FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 10.01.2007

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Serie 11

abzugeben vor der Vorlesung am 18.01.2007

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Aufgabe:
   Man zeige, dass der Vektor
   $$\begin{aligned} v_k &= \begin{pmatrix} v_{k,0}, & \cdots & , v_{k,n} \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \\ v_{k,0} = v_{k,n} &= 0, \quad v_{k,i} = \sqrt{2}\sin(\pi\, k\, x_i) \end{aligned}$$
   eine nichttriviale Lösung der Eigenwertaufgabe
   $$v_{k,i-1} + \left(\lambda_k h^2 - 2\right) v_{k,i} + v_{k,i+1} = 0$$
   mit
   $$\lambda_k = \frac{2}{h^2}\left(1 - \cos(\pi\, k\, h)\right)$$
   ist.

2. Aufgabe:
   Seien
   $$L_x := \partial_x^2 u, \quad L_y := \partial_y^2 u, \quad L_x L_y = \partial_x^2 \partial_y^2 u.$$
   Es seien die Bezeichnungen für das Dirichlet–Problem im Rechteck verwendet. Von welcher Ordnung ist die Differenzenapproximation
   $$\begin{aligned} \Lambda_x \Lambda_y u \quad = \quad & \frac{1}{h^2 h^2}\Big(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} - 2u_{i+1,j} + 4u_{ij} \\ & -2u_{i-1,j} + u_{i+1,j-1} - 2u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1} \Big) \end{aligned}$$
   an diesen Operator?

3. Sei $\Lambda u = \Lambda_x u + \Lambda_y u$ der übliche 5–Punkte–Stern. Von welcher Ordnung approximiert die Differenzengleichung
   $$-\left(\Lambda + \frac{h^2}{6}\Lambda_x \Lambda_y\right) u = \left(f + \frac{h^2}{12} L_x f + \frac{h^2}{12} L_y f\right)$$
   die Poisson–Gleichung?