Kapitel 1

Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt wird exemplarisch gezeigt, dass man physikalische Gesetze und Prinzipien mit partiellen Differentialgleichungen beschreiben kann.

Wir betrachten die Ausbreitung von Wärme in einem Körper. Wird beispielsweise ein Metallkörper am Rand zeitlich konstant beheizt, so beobachtet man, dass sich nach einer gewissen Zeit eine feste Temperaturverteilung innerhalb des Körpers ausbildet. Die Aufgabe besteht nun darin, diesen Prozess zu modellieren, das heißt, ihn mit Gleichungen (oder auch Ungleichungen) zu beschreiben.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ das Gebiet, welches der Metallkörper einnimmt. Die unbekannte Temperaturverteilung, die jedem Punkt des Körpers seine Temperatur zuordnet, wird mit u bezeichnet, $u : \Omega \to \mathbb{R}$. Zusätzlich wird der Wärmestrom $\mathbf{j} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eingeführt, der für jeden Raumpunkt $\mathbf{x} \in \Omega$ angibt, in welche Richtung und wieviel Wärmeenergie transportiert wird.

Im Gedankenexperiment betrachten wir ein beliebiges Volumen $V \subset \Omega$. Wenn man lange genug wartet, ändert sich die Wärmeverteilung in V nicht mehr. In diesem Fall darf nur soviel Wärme in V hinein transportiert werden, wie auch heraus transportiert wird, da sonst die Temperatur steigen oder fallen würde. Sei $\mathbf{n}$ der Einheits–Normalenvektor an den Rand ∂V von V, dann muss also gelten

$$\int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{s} = 0.$$

Mit dem Gaußschen[1] Satz (partielle Integration) kann man diese Beziehung wie folgt äquivalent schreiben

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} \, d\mathbf{x} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, d\mathbf{s} = 0.$$

Da das Volumen beliebig war, verschwindet der Integrand im Volumenintegral und es gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{1.1}$$

Nun wird eine Abhängigkeit zwischen $\mathbf{j}$ und u benötigt. Diese erhält man durch Beobachtungen, Auswertung von Experimenten und anschließende Modellierung. Die einfachste Abhängigkeit im Falle der Wärmeausbreitung ist das sogenannte Fourier[2]–Gesetz:

[1] Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)
[2] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830)

Man nimmt an, dass die Wärme immer vom warmen zum kalten Bereich strömt und dass die Geschwindigkeit proportional zum Temperaturunterschied ist.

Der erste Teil entspricht dem gesunden Menschenverstand. Der zweite Teil postuliert den linearen Zusammenhang

$$\mathbf{j} = -a\nabla u, \tag{1.2}$$

wobei $a > 0$ die Wärmeleitfähigkeit des Materials beschreibt.

Wir nehmen an, dass das Material homogen ist und damit a eine Konstante ist. Setzt man (1.2) in (1.1) ein, so erhält man die sogenannte Laplace[3]–Gleichung

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{1.3}$$

Dabei bezeichnet Δ den Laplace–Operator in d–Dimensionen

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^{d} \partial_i^2.$$

Die Lösungen der Laplace–Gleichung heißen harmonische Funktionen.

Falls die Leitfähigkeit vom Raumpunkt abhängt, also $a = a(\mathbf{x})$, dann bleibt er in der Gleichung erhalten und man erhält durch Einsetzen in (1.1)

$$-\nabla \cdot (a\nabla u)\, u = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{1.4}$$

Falls es Wärmequellen innerhalb des Körpers gibt, die in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ die Wärmemenge $f(\mathbf{x})$ erzeugen (oder absorbieren), dann hat man statt (1.4) die Gleichung

$$-\nabla \cdot (a\nabla u)\, u = f \quad \text{in } \Omega. \tag{1.5}$$

Im Fall $a = 1$ ist das die sogenannte Poisson[4]–Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega. \tag{1.6}$$

Falls man eine instationäre, das heißt zeitlich veränderliche Situation betrachtet, dann ist der Wärmestrom nach V im allgemeinen nicht Null, sondern er bewirkt eine Änderung der Temperatur in V

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t}\, d\mathbf{x} = \int_V \partial_t u \; d\mathbf{x}.$$

Mit der gleichen Argumentation und unter den gleichen Annahmen wie oben, erhält man die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{1.7}$$

Um die Temperaturverteilung im Inneren des Körpers zu kennen, muss man 'nur' die Gleichung (1.3) lösen. Dabei muss man zudem Bedingungen am Rand des Körpers (Randbedingungen) beachten. Die hergeleiteten Modelle (1.3) – (1.7) nennt man partielle Differentialgleichungen weil in ihnen partielle Ableitungen (in unterschiedliche Richtungen) vorkommen (im Unterschied zu gewöhnlichen Differentialgleichungen, bei denen nur Ableitungen in eine Richtung vorkommen).

Die oben beschriebenen Phänomene waren eine Energieerhaltung in (1.1) und eine lineare Beziehung zwischen Strom und u–Gradient in (1.2). Man kann mit Gleichungen vom Typ (1.1) auch die Erhaltung anderer Größen wie Masse, Ladung oder Impuls beschreiben. Ansätze der Form (1.2) hat man auch in anderen physikalischen Prozessen:

[3] Pierre Simon Laplace (1749 – 1829)

[4] Siméon Denis Poisson (1781 – 1840)

Bedeutung von u	Name für Gesetz (1.2)
Temperatur	Fourier–Gesetz
chemische Konzentration	Fick[5]'sches Diffusionsgesetz
elektrostatisches Potential	Ohm[6]'sches Gesetz
Flüssigkeitsdruck	Darcy[7]–Gesetz
Deformation	Hooke[8]'sches Gesetz

Für all diese Prozesse erhält man letztlich Modelle der Form (1.3), (1.6) oder (1.7).

Die Bedeutung partieller Differentialgleichungen resultiert daher, dass man sehr viele Vorgänge in der Natur, aber auch Prozesse in Industrie und Wirtschaft, mit Hilfe solcher Gleichungen beschreiben kann, zum Beispiel:

- Elektrostatik, elektromagnetische Wellen (Maxwell[10]–Gleichung),
- Elastizität (Kräfte in Werkstoffen), Plastizität,
- Strömungen von Flüssigkeiten (Navier[11]–Stokes[12]–Gleichungen),
- Ausbreitung von Schall (Helmholtz[13]–Gleichungen),
- Verbrennungsvorgänge (Reaktions–Diffusions–Gleichungen),
- Populationsdynamiken in der Biologie und chemischen Prozessen,
- elektro–chemische Vorgänge (z.B. Nervenreizleitung),
- Optionspreise in der Finanzmathematik.

Fragestellungen, die aus mathematischer Sicht untersucht werden müssen, beinhalten:

- Was sind geeignete Lösungsbegriffe für gewisse Klassen partieller Differentialgleichungen?
- Existieren Lösungen?
- Sind Lösungen eindeutig?
- Welche Glattheitseigenschaften hat die Lösungen (in welchem Funktionenraum liegt sie)?
- Welche anderen charakteristischen Eigenschaften besitzt die Lösung?
- Wie konstruiert man numerische Verfahren zur Approximation der Lösung?
- Wie groß ist der Fehler, den man bei diesen numerischen Verfahren begeht?

Die Existenz, Eindeutigkeit, Regularität und die Eigenschaften, werden im ersten Teil der Vorlesung behandelt. Wir werden sehen, dass man die Lösung von partiellen Differentialgleichungen im allgemeinen nicht in geschlossener Form angeben kann. Um eine Vorstellung von der Lösung zu bekommen, ist man auf numerische Verfahren angewiesen. Wichtige numerische Verfahren sind Thema des zweiten Teils der Vorlesung.

1.1 Literatur

Zur Theorie partieller Differentialgleichungen:

- H.–W. Alt: Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung. 3. Auflage. Springer–Lehrbuch, 1999, [Alt99],
- E. DiBenedetto: Partial Differential Equations. Birkhäuser 1995, [DiB95].
- L.C. Evans: Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics No. 19, AMS 1998, [Eva98],

[5] Adolf Eugen Fick (1829 – 1901)
[6] Georg Simon Ohm (1789 – 1854)
[7] Henry Philibert Gaspard Darcy (1803 – 1858)
[8] Robert Hooke (1635 – 1703)
[10] James Clerk Maxwell (1831 – 1879)
[11] Claude Louis Marie Henri Navier (1785 – 1836)
[12] George Gabriel Stokes (1819 – 1903)
[13] Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821 – 1894)

- D. Gilbarg und N.S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Classics in Mathematics. Springer 2001, [GT01].
- J. Jost. Partielle Differentialgleichungen. Springer 1998, [Jos98]. Englische Version 2002.
- M. Renardy und R. Rogers: An introduction to partial differentiall equations. Texts in Applied Mathematics 13. Springer 1996, [RR96].

Zur Numerik partieller Differentialgleichungen:

-