Weierstraß-Institut für
Angewandte Analysis und Stochastik

Leibniz-Gemeinschaft

Bevölkerungen in zufälligen Umgebungen: Umziehen von Megacity zu Megacity?

Wolfgang König (WIAS und TU Berlin)

Wir betrachten eine Population aus vielen Individuen, die sich durch den Raum bewegen und immer wieder Nachkommen haben oder sterben. Wir stellen uns vor, dass alle Ereignisse zufällig und unabhängig sind:

- Bewegung eines Individuums,
- seine Geburts- und Todeszeitpunkte,
- die Größe seiner Nachkommenschaft.

Dies nennt man einen Verzweigungsprozess mit Migration
oder einen räumlichen Verzweigungsprozess.

Vereinfachende Annahmen:

- Der Prozess findet auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$ statt.
- Ein Individuum zum Zeitpunkt Null im Urspung, sonst niemand.
- Nach je einer zufälligen exponentiell verteilten Wartezeit wird jedes Individuum durch genau zwei Partikel ersetzt (binäre Verzweigung) oder stirbt.
- Jeder Schritt der Größe Eins in jede der d Raumdimensionen hat die gleiche Wahrscheinlichkeit.

Fragen

Wir interessieren uns für das Langzeitverhalten der gesamten Population, insbesondere für Fragen wie:

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Population aussterben?
- Wenn sie nicht ausstirbt, wo werden nach langer Zeit die meisten Individuen sein?
- Wenn sie nicht ausstirbt, kann man nach langer Zeit ein (zufälliges?) Muster in der Gesamtverteilung der Individuen erkennen?
- Gibt es gewisse Wege, entlang derer sich besonders viele Individuen bewegen?
- Gibt es Alterungseffekte, wenn man längere Zeitabschnitte betrachtet?

Fragen

Wir interessieren uns für das Langzeitverhalten der gesamten Population, insbesondere für Fragen wie:

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Population aussterben?
- Wenn sie nicht ausstirbt, wo werden nach langer Zeit die meisten Individuen sein?
- Wenn sie nicht ausstirbt, kann man nach langer Zeit ein (zufälliges?) Muster in der Gesamtverteilung der Individuen erkennen?
- Gibt es gewisse Wege, entlang derer sich besonders viele Individuen bewegen?
- Gibt es Alterungseffekte, wenn man längere Zeitabschnitte betrachtet?

Diese Fragen sind relativ leicht zu beantworten, da die vielen Partikel nicht miteinander interagieren und daher eine Approximation mit Hilfe der Brown'schen Bewegung (also der zeitlich/räumlich stetigen Version des Modells) standardmäßig gemacht werden kann.

Zufällige Umgebung

Nun nehmen wir an, dass die Welt, in der die Individuen leben, nicht überall gleich (homogen) ist, sondern dass manche Gegenden bessere Voraussetzungen für eine große Nachkommenschaft bieten als andere. Die Rate, nach der das Individuum stirbt oder sich verdoppelt, hängt vom Ort ab: “gute” Gegenden haben eine hohe Nachkommenschaftsrate, “schlechte” Gegenden produzieren viele Tote.

Zufällige Umgebung

Nun nehmen wir an, dass die Welt, in der die Individuen leben, nicht überall gleich (homogen) ist, sondern dass manche Gegenden bessere Voraussetzungen für eine große Nachkommenschaft bieten als andere. Die Rate, nach der das Individuum stirbt oder sich verdoppelt, hängt vom Ort ab: “gute” Gegenden haben eine hohe Nachkommenschaftsrate, “schlechte” Gegenden produzieren viele Tote.

Mehr noch, die Nachkommenschafts- und Sterberaten sind nun selber zufällig und unabhängig im Raum verteilt. Sehr große Raten können also neben sehr geringen Raten stehen, das Medium ist nun zufällig, “ ungeordnet”.

Zufällige Umgebung

Nun nehmen wir an, dass die Welt, in der die Individuen leben, nicht überall gleich (homogen) ist, sondern dass manche Gegenden bessere Voraussetzungen für eine große Nachkommenschaft bieten als andere. Die Rate, nach der das Individuum stirbt oder sich verdoppelt, hängt vom Ort ab: "gute" Gegenden haben eine hohe Nachkommenschaftsrate, "schlechte" Gegenden produzieren viele Tote.

Mehr noch, die Nachkommenschafts- und Sterberaten sind nun selber zufällig und unabhängig im Raum verteilt. Sehr große Raten können also neben sehr geringen Raten stehen, das Medium ist nun zufällig, " ungeordnet".

Nun könnte es zu einem Intermittenzeffekt kommen: Der Hauptteil der gesamten Population könnte gesammelt zu einer (besonders fruchtbaren) "Megacity" marschieren und sich dort lange Zeit wie verrückt vermehren. Es entstehen viele neue Fragen:

- Wird der Intermittenzeffekt eintreten?
- Wo liegt diese Megacity? Ist es nur eine? Wie groß ist sie? Wie sieht die Umgebung dort aus, was macht sie so attraktiv?
- Wie lange hält die Attraktivität der Megacity an? Was machen die Individuen anschließend?

Der Erwartungswert der Populationsgröße

Sei $\eta_t(x)$ die Anzahl der Individuen zum Zeitpunkt t im Raumpunkt x. Wir nehmen den Erwartungswert über die Bewegung, die Verzweigung und das Sterben, aber nicht über die Raten:

$$u(t,x) = \mathtt{E}[\eta_t(x)] \qquad \text{und} \qquad U(t) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} u(t,x)$$

sind die erwarteten Populationszahlen zum Zeitpunkt t im Raumpunkt x bzw. im Universum.

Der Erwartungswert der Populationsgröße

Sei $\eta_t(x)$ die Anzahl der Individuen zum Zeitpunkt t im Raumpunkt x. Wir nehmen den Erwartungswert über die Bewegung, die Verzweigung und das Sterben, aber nicht über die Raten:

$$u(t,x) = \mathtt{E}[\eta_t(x)] \qquad \text{und} \qquad U(t) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} u(t,x)$$

sind die erwarteten Populationszahlen zum Zeitpunkt t im Raumpunkt x bzw. im Universum.

Wir wollen den Intermittenzeffekt schon in $u(t,\cdot)$ finden: Kommt der Hauptanteil der Summe $U(t)$ wirklich von wenigen, kleinen, weit von einander entfernten Megacities her?

Der Erwartungswert der Populationsgröße

Sei $\eta_t(x)$ die Anzahl der Individuen zum Zeitpunkt t im Raumpunkt x. Wir nehmen den Erwartungswert über die Bewegung, die Verzweigung und das Sterben, aber nicht über die Raten:

$$u(t,x) = \mathtt{E}[\eta_t(x)] \qquad \text{und} \qquad U(t) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} u(t,x)$$

sind die erwarteten Populationszahlen zum Zeitpunkt t im Raumpunkt x bzw. im Universum.

Wir wollen den Intermittenzeffekt schon in $u(t,\cdot)$ finden: Kommt der Hauptanteil der Summe $U(t)$ wirklich von wenigen, kleinen, weit von einander entfernten Megacities her?

(Theoretische Diskussion schon seit den 1980ern, erste bewiesene Resultate ab 1990.)

Nun nutzen wir eine Verbindung zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen:

Eigenschaften von u

Die Funktion $u(t,x)$ löst die

$$\partial_t u(t,x) = \Delta u(t,x) + \xi(x)u(t,x)$$

wobei $\xi(x)$ gleich der Differenz von Nachkommenschafts- zu Sterberate in x ist. Insbesondere gilt die Feynman-Kac-Formel

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x\Big[\exp\Big\{\int_0^t \xi(X_s)\,\mathrm{d}s\Big\}\delta_0(X_t)\Big],$$

und die Fourierentwicklung

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{e}^{t\lambda_k} v_k(0)v_k(x).$$

Der Operator $\Delta + \xi$ auf der rechten Seite der Wärmeleitungsgleichung heißt der Anderson-Operator, es ist ein zufälliger Schrödinger-Operator. Seine Spektraleigenschaften beschreiben Leitungseigenschaften in Metalllegierungen und optische Eigenschaften verunreinigter Gläser. Hier interessiert uns nur der Rand des Spektrums.

Unser Wissen über u

Mit Hilfe dieser Methoden (und vieler mehr) konnte seit 1990 Vieles gezeigt werden:

- $u(t,\cdot)$ ist intermittent: An jedem späten Zeitpunkt t ist fast die gesamte Masse von $u(t,\cdot)$ in einer Megacity konzentriert.
- Die (zufällige!) Lage und Größe der Megacities ist bekannt.
- In den Megacities nehmen $\xi(\cdot)$ und $u(t,\cdot)$ je eine gewisse deterministische Gestalt an.
- u altert: Die Zeitintervalle, nachdem eine neue Megacity aufgesucht wird, werden länger und länger mit einer gewissen Rate.

Wieviel davon gilt auch noch für den Verzweigungsprozess $\eta_t(\cdot)$?

Eine aktuelle Arbeit von Kollegen zeigt in einem Spezialfall:

- Auch $\eta_t(\cdot)$ ist intermittent.
- Die Megacities von $u(t,\cdot)$ und $\eta_t(\cdot)$ sind die selben.
- Allerdings besuchen die Individuen (d.h. $\eta_t(\cdot)$) diese Megacities in einer eventuell anderen Reihenfolge als die Hauptmassen der Funktion u.

Eine Erklärung

Der Erwartungswert der Individuen kann sich viel flexibler durch den Raum bewegen als die Individuen selber. Wenn sie zu einem Zeitpunkt in einer Megacity sind und sich entschließen, zu einer anderen zu gehen, wählen die nächstgelegene, während der Erwartungswert sich vom Ursprung aus orientiert.

Der Spezialfall ist eine Verteilung der Verzweigungs- und Sterberaten, die ganz extrem dicht bevölkerte und auf einem einzigen Punkt konzentrierte Megacities hervorbringt.

Was ist noch zu tun?

- größere Allgemeinheit der Ergebnisse
- andere Anfangsbedingung betrachten (z. B. homogen)
- Wege identifizieren, entlang derer sich viele Individuen bewegen
- realistischeres Bewegungsmodell
- Effekte beachten, die zu große Megacities im Wachstum bremsen
- Individuen mit mehr Eigenschaften ausstatten (Multityp-Prozesse)
- Mutation und Selektion einbauen
- Abhängigkeiten der Verzweigungsraten auch von der lokalen Populationsgröße und von den benachbarten Raten betrachten.