FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 13.12.2006

Übungsaufgaben zur Vorlesung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Serie 09

abzugeben vor der Vorlesung am 22.12.2006

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Aufgabe:
   Man zeige, dass
   $$\Phi(\mathbf{x},t) := \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\|\mathbf{x}\|_2^2/(4t)} & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
   die homogene Wärmeleitungsgleichung im Ganzraum für $t > 0$ löst.

2. Aufgabe:
   Man beweise das starke Maximumprinzip für die homogene Wärmeleitungsgleichung im Ganzraum (Lemma 8.7).

3. Aufgabe:
   Man zeige
   $$v_{\mathring{x},i} = \frac{1}{2}\left(v_{x,i} + v_{\bar{x},i}\right), \qquad v_{\bar{x}x,i} = \left(v_{\bar{x},i}\right)_{x,i}.$$
   Man beweise, mit Hilfe der Taylor-Entwicklung für $v(x)$ an der Stelle x_i, die folgenden Beziehungen
   $$\begin{aligned} v_{\mathring{x},i} &= v'(x_i) + \mathcal{O}\left(h^2\right), \\ v_{\bar{x}x,i} &= v''(x_i) + \mathcal{O}\left(h^2\right). \end{aligned}$$

4. Aufgabe:
   Diese Aufgabe ist erst bis zum 11.01.2007 zu erledigen.
   Man schreibe ein MATLAB–Programm zur Lösung der eindimensionalen Poisson–Gleichung
   $$\begin{aligned} -u'' &= f \quad \text{in } (0,1), \\ u(0) &= a, \\ u(1) &= b \end{aligned}$$
   mit der Standard–Finite–Differenzen–Methode. Dabei sei f eine gegebene Funktion und a und b gegebene Zahlen. Bei diesem Programm soll das Intervall in n gleichlange Teilintervalle zerlegt werden. Die zweite Ableitung wird durch den zentralen Differenzenquotienten approximiert. Die Systemmatrix soll im `sparse`–Format gespeichert werden.

Als Testproblem wähle man die vorgegebene Lösung

$$u = \sin(5x)x^4.$$

Man berechne den Fehler in der Maximumnorm und der Euklidischen Norm der berechneten Gitterfunktion für die Anzahl der Teilintervalle

$$n \in \{8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}.$$