



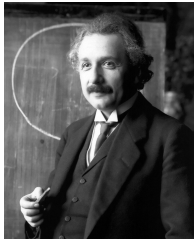
Weierstraß-Institut für  
Angewandte Analysis und Stochastik



## Das interagierende Bosegas im Lichte der Wahrscheinlichkeitstheorie

Wolfgang König (WIAS Berlin und TU Berlin)

- Im Jahre 1924 bat der junge, damals weitgehend unbekannte Physiker SATYENDRA NATH BOSE den berühmten ALBERT EINSTEIN um Hilfe bei der Übersetzung und Veröffentlichung seiner neuesten Arbeit in der *Zeitschrift für Physik*.
- Einstein übersetzte das Manuskript ins Deutsche und sorgte für die Veröffentlichung für Bose.
- Er betonte, dass diese neue Methode geeignet sei, die Quantenmechanik des idealen (= interaktionsfreien) Gases zu erklären. Er erweiterte die Idee auf Gasatome und sagte 1925 die Existenz eines neuen, bisher völlig unbekanntem Zustands voraus, das nun unter dem Namen **Bose–Einstein-Kondensat** bekannt ist.



ALBERT EINSTEIN (1879-1955) in 1921



SATYENDRA NATH BOSE (1894-1974) im Jahre 1925

### Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese.

Von Bose (Dacca-University, Indien).

(Eingegangen am 2. Juli 1924.)

Der Phasenraum eines Lichtquants in bezug auf ein gegebenes Volumen wird in „Zellen“ von der Größe  $h^3$  aufgeteilt. Die Zahl der möglichen Verteilungen der Lichtquanten einer makroskopisch definierten Strahlung unter diese Zellen liefert die Entropie und damit alle thermodynamischen Eigenschaften der Strahlung.

Plancks Formel für die Verteilung der Energie in der Strahlung des schwarzen Körpers bildet den Ausgangspunkt für die Quantentheorie, welche in den letzten 20 Jahren entwickelt worden ist und in allen Gebieten der Physik reiche Früchte getragen hat. Seit der Publikation im Jahre 1901 sind viele Arten der Ableitung dieses Gesetzes vorgeschlagen worden. Es ist anerkannt, daß die fundamentalen Voraussetzungen der Quantentheorie unvereinbar sind mit den Gesetzen der klassischen Elektrodynamik. Alle bisherigen Ableitungen machen Gebrauch von der Relation

$$q, d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{c^3} E,$$

d. h. von der Relation zwischen der Strahlungsdichte und der mittleren Energie eines Oszillators, und sie machen Annahmen über die Zahl der Freiheitsgrade des Äthers, wie sie in obige Gleichung eingeht (erster Faktor der rechten Seite). Dieser Faktor konnte jedoch nur aus der klassischen Theorie hergeleitet werden. Dies ist der unbefriedigende Punkt in allen Ableitungen, und es kam nicht wundernehmen, daß immer wieder Anstrengungen gemacht werden, eine Ableitung zu geben, die von diesem logischen Fehler frei ist.

Eine bemerkenswert elegante Ableitung ist von Einstein angegeben worden. Dieser hat den logischen Mangel aller bisherigen Ableitungen erkannt und versucht, die Formel unabhängig von der klassischen Theorie zu deduzieren. Von sehr einfachen Annahmen über den Energieaustausch zwischen Molekülen und Strahlungsfeld ausgehend, findet er die Relation

$$q, \nu = \frac{\alpha_{\nu, \nu}}{e^{\frac{\alpha_{\nu, \nu}}{kT}} - 1}.$$

Indessen muß er, um diese Formel mit der Planckschen in Übereinstimmung zu bringen, von Wiens Verschiebungsgesetz und Bohrs Korrespondenzprinzip Gebrauch machen. Wiens Gesetz ist auf die klassische

Daraus folgt zunächst

$$p_\nu^0 = B_\nu e^{-\frac{r h \nu^2}{\beta}}.$$

Da aber

$$A_\nu = \sum_r B_\nu e^{-\frac{r h \nu^2}{\beta}} = B_\nu \left(1 - e^{-\frac{h \nu^2}{\beta}}\right)^{-1},$$

so ist

$$B_\nu = A_\nu \left(1 - e^{-\frac{h \nu^2}{\beta}}\right).$$

Ferner hat man

$$\begin{aligned} N_\nu &= \sum_r r p_\nu^0 = \sum_r r A_\nu \left(1 - e^{-\frac{h \nu^2}{\beta}}\right) e^{-\frac{r h \nu^2}{\beta}} \\ &= \frac{A_\nu e^{-\frac{h \nu^2}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{h \nu^2}{\beta}}}. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf den oben gefundenen Wert von  $A_\nu$  ist also

$$E_\nu = \sum_s \frac{8\pi h \nu^3 d\nu}{c^3} \nu \frac{e^{-\frac{h \nu^2}{\beta}}}{1 - e^{-\frac{h \nu^2}{\beta}}}.$$

Mit Benützung der bisherigen Resultate findet man ferner

$$S = k \left[ \frac{E_\nu}{\beta} - \sum_s A_\nu \lg \left(1 - e^{-\frac{h \nu^2}{\beta}}\right) \right],$$

woraus mit Rücksicht darauf, daß  $\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}$ , folgt, daß  $\beta = kT$ . Setzt man dies in obige Gleichung für  $E$  ein, so erhält man

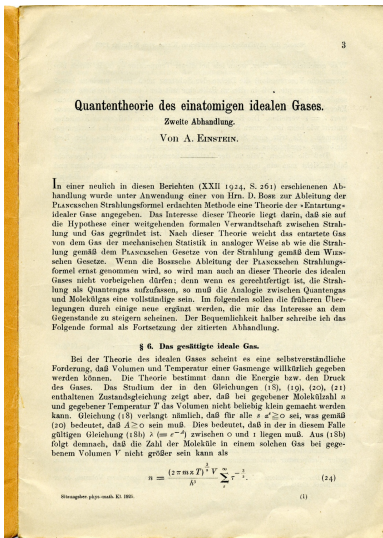
$$E_\nu = \sum_s \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \nu \frac{1}{e^{\frac{h \nu^2}{kT}} - 1} d\nu,$$

welche Gleichung Plancks Formel äquivalent ist.

(Übersetzt von A. Einstein.)

Anmerkung des Übersetzers. Boses Ableitung der Planckschen Formel bedeutet nach meiner Meinung einen wichtigen Fortschritt. Die hier benutzte Methode liefert auch die Quantentheorie des idealen Gases, wie ich an anderer Stelle ausführen will.

[https://www.lorentz.leidenuniv.nl/history/Einstein\\_archive/Einstein\\_1925\\_publication/](https://www.lorentz.leidenuniv.nl/history/Einstein_archive/Einstein_1925_publication/)



### Quantentheorie des einatomigen idealen Gases.

Zweite Abhandlung.

VON A. EINSTEIN.

3

In einer neulich in diesen Berichten (XXII 1924, S. 261) erschienenen Abhandlung wurde unter Anwendung einer von Hrn. D. Bose zur Ableitung der PLANCK'schen Strahlungsformel erdachten Methode eine Theorie der •Entartung• idealer Gase angegeben. Das Interesse dieser Theorie liegt darin, daß sie auf die Hypothese einer weitgehenden formalen Verwandtschaft zwischen Strahlung und Gas gegründet ist. Nach dieser Theorie weicht das entartete Gas von dem Gas der mechanischen Statistik in analoger Weise ab wie die Strahlung gemäß dem PLANCK'schen Gesetze von der Strahlung gemäß dem WIESEN'schen Gesetze. Wenn die BOSE'sche Ableitung der PLANCK'schen Strahlungsformel ernst genommen wird, so wird man auch an dieser Theorie des idealen Gases nicht vorbeigehen dürfen; denn wenn es gerechtfertigt ist, die Strahlung als Quantengas aufzufassen, so muß die Analogie zwischen Quantengas und Molekülgas eine vollständige sein. Im folgenden sollen die früheren Überlegungen durch einige neue ergänzt werden, die mir das Interesse an dem Gegenstande zu steigern scheinen. Der Bequemlichkeit halber schreibe ich das Folgende formal als Fortsetzung der zitierten Abhandlung.

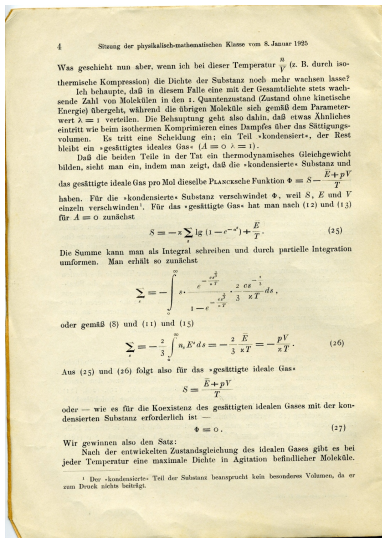
#### § 6. Das gasförmige ideale Gas.

Bei der Theorie des idealen Gases scheint es eine selbstverständliche Forderung, daß Volumen und Temperatur einer Gasmenge willkürlich gegeben werden können. Die Theorie bestimmt dann die Energie bzw. den Druck des Gases. Das Studium der in den Gleichungen (18), (19), (20), (21) enthaltenen Zustandsgleichung zeigt aber, daß bei gegebener Molekülzahl  $n$  und gegebener Temperatur  $T$  das Volumen nicht beliebig klein gemacht werden kann. Gleichung (18) verlangt nämlich, daß für alle  $s$   $a_s^2 \geq 0$  sei, was gemäß (20) bedeutet, daß  $\lambda \geq 0$  sein muß. Dies bedeutet, daß in der in diesem Falle gültigen Gleichung (18)  $\lambda$  ( $= e^{-\lambda}$ ) zwischen 0 und 1 liegen muß. Aus (18) folgt demnach, daß die Zahl der Moleküle in einem solchen Gas bei gegebenem Volumen  $V$  nicht größer sein kann als

$$n = \frac{(2\pi m \kappa T)^{3/2}}{h^3} V \sum_{s=1}^{\infty} e^{-s^2} \quad (24)$$

Strahlungsphys. math. Kl. 1925.

(1)



4

Strang der physikalisch-mathematischen Klasse vom 8. Januar 1925

Was geschieht nun aber, wenn ich bei dieser Temperatur  $\frac{n}{V}$  (z. B. durch isothermische Kompression) die Dichte der Substanz noch mehr wachsen lasse? Ich behaupte, daß in diesem Falle eine mit der Gesamtdichte stets wachsende Zahl von Molekülen in den 1. Quantenzustand (Zustand ohne kinetische Energie) übergeht, während die übrigen Moleküle sich gemäß dem Parameterwert  $\lambda = 1$  verteilen. Die Behauptung geht also dahin, daß etwas Ähnliches eintritt wie beim isothermen Komprimieren eines Dampfes über das Sättigungsvolumen. Es tritt eine Scheidung ein; ein Teil •kondensiert•, der Rest bleibt ein •gasförmiges ideales Gas• ( $\lambda = 0$  oder  $\lambda = 1$ ).

Daß die beiden Teile in der Tat ein thermodynamisches Gleichgewicht bilden, sieht man ein, indem man zeigt, daß die •kondensierte• Substanz und das gasförmige ideale Gas pro Mol dieselbe PLANCK'sche Funktion  $\Phi = S - \frac{E + pV}{T}$  haben. Für die •kondensierte• Substanz verschwindet  $\Phi$ , weil  $S$ ,  $E$  und  $V$  einzeln verschwinden<sup>1</sup>. Für das •gasförmige Gas• hat man nach (12) und (13) für  $\lambda = 0$  zunächst

$$S = -n \sum_{s=1}^{\infty} \lg(1 - e^{-s^2}) + \frac{E}{T} \quad (25)$$

Die Summe kann man als Integral schreiben und durch partielle Integration umformen. Man erhält so zunächst

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lg(1 - e^{-s^2}) = - \int_0^{\infty} ds \cdot \frac{e^{-s^2}}{1 - e^{-s^2}} \cdot \frac{2}{3} \frac{ds}{sT} \quad (26)$$

oder gemäß (8) und (11) und (15)

$$\sum_{s=1}^{\infty} \lg(1 - e^{-s^2}) = - \frac{2}{3} \int_0^{\infty} n_s N^s ds = - \frac{2}{3} \frac{E}{\kappa T} = - \frac{pV}{\kappa T} \quad (26)$$

Aus (25) und (26) folgt also für das •gasförmige ideale Gas•

$$S = \frac{E + pV}{T}$$

oder — wie es für die Koexistenz des gasförmigen idealen Gases mit der kondensierten Substanz erforderlich ist —

$$\Phi = 0 \quad (27)$$

Wir gewinnen also den Satz:

Nach der entwickelten Zustandsgleichung des idealen Gases gibt es bei jeder Temperatur eine maximale Dichte in Agitation befindlicher Moleküle.

<sup>1</sup> Der •kondensierte• Teil der Substanz besetzt kein besonderes Volumen, da er zum Druck nichts beiträgt.

### Ende von Boses Arbeit:

Anmerkung des Übersetzers: *Boses Ableitung des Planck'schen Formel bedeutet nach meiner Meinung einen wichtigen Fortschritt. Die hier benutzte Methode liefert auch die Quantentheorie des idealen Gases, wie ich an anderer Stelle ausführen will.*

### Ende von Boses Arbeit:

Anmerkung des Übersetzers: *Boses Ableitung des Planck'schen Formel bedeutet nach meiner Meinung einen wichtigen Fortschritt. Die hier benutzte Methode liefert auch die Quantentheorie des idealen Gases, wie ich an anderer Stelle ausführen will.*

### Seite 3 in der eigenen Arbeit:

*Aus (18b) folgt demnach, dass die Zahl der Moleküle in einem solchen Gas bei gegebenem Volumen  $V$  nicht größer sein kann als*

$$n = \frac{(2\pi m \kappa T)^{3/2} V}{h^3} \sum_s^{\infty} \tau^{-3/2}.$$

### Seite 4:

*Ich behaupte, daß [bei wachsender Dichte] eine mit der Gesamtdichte stets wachsende Zahl von Molekülen in den  $l$ . Quantenzustand (Zustand ohne kinetische Energie) übergeht, während sich die übrigen Moleküle gemäß dem Parameterwert  $\lambda = 1$  verteilen.*

...

*Wir gewinnen also den Satz:*

*Nach der entwickelten Zustandsgleichung des idealen Gases gibt es bei jeder Temperatur eine maximale Dichte in Agitation befindlicher Moleküle.*

*Die Entartung des Bose–Einstein-Gases hat eher den Ruf, nur eine reine imaginäre Existenz zu haben.* (London 1938)

*Die Dichten sind so hoch und die Temperaturen so niedrig, dass die Van-der-Waals-Korrekturen sich mit den möglichen Auswirkungen von Degeneration zusammenfügen müssen, und es gibt wenig Aussicht, jemals in der Lage zu sein, die beiden Arten von Effekten zu trennen.* (Schrödinger 1946)

*Kann man mit mathematischer Strenge [...] beweisen, dass ein Gas bei gegebenen intermolekularen Kräften kondensiert bei hinreichend niedriger Temperatur bei einer scharf definierten Dichte [...]? Es mag jetzt seltsam erscheinen, dass Zweifel daran bestehen, dass dies möglich wäre, aber [...] im Jahre 1937 war man sich nicht so sicher und ich erinnere mich, dass Debye zum Beispiel es bezweifelte. Meiner Meinung nach wurde das befreiende Wort von Kramers gesprochen. Er bemerkte, ein Phasenübergang (wie z.B. Kondensation) könne mathematisch nur als Grenzeigenschaft der Partitionsfunktion verstanden werden. Nur im Grenzbereich, wobei die Anzahl der Moleküle  $N$  und das Volumen  $V$  gegen unendlich gehen, so dass  $N/V$  endlich bleibt (man nennt dies nun den thermodynamischen Grenzwert) kann man die beiden Diskontinuitäten erwarten [...].* (Uhlenbeck 1974))

- Begründung der **Quantenstatistik**:  
Beschreibung makroskopischer Systeme durch viele mikroskopische identische (ununterscheidbare) Teilchen mit Hilfe von **Aufenthaltswahrscheinlichkeiten** ( $\implies$  **Wellenfunktionen**)



- Begründung der **Quantenstatistik**:  
Beschreibung makroskopischer Systeme durch viele mikroskopische identische (ununterscheidbare) Teilchen mit Hilfe von **Aufenthaltswahrscheinlichkeiten** ( $\implies$  **Wellenfunktionen**)
- Quantenmechanische Besonderheiten durch **Symmetriebedingungen**: **Bosonen** (PAUL DIRAC) (im Gegensatz zu **Fermionen**)

- Begründung der **Quantenstatistik**:  
Beschreibung makroskopischer Systeme durch viele mikroskopische identische (ununterscheidbare) Teilchen mit Hilfe von **Aufenthaltswahrscheinlichkeiten** ( $\implies$  **Wellenfunktionen**)
- Quantenmechanische Besonderheiten durch **Symmetriebedingungen**: **Bosonen** (PAUL DIRAC) (im Gegensatz zu **Fermionen**)
- "**fünfter Aggregatzustand**": rein quantenmechanischer **Phasenübergang**, bei dem Wechselwirkungen keine Rolle mehr spielen und alle Atome dieselben physikalischen Eigenschaften haben. Kondensat als "Superatom".

- Begründung der **Quantenstatistik**:  
Beschreibung makroskopischer Systeme durch viele mikroskopische identische (ununterscheidbare) Teilchen mit Hilfe von **Aufenthaltswahrscheinlichkeiten** ( $\implies$  **Wellenfunktionen**)
- Quantenmechanische Besonderheiten durch **Symmetriebedingungen**: **Bosonen** (PAUL DIRAC) (im Gegensatz zu **Fermionen**)
- "fünfter Aggregatzustand": rein quantenmechanischer **Phasenübergang**, bei dem Wechselwirkungen keine Rolle mehr spielen und alle Atome dieselben physikalischen Eigenschaften haben. Kondensat als "Superatom".
- Triebfeder zum praktischen
  - **Realisieren tiefer Temperaturen** (Kühlung durch Laser und durch **Evaporation**, d.h. Herausnahme der energiereichsten Teilchen),
  - **Einfangen** von Atomgruppen durch eine magnetische Falle,
  - Behandeln **winziger Atomgruppen**.

- Begründung der **Quantenstatistik**:  
Beschreibung makroskopischer Systeme durch viele mikroskopische identische (ununterscheidbare) Teilchen mit Hilfe von **Aufenthaltswahrscheinlichkeiten** ( $\implies$  **Wellenfunktionen**)
- Quantenmechanische Besonderheiten durch **Symmetriebedingungen**: **Bosonen** (PAUL DIRAC) (im Gegensatz zu **Fermionen**)
- "fünfter Aggregatzustand": rein quantenmechanischer **Phasenübergang**, bei dem Wechselwirkungen keine Rolle mehr spielen und alle Atome dieselben physikalischen Eigenschaften haben. Kondensat als "Superatom".
- Triebfeder zum praktischen
  - **Realisieren tiefer Temperaturen** (Kühlung durch Laser und durch **Evaporation**, d.h. Herausnahme der energiereichsten Teilchen),
  - **Einfangen** von Atomgruppen durch eine magnetische Falle,
  - Behandeln **winziger Atomgruppen**.

Und für mich als Mathematiker:

- Triebfeder für viele mathematische Ansätze

- In den 1950ern führten BELJAVSKI, BOGOLJUBOV, GROSS, PITAEVSKI, HARTREE vereinfachte Modelle für **verdünnte interagierende Gase** ein. Die Interaktion wurde durch die **Streulänge** ausgedrückt, die freie Energie mit der **BORN-Approximation** angenähert.

- In den 1950ern führten BELJAVSKI, BOGOLJUBOV, GROSS, PITAEVSKI, HARTREE vereinfachte Modelle für **verdünnte interagierende Gase** ein. Die Interaktion wurde durch die **Streulänge** ausgedrückt, die freie Energie mit der **BORN-Approximation** angenähert.
- Die Spur des  **$N$ -Partikel-Hamiltonoperators** ( $\implies$  **später**) wurde in den 1950ern durch JEAN GINIBRE und RICHARD FEYNMAN in ein System von **interagierenden Brown'schen Bewegungen**, der **Feynman–Kac-Formel**, umgeformt.

- In den 1950ern führten BELJAVSKI, BOGOLJUBOV, GROSS, PITAEVSKI, HARTREE vereinfachte Modelle für **verdünnte interagierende Gase** ein. Die Interaktion wurde durch die **Streulänge** ausgedrückt, die freie Energie mit der **BORN-Approximation** angenähert.
- Die Spur des  **$N$ -Partikel-Hamiltonoperators** ( $\implies$  **später**) wurde in den 1950ern durch JEAN GINIBRE und RICHARD FEYNMAN in ein System von **interagierenden Brown'schen Bewegungen**, der **Feynman–Kac-Formel**, umgeformt.
- RICHARD FEYNMAN schlug 1953 vor, die durch die Symmetrisierung auftretenden **Brown'schen Zykel** im Bosegas ( $\implies$  **später**) als wichtigen Ordnungsparameter aufzufassen und auf ihre Beschränktheit hin zu untersuchen als Kriterium für BEK. Man nennt sie nun **Feynman-Zykel**.

- In den 1950ern führten BELJAVSKI, BOGOLJUBOV, GROSS, PITAEVSKI, HARTREE vereinfachte Modelle für **verdünnte interagierende Gase** ein. Die Interaktion wurde durch die **Streulänge** ausgedrückt, die freie Energie mit der **BORN-Approximation** angenähert.
- Die Spur des  **$N$ -Partikel-Hamiltonoperators** ( $\implies$  **später**) wurde in den 1950ern durch JEAN GINIBRE und RICHARD FEYNMAN in ein System von **interagierenden Brown'schen Bewegungen**, der **Feynman-Kac-Formel**, umgeformt.
- RICHARD FEYNMAN schlug 1953 vor, die durch die Symmetrisierung auftretenden **Brown'schen Zykel** im Bosegas ( $\implies$  **später**) als wichtigen Ordnungsparameter aufzufassen und auf ihre Beschränktheit hin zu untersuchen als Kriterium für BEK. Man nennt sie nun **Feynman-Zykel**.
- ANDRAS SÜTŐ zeigt 1993 und 2002, dass das Auftreten "langer Feynman-Zykel" im idealen Gas und in Mittelfeld-Approximationen charakteristisch ist für BEK.



- In den 1950ern führten BELJAVSKI, BOGOLJUBOV, GROSS, PITAEVSKI, HARTREE vereinfachte Modelle für **verdünnte interagierende Gase** ein. Die Interaktion wurde durch die **Streulänge** ausgedrückt, die freie Energie mit der **BORN-Approximation** angenähert.
- Die Spur des  **$N$ -Partikel-Hamiltonoperators** ( $\implies$  **später**) wurde in den 1950ern durch JEAN GINIBRE und RICHARD FEYNMAN in ein System von **interagierenden Brown'schen Bewegungen**, der **Feynman-Kac-Formel**, umgeformt.
- RICHARD FEYNMAN schlug 1953 vor, die durch die Symmetrisierung auftretenden **Brown'schen Zykel** im Bosegas ( $\implies$  **später**) als wichtigen Ordnungsparameter aufzufassen und auf ihre Beschränktheit hin zu untersuchen als Kriterium für BEK. Man nennt sie nun **Feynman-Zykel**.
- ANDRAS SÜTŐ zeigt 1993 und 2002, dass das Auftreten "langer Feynman-Zykel" im idealen Gas und in Mittelfeld-Approximationen charakteristisch ist für BEK.
- Der einzige bekannte Beweis für BEK in einem interagierenden Modell nutzt "harte" Abstoßung und Symmetrie in einem  $\mathbb{Z}^d$ -System aus (FREEMAN DYSON et al. 1978).

- Jagd nach experimenteller Realisierung ab 1985, als genügend tiefe Temperaturen in Reichweite gelangten. 1992 wurden  $10^{-6}$  Kelvin erreicht  $\implies$  Nobelpreis 1997.
- **Schwierigkeit:** Bei so tiefen Temperaturen ist fast **jeder Stoff fest** (nicht gasförmig).  
**Lösung:** stark verdünnen und schnell abkühlen, Partikel mit einer magnetischen Falle zusammenhalten.
- Der Gruppe von ERIC A. CORNELL und CARL E. WIEMAN gelang 1995 am *Joint Institute for Laboratory Astrophysics* in Boulder (USA) die BEK in einem Gas mit etwa 2000 Rubidium-Atomen bei einer Temperatur von etwa  $10^{-9}$  Kelvin (nach 15jähriger Suche). Sie vermuteten, dass dieser Zustand von Natur aus nirgends im Universum existiert haben kann.
- Vier Monate später gelang das auch der Gruppe um WOLFGANG KETTERLE am *Massachusetts Institute of Technology* mit Millionen Natriumatomen.
- Alle drei Wissenschaftler wurden für diese Leistung im Jahre 2001 mit dem **Nobelpreis für Physik** ausgezeichnet *für die Erzeugung der Bose–Einstein-Kondensation in verdünnten Gasen aus Alkaliatomen.*

Jedes Partikel hat **drei Attribute**:

- eine **kinetische Energie** (in Form des Laplace operators  $\Delta$ ),
- eine (weiche oder harte) **Falle** (z.B. in einer Box  $\Lambda$  im  $\mathbb{R}^d$ ),
- **Interaktionen** mit jedem anderen Partikel.

Man beschreibt das System mit Hilfe eines **Hamilton-Operators** für  $N$  Partikel an den Orten  $x_1, \dots, x_N$  in einer Box  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ , die paarweise über ein symmetrisches **Paarpotential**  $v: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$  interagieren:

$$\mathcal{H}_N^{(\Lambda)} = - \sum_{i=1}^N \Delta_i + \sum_{1 \leq i < j \leq N} v(x_i - x_j), \quad x_1, \dots, x_N \in \Lambda.$$

Jedes Partikel hat **drei Attribute**:

- eine **kinetische Energie** (in Form des Laplace operators  $\Delta$ ),
- eine (weiche oder harte) **Falle** (z.B. in einer Box  $\Lambda$  im  $\mathbb{R}^d$ ),
- **Interaktionen** mit jedem anderen Partikel.

Man beschreibt das System mit Hilfe eines **Hamilton-Operators** für  $N$  Partikel an den Orten  $x_1, \dots, x_N$  in einer Box  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ , die paarweise über ein symmetrisches **Paarpotential**  $v: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$  interagieren:

$$\mathcal{H}_N^{(\Lambda)} = - \sum_{i=1}^N \Delta_i + \sum_{1 \leq i < j \leq N} v(x_i - x_j), \quad x_1, \dots, x_N \in \Lambda.$$

- $\mathcal{H}_N^{(\Lambda)}$  wird angewendet auf **Wellenfunktionen**  $\phi: \Lambda^N \rightarrow \mathbb{R}$ .
- $|\phi(x_1, \dots, x_N)|^2 =$  Dichte der **Wahrscheinlichkeit für  $N$  Partikel** an den Orten  $x_1, \dots, x_N$ .
- $|\phi(x_1, \dots, x_N)|^2$  ist **symmetrisch** (= permutationsinvariant).
- **Bosonen-System** (Quantenmechanik!): Auch  $\phi(x_1, \dots, x_N)$  ist symmetrisch.

- Energie des Systems mit Verteilung  $|\phi|^2$ :

$$\langle \phi, \mathcal{H}_N^{(\Lambda)} \phi \rangle = \int_{\Lambda^N} \sum_{i=1}^N |\nabla_i \phi(\underline{x})|^2 d\underline{x} + \int_{\Lambda^N} \sum_{i < j} v(x_i - x_j) \phi(\underline{x})^2 d\underline{x}.$$

- **Energie** des Systems mit Verteilung  $|\phi|^2$ :

$$\langle \phi, \mathcal{H}_N^{(\Lambda)} \phi \rangle = \int_{\Lambda^N} \sum_{i=1}^N |\nabla_i \phi(\underline{x})|^2 d\underline{x} + \int_{\Lambda^N} \sum_{i < j} v(x_i - x_j) \phi(\underline{x})^2 d\underline{x}.$$



**Grundzustandsenergie**  $E_N(\Lambda) = \inf_{\phi \in H^1(\Lambda^N): \|\phi\|_2=1} \langle \phi, \mathcal{H}_N^{(\Lambda)} \phi \rangle;$

die minimierenden Wellenfunktionen  $\phi_*$  heißen **Grundzustände**.

- **BEK:** Kann man  $\phi_*^2$  für große  $N$  mit Hilfe einer Ein-Partikel-Wellenfunktion beschreiben?

- Energie des Systems mit Verteilung  $|\phi|^2$ :

$$\langle \phi, \mathcal{H}_N^{(\Lambda)} \phi \rangle = \int_{\Lambda^N} \sum_{i=1}^N |\nabla_i \phi(\underline{x})|^2 d\underline{x} + \int_{\Lambda^N} \sum_{i < j} v(x_i - x_j) \phi(\underline{x})^2 d\underline{x}.$$



Grundzustandsenergie  $E_N(\Lambda) = \inf_{\phi \in H^1(\Lambda^N): \|\phi\|_2=1} \langle \phi, \mathcal{H}_N^{(\Lambda)} \phi \rangle;$

die minimierenden Wellenfunktionen  $\phi_*$  heißen **Grundzustände**.

- **BEK:** Kann man  $\phi_*^2$  für große  $N$  mit Hilfe einer Ein-Partikel-Wellenfunktion beschreiben?
- Antwort **Ja** in einem **verdünnten System** ( $\implies$  1995er Experimente)  $\iff$  reskaliertes  $v$  (Analysis 1998-2005 durch ELLIOTT LIEB, JAKOB YNGVASON, ROBERT SEIRINGER):
- Konvergenz gegen **Gross-Pitaevski-Formel** in  $d = 3$  ( $\implies$  100 Prozent Kondensation):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} E_N(\Lambda) = \inf_{f \in H^1([-1,1]^3)} \left( \|\nabla f\|_2^2 + \|f\|_4^4 \right).$$

- Minimierer sind von der Form

$$\phi(x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N \left[ g \left( \min_{j < i} |x_j - x_i| \right) f(x_i) \right].$$

■ Hauptuntersuchungsobjekt:  
symmetrisierte Spur  $Z_N(\beta, \Lambda) = \text{Tr}_+(\exp\{-\beta\mathcal{H}_N^{(\Lambda)}\})$ .

■ Physik  $\iff$  Mathematik:

Temperatur  $\iff 1/\beta$

kinetische Energie  $\iff e^{\beta\Delta} \iff$  Brown'sche Bewegung auf  $[0, \beta]$

Interaktion  $\iff e^{-v(x_i - x_j)}$

Mittelung über zufällige Teilchen  $\iff$  Spur

Symmetrisierung  $\iff$  zufällige Permutation



■ Hauptuntersuchungsobjekt:  
 symmetrisierte Spur  $Z_N(\beta, \Lambda) = \text{Tr}_+ \left( \exp\{-\beta \mathcal{H}_N^{(\Lambda)}\} \right)$ .

■ Physik  $\iff$  Mathematik:

Temperatur  $\iff 1/\beta$

kinetische Energie  $\iff e^{\beta \Delta} \iff$  Brown'sche Bewegung auf  $[0, \beta]$

Interaktion  $\iff e^{-v(x_i - x_j)}$

Mittlung über zufällige Teilchen  $\iff$  Spur

Symmetrisierung  $\iff$  zufällige Permutation

■ Feynman–Kac formula:

$$Z_N(\beta, \Lambda) = \underbrace{\int_{\Lambda} dx_1 \cdots \int_{\Lambda} dx_N}_{N \text{ Punkte in } \Lambda} \underbrace{\frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N}}_{\text{zufällige Permutation}} \underbrace{\prod_{i=1}^N \mu_{x_i, x_{\sigma(i)}}^{(\beta)}}_{N \text{ Brown'sche Brücken}} \left[ \underbrace{e^{-\sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{\beta}(B^{(i)}, B^{(j)})}}_{\text{Interaktion}} \right].$$

- Hauptuntersuchungsobjekt:  
symmetrisierte Spur  $Z_N(\beta, \Lambda) = \text{Tr}_+(\exp\{-\beta\mathcal{H}_N^{(\Lambda)}\})$ .

- Physik  $\iff$  Mathematik:

Temperatur  $\iff 1/\beta$

kinetische Energie  $\iff e^{\beta\Delta} \iff$  Brown'sche Bewegung auf  $[0, \beta]$

Interaktion  $\iff e^{-v(x_i - x_j)}$

Mittelung über zufällige Teilchen  $\iff$  Spur

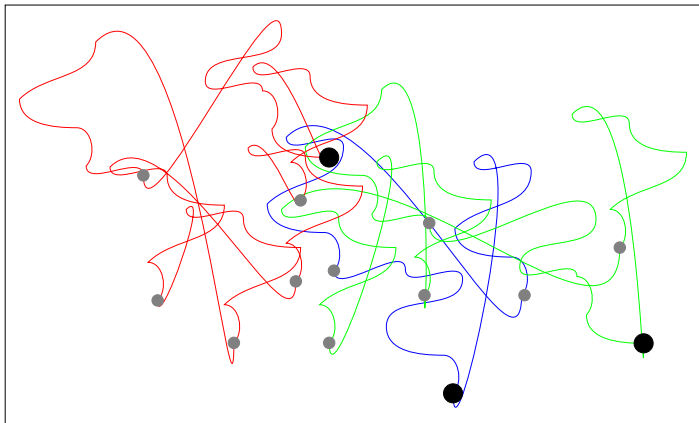
Symmetrisierung  $\iff$  zufällige Permutation

- Feynman–Kac formula:

$$Z_N(\beta, \Lambda) = \underbrace{\int_{\Lambda} dx_1 \cdots \int_{\Lambda} dx_N}_{N \text{ Punkte in } \Lambda} \underbrace{\frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N}}_{\text{zufällige Permutation}} \underbrace{\left( \bigotimes_{i=1}^N \mu_{x_i, x_{\sigma(i)}}^{(\beta)} \right)}_{N \text{ Brown'sche Brücken}} \left[ \underbrace{e^{-\sum_{1 \leq i < j \leq N} V_{\beta}(B^{(i)}, B^{(j)})}}_{\text{Interaktion}} \right].$$

- Freie Energie im thermodynamischen Grenzwert (d.h.  $|\Lambda_N| = N/\rho$ ):

$$f(\beta, \rho) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Lambda_N|} \log Z_N(\beta, \Lambda_N).$$

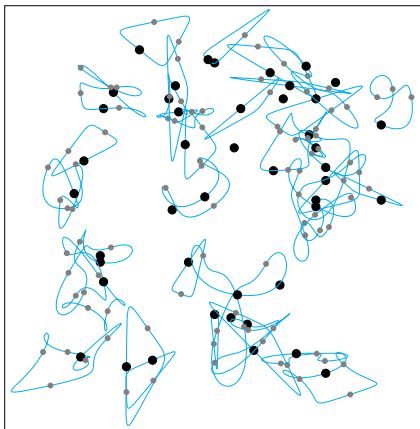


Ein Bosegas aus 14 Partikeln, aufgeteilt in drei Brown'sche Zykeln,  
angeheftet an drei Poisson'sche Punkte (dick).  
Der rote Zykel enthält sechs Partikel, der grüne und der blaue je vier.

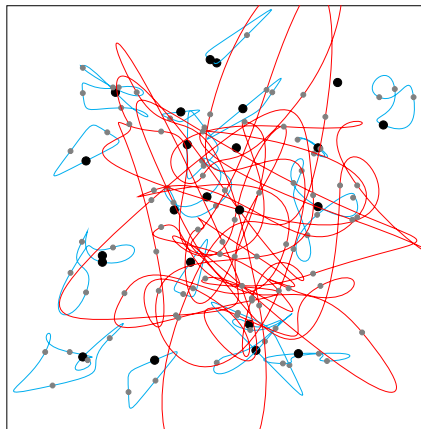
- Wir betrachten hier das **kanonische Ensemble**, wo die Zahl der Partikel  $N$  fest ist. Wenn  $N$  zufällig und Poisson-verteilt ist, spricht man vom **großkanonischen Ensemble**.
- Das interagierende Bosegas ist also ein **Ensemble von interagierenden Brown'schen Schlingen** verschiedener Länge in einer großen Box. Eine Schlinge der Länge  $k$  (d. h. mit Zeitintervall  $[0, \beta k]$ ) hat genau  $k$  Partikel. Insgesamt gibt es  $N = \sum_{k \in \mathbb{N}} k N_k$  Partikel (wenn  $N_k$  die Anzahl der Schlingen der Länge  $k$  ist).
- Eine natürliche Formulierung ist als ein **zufälliger Punktprozess** mit interagierenden Schlingen.

**BEK-Frage:** Liegt ein makroskopischer Teil der  $N$  Partikel in "langen" Schlingen?

**Vermutete Antwort:** Ja in drei oder mehr Dimensionen, nein in einer oder zwei Dimensionen.



Subkritisches Bosegas  
(kleine Partikeldichte)  
ohne Kondensat



Superkritisches Bosegas  
(große Partikeldichte)  
mit zusätzlichem Kondensat (rot)

- Kein Raum, keine Box  $\Lambda$ .
- Keine Positionen  $x_1, \dots, x_N$  der Partikel.
- Keine Brown'sche Bewegungen.
- **Aber:** Statistik der Zykellängen.

- Kein Raum, keine Box  $\Lambda$ .
- Keine Positionen  $x_1, \dots, x_N$  der Partikel.
- Keine Brown'sche Bewegungen.
- **Aber:** Statistik der Zykellängen.

Referenz-Dichte der Zykellängen:  $q_k = \frac{1}{k} (4\pi\beta k)^{-d/2}$ .

Effektive Zykellängendichte:  $m_k$ . Partikeldichte:  $\sum_{k \in \mathbb{N}} k m_k$ .

Entropie:  $H(m|q) = \sum_k (q_k - m_k + m_k \log \frac{m_k}{q_k})$ .

$$\text{freie Energie: } f(\beta, \rho) = \inf \left\{ H(m|q) : m \in [0, \infty)^{\mathbb{N}}, \sum_{k \in \mathbb{N}} k m_k = \rho \right\},$$

## Der freie (= nichtinteragierende) Fall $v \equiv 0$

- Kein Raum, keine Box  $\Lambda$ .
- Keine Positionen  $x_1, \dots, x_N$  der Partikel.
- Keine Brown'sche Bewegungen.
- **Aber:** Statistik der Zykellängen.

Referenz-Dichte der Zykellängen:  $q_k = \frac{1}{k} (4\pi\beta k)^{-d/2}$ .

Effektive Zykellängendichte:  $m_k$ . Partikeldichte:  $\sum_{k \in \mathbb{N}} k m_k$ .

Entropie:  $H(m|q) = \sum_k (q_k - m_k + m_k \log \frac{m_k}{q_k})$ .

$$\text{freie Energie: } f(\beta, \rho) = \inf \left\{ H(m|q) : m \in [0, \infty)^{\mathbb{N}}, \sum_{k \in \mathbb{N}} k m_k = \rho \right\},$$

**BEK-Frage:** Gibt es ein minimierendes  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ?



- Kein Raum, keine Box  $\Lambda$ .
- Keine Positionen  $x_1, \dots, x_N$  der Partikel.
- Keine Brown'sche Bewegungen.
- **Aber:** Statistik der Zykellängen.

Referenz-Dichte der Zykellängen:  $q_k = \frac{1}{k} (4\pi\beta k)^{-d/2}$ .

Effektive Zykellängendichte:  $m_k$ . Partikeldichte:  $\sum_{k \in \mathbb{N}} k m_k$ .

Entropie:  $H(m|q) = \sum_k (q_k - m_k + m_k \log \frac{m_k}{q_k})$ .

$$\text{freie Energie: } f(\beta, \rho) = \inf \left\{ H(m|q) : m \in [0, \infty)^{\mathbb{N}}, \sum_{k \in \mathbb{N}} k m_k = \rho \right\},$$

**BEK-Frage:** Gibt es ein minimierendes  $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ?

**Euler-Lagrange-Gleichung:**  $m_k = q_k e^{\alpha k}$  für  $k \in \mathbb{N}$  mit dem Lagrange-Multiplikator  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**Kritische** (= größte erreichbare) Partikeldichte:

$$\rho_c(\beta) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k q_k = (4\pi\beta)^{-d/2} \sum_{k \in \mathbb{N}} k^{-d/2} \begin{cases} = \infty & \text{if } d \leq 2, \\ < \infty & \text{if } d \geq 3. \end{cases}$$

$\implies$  Phasenübergang in  $d \geq 3$ , aber nicht in  $d \leq 2$ .

- Ein Beweis für den Phasenübergang ist weithin offen und wird als sehr tieflegend eingeschätzt.
- Viele vereinfachte Modelle und Regimes konnten erfolgreich behandelt werden.
- Die Feynman–Kac-Formel ist bei weitem nicht der einzige Ansatz.
- Interagierende Brown'sche Zykel forderten viel probabilistische Forschung heraus und werden das auch weiterhin tun.
- Experimentell konnte man bisher BEK nicht bei wesentlich höheren Temperaturen erhalten, aber für viel mehr verschiedene Substanzen.
- Anwendungen sind nicht in Sicht, aber BEK ist faszinierend!