Kapitel 7

Maximumprinzip für elliptische Gleichungen

In diesem Kapitel wird das Maximumprinzip für allgemeinere Gleichungen als die Laplace–Gleichung untersucht.

Wir betrachten den Operator $L \; : \; H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definiert durch

$$Lu(\mathbf{x}) = -\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(\mathbf{x})\partial_i\partial_j u(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{d} b_i(\mathbf{x})\partial_i u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}). \qquad (7.1)$$

Man beachte, dass der Diffusionsterm diesmal nicht in Divergenzform geschrieben ist. Es wird wiederum die gleichmäßige Elliptiziät vorausgesetzt: es gibt ein $\gamma > 0$, so dass gilt

$$\boldsymbol{\xi}^T A(\mathbf{x})\boldsymbol{\xi} \geq \gamma \left\|\boldsymbol{\xi}\right\|_2^2 \quad \forall\; \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} \in \Omega.$$

Alle Koeffizientenfunktionen seien stetig auf Ω und $A(\mathbf{x})$ sei symmetrisch.

Zuerst wollen wir das schwache Maximumprinzip beweisen. Dieses erlaubt noch innere lokale Maxima.

Satz 7.1 Schwaches Maximumprinzip. *Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und gelte in L dass $c(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$. Falls $Lu \leq 0$ und $m := \max_{\mathbf{x}\in\partial\Omega} u(\mathbf{x}) \geq 0$, so gilt*

$$\max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u(\mathbf{x}) = m.$$

Beweis: Es wird ein zunächst ein indirekter Beweis durchgeführt. Wir nehmen also an, dass es ein $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ so gibt, dass u in $\mathbf{x}_0$ ein lokales Maximum besitzt und $u(\mathbf{x}_0) > m$.

1) Zuerst wird der Fall $Lu(\mathbf{x}) < 0$ betrachtet. Wir wählen eine orthonormale Basis $V = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d)$ des $\mathbb{R}^d$, so dass $A(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k$, also

$$V^T A(\mathbf{x}_0) V = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) =: \Lambda.$$

Damit ist $A = V\Lambda V^T$ oder $a_{ij} = \sum_{k=1}^d v_{ik}\lambda_k v_{jk}$. Da u in $\mathbf{x}_0$ ein lokales Maximum besitzt und $\lambda_k > 0$, $k = 1, \ldots, d$, gilt

$$\begin{aligned}
c(\mathbf{x}_0)u(\mathbf{x}_0) &\geq c(\mathbf{x}_0)m \geq 0,\\
b_i(\mathbf{x}_0)\partial_i u_0 &= 0 \quad i = 1, \ldots, d,\\
-\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(\mathbf{x}_0)\partial_i\partial_j u(\mathbf{x}_0) &= -\sum_{i,j,k=1}^{d} v_{ik}\lambda_k v_{jk}\partial_i\partial_j u(\mathbf{x}_0) = -\sum_{k=1}^{d} \lambda_k \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{v}_k^2}(\mathbf{x}_0) \geq 0.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also $Lu(\mathbf{x}_0) \geq 0$, was ein Widerspruch ist.

2) Nun wird der allgemeine Fall $Lu(\mathbf{x}_0) \leq 0$ untersucht. Dafür wird die Funktion

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) + \varepsilon e^{\mu \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}}, \quad \varepsilon > 0$$

betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned} Lu_\varepsilon(\mathbf{x}_0) &= Lu(\mathbf{x}_0) + \varepsilon L\left(e^{\mu \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_0}\right) \leq \varepsilon e^{\mu \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{x}_0} \left(-\mu^2 \mathbf{v}_1 A(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_1 + c\right) \\ &= \varepsilon e^{\mu \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_0} \left(-\mu^2 \lambda_1 + \mu \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_1 + c\right). \end{aligned}$$

Für großes μ ist dieser Ausdruck überall negativ (unabhängig von ε), also gilt dann $Lu_\varepsilon < 0$. Das Maximum auf dem Rand m_ε der Funktion u_ε ist nichtnegativ (nach Konstruktion). Nach dem ersten Teil des Beweises gilt

$$\max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u_\varepsilon(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} u_\varepsilon(\mathbf{x})$$

für alle $\varepsilon > 0$ und ein festgewähltes großes μ. Die Betrachtung von $\varepsilon \to 0$ liefert das gewünschte Ergebnis. ■

Für das starke Maximumprinzip beweisen wir vorher ein Lemma.

Lemma 7.2 Lemma von Hopf[1]**.** *Sei $B \subset \mathbb{R}^d$ eine Kugel und $u \in C^2(B) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit $Lu \leq 0$, $c(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$. Falls für einen Randpunkt $\mathbf{x} \in \partial B$ gilt*

$$u(\mathbf{x}) \geq 0, \quad u(\mathbf{y}) < u(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{y} \in B,$$

dann gilt für den Einheits–Außennormalenvektor $\mathbf{n}$ an ∂B auch $\nabla u \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) > 0$.

Beweis: Die Eigenschaft $\nabla u \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \geq 0$ folgt aus der Maximalität von u an der Stelle $\mathbf{x}$. Wichtig ist die strikte Ungleichung.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $B = B(\mathbf{0}, r)$. Für $\mu > 0$ betrachten wir die Funktion

$$v(\mathbf{x}) := e^{-\mu \|\mathbf{x}\|_2^2} - e^{-\mu r^2} \geq 0.$$

Es gilt *Übungsaufgabe*

$$\begin{aligned} Lv(\mathbf{x}) &= e^{-\mu \|\mathbf{x}\|_2^2} \left[\sum_{i,j=1}^{d} \left(-4\mu^2 a_{ij}(\mathbf{x}) x_i x_j - 2\mu a_{ij}(\mathbf{x}) \delta_{ij}\right) + \mu \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} + c(\mathbf{x}) \right] \\ &\quad -c(\mathbf{x}) e^{-\mu r^2}. \end{aligned}$$

Für hinreichend große μ ist dies für $\|\mathbf{x}\|_2 > r/2$ negativ, also $Lv < 0$ auf $B(\mathbf{0}, r) \setminus B(\mathbf{0}, r/2)$.

Nun wird die Funktion $w(\mathbf{y}) := u(y) + \varepsilon v(\mathbf{y})$ betrachtet. Wegen $Lw \leq 0$ auf $B(\mathbf{0}, r) \setminus B(\mathbf{0}, r/2)$ kann man das schwache Maximumprinzip anwenden. Auf $\partial B(\mathbf{0}, r)$ gilt $w(\mathbf{y}) = u(\mathbf{y})$, da v auf dem Rand von $B(\mathbf{0}, r)$ verschwindet. Also ist das Maximum von w auf $\partial B(\mathbf{0}, r)$ der Wert $u(\mathbf{x}) \geq 0$. Auf $\partial B(\mathbf{0}, r/2)$ gilt nach den Eigenschaften von u, das $w(\mathbf{y}) = u(\mathbf{y}) + \varepsilon v(\mathbf{y}) \leq u(\mathbf{x})$ falls ε hinreichend klein gewählt wird. Nach dem schwachen Maximumprinzip folgt $w \leq u(\mathbf{x})$ auf $B(\mathbf{0}, r) \setminus B(\mathbf{0}, r/2)$. Wegen der Differnzierbarkeit folgt $\nabla w \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \geq 0$, also

$$\nabla u \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \nabla w \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \varepsilon \nabla v \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \geq 0 + 2\varepsilon \mu r e^{-\mu r^2} > 0.$$

Damit ist die strikte Ungleichung gezeigt. ■

[1] Hopf

Satz 7.3 Starkes Maximumprinzip. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *zusammenhängend und* L *definiert in (7.1) mit* $c(\mathbf{x}) > 0$ *für alle* $\mathbf{x} \in \Omega$*. Dann gilt für* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *mit* $Lu \leq 0$ *und*

$$u(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u(\mathbf{x}) \geq 0$$

für ein $\mathbf{y} \in \Omega$*, dass* u *konstant ist.*

Beweis: Seien $M := \max_{\mathbf{x}\in\overline{\Omega}} u(\mathbf{x})$ und

$$\Sigma := \{\mathbf{x} \in \Omega \ : \ u(\mathbf{x}) = M\}.$$

Man muss zeigen, dass $\Sigma = \Omega$ gilt. Angenommen, das gelte nicht. Dann kann man ein $\mathbf{z} \in \Omega\backslash\Sigma$ so wählen, dass $r := \text{dist}(\mathbf{z}, \Sigma) < \text{dist}(\mathbf{z}, \partial\Omega)$. Die Kugel $B(\mathbf{z}, r)$ ist dann kompakt (mit ihrem Rand) in Ω enthalten. In dieser Kugel gilt $Lu \leq 0$ und, wenn man sich auf $\overline{B}(\mathbf{z}, r)$ einschränkt, nimmt u sein Maximum in einem Randpunkt $\mathbf{x} \in \partial B(\mathbf{z}, r)$ an und es gilt $u(\mathbf{x}) = M$ nach Konstruktion der Kugel. Nach Lemma 7.2 folgt, dass in dieser Situation $\nabla u \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) > 0$ gilt, wobei $\mathbf{n}$ die Einheits–Außennormale an $\partial B(\mathbf{z}, r)$ im Punkte $\mathbf{x}$ ist. Das heißt, die Funktion steigt in $\mathbf{x}$ in Richtung der Außennormale an. Dies steht aber im Widerspruch zur Maximalität $u(\mathbf{x}) = M$. ■