Meilensteine (2)

- ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) beweist in *The Doctrine of Chances* (1718) einen **Zentralen Grenzwertsatz** und führt die **Glockenkurve** ein.
- THOMAS BAYES (1702-1761) führt **bedingte Wahrscheinlichkeiten** ein und begründet die **Statistik**.
- Verfeinerungen und philosophische Betrachtungen, aber **Sackgasse** bis etwa 1895.

- ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) beweist in *The Doctrine of Chances* (1718) einen **Zentralen Grenzwertsatz** und führt die **Glockenkurve** ein.
- THOMAS BAYES (1702-1761) führt **bedingte Wahrscheinlichkeiten** ein und begründet die **Statistik**.
- Verfeinerungen und philosophische Betrachtungen, aber **Sackgasse** bis etwa 1895.
- Mathematische Durchbrüche: **Mengenlehre** (CANTOR 1895), HILBERT'sches 6. Problem, **Maßtheorie** (BOREL 1901), **Integrationstheorie** (LEBESGUE 1902).

- ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) beweist in *The Doctrine of Chances* (1718) einen **Zentralen Grenzwertsatz** und führt die **Glockenkurve** ein.
- THOMAS BAYES (1702-1761) führt **bedingte Wahrscheinlichkeiten** ein und begründet die **Statistik**.
- Verfeinerungen und philosophische Betrachtungen, aber **Sackgasse** bis etwa 1895.
- Mathematische Durchbrüche: **Mengenlehre** (CANTOR 1895), HILBERT'sches 6. Problem, **Maßtheorie** (BOREL 1901), **Integrationstheorie** (LEBESGUE 1902).
- neuer Schwung in der maßtheoretischen W'Theorie: Konstruktion der **Brown'schen Bewegung** (WIENER 1923), abschließende **Axiomatik** der W'Theorie (KOLMOGOROV 1933) – **Geburt der mathematischen W'Theorie**.