

Theorie und Numerik Gewöhnlicher  
Differentialgleichungen

Volker John

Wintersemester 2008/09

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>I</b>	<b>Theorie Gewöhnlicher Differentialgleichungen</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Grundbegriffe, Integrierbare Typen von Gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung</b>	<b>8</b>
2.1	Definitionen und Beispiele . . . . .	8
2.2	Gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen . . . . .	10
2.3	Homogene Differentialgleichungen . . . . .	13
2.4	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	16
2.5	Die Bernoullische Differentialgleichung . . . . .	20
2.6	Die Riccatische Differentialgleichung . . . . .	22
2.7	Die exakte Differentialgleichung . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssätze</b>	<b>29</b>
3.1	Allgemeines . . . . .	29
3.2	Der Satz von Picard–Lindelöf . . . . .	30
3.3	Der Existenzsatz von Peano . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung</b>	<b>44</b>
4.1	Definition, Zusammenhang zu Systemen 1. Ordnung . . . . .	44
4.2	Lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung . . . . .	46
4.3	Lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	50
4.3.1	Die homogene Gleichung . . . . .	50
4.3.2	Die inhomogene Gleichung . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Lineare Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung</b>	<b>56</b>
5.1	Definition, Existenz und Eindeutigkeit der Lösung . . . . .	56
5.2	Lösung des homogenen Systems . . . . .	57
5.3	Lineare Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Lineare Randwertprobleme 2. Ordnung</b>	<b>62</b>
<b>II</b>	<b>Numerik Gewöhnlicher Differentialgleichungen</b>	<b>69</b>
<b>7</b>	<b>Einführung</b>	<b>70</b>

<b>8</b>	<b>Einschrittverfahren</b>	<b>74</b>
8.1	Allgemeines . . . . .	74
8.2	Konsistenz und Konvergenz expliziter Einschrittverfahren . . . . .	75
8.3	Runge–Kutta–Verfahren . . . . .	78
8.3.1	Explizite Runge–Kutta–Verfahren . . . . .	79
8.3.2	Implizite Runge–Kutta–Verfahren . . . . .	83
8.3.3	Lineare Stabilitätstheorie . . . . .	85
8.3.4	Schrittweitensteuerung . . . . .	88
<b>9</b>	<b>Mehrschrittverfahren</b>	<b>94</b>
9.1	Allgemeines . . . . .	94
9.2	Prediktor–Korrektor–Verfahren . . . . .	94
9.3	Konvergenz von Mehrschrittverfahren . . . . .	98
<b>10</b>	<b>Systeme von Differentialgleichungen</b>	<b>107</b>
10.1	Lineare Stabilitätstheorie . . . . .	107
10.2	Rosenbrock–Verfahren . . . . .	109

# Kapitel 1

## Einleitung

Gewöhnliche Differentialgleichungen sind Gleichungen, bei denen eine skalare Funktion einer skalaren Variablen  $y(x)$  gesucht ist, welche eine Gleichung der Form

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (1.1)$$

erfüllt. Differentialgleichung erhält man bei der Modellierung von Prozessen aus der Natur und der Wirtschaft.

**Beispiel 1.1 Die Schwingungsdifferentialgleichung.** Wir betrachten eine Federschwingung. **Bild** Es bezeichne

- $t$  – Zeit,
- $y(t)$  – Ort,
- $y'(t)$  – Geschwindigkeit,
- $y''(t)$  – Beschleunigung,
- $y_0$  – Ursprungslage der Feder, Nullpunkt des Koordinatensystems  $y = 0$ .

Aus dem Newton<sup>1</sup>schen Gesetz  $F = ma$  folgt mit  $m = 1$ ,  $a = y''(t)$  der Federkonstanten  $\beta > 0$  und der Reibungskonstanten  $\alpha > 0$

$$y''(t) = \underbrace{-\beta y(t)}_{\text{Rückstellkraft}} \underbrace{-\alpha y'(t)}_{\text{Reibungskraft}} \underbrace{+g(t)}_{\text{äußere Kraft}} \quad (1.2)$$

Das ist die Schwingungsdifferentialgleichung. Wir betrachten (1.2) im Fall  $g(t) = 0$ .

Bei der Federschwingung sind zwei grundsätzlich unterschiedliche Situationen möglich:

1. Die Reibungskraft ist groß im Vergleich zur Federkraft. Dann wird die Feder nicht wirklich schwingen, sondern sich einfach in ihre Ursprungslage  $y_0$  zurückbegeben.
2. Die Reibungskraft ist klein im Vergleich zur Federkraft. Dann wird man ein (gedämpfte) Schwingung erhalten.

*1. Fall: große Reibungskraft im Vergleich zur Federkraft.* Man macht den Ansatz für eine exponentiell abklingende Funktion

$$y(t) = ae^{bt}, \quad b < 0, \quad a \neq 0.$$

Einsetzen dieses Ansatzes in (1.2) ergibt

$$ab^2 e^{bt} = -\beta a e^{bt} - \alpha a b e^{bt} = -a(\beta + \alpha b) e^{bt}.$$

---

<sup>1</sup>Isaac Newton (1642 – 1727)

Diese Gleichung ist genau dann erfüllt, falls

$$b^2 = -(\beta + \alpha b) \iff b_{1,2} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta}.$$

Da  $b$  reell sein soll, erhält man damit eine mathematische Bedingung dafür, dass die Reibungskraft groß im Vergleich zur Federkraft ist:

$$\frac{\alpha^2}{4} \geq \beta.$$

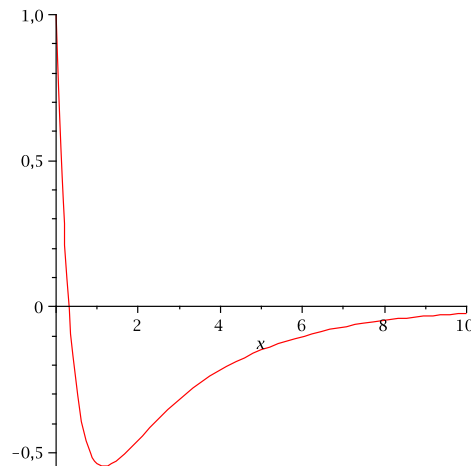
Im Fall, dass die Gleichheit in dieser Beziehung nicht gilt, erhält man zwei negative Lösungen für  $b$  und man rechnet leicht nach, dass jede Linearkombination eine Lösung von (1.2) ist

$$y(t) = a_1 e^{b_1 t} + a_2 e^{b_2 t}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Diese Kurve besitzt höchstens eine Nullstelle. Umstellen der Nullstellengleichung ergibt

$$1 = -\frac{a_2}{a_1} e^{(b_2 - b_1)t}, \quad a_1 \neq 0.$$

Wegen der strengen Monotonie der Exponentialfunktion kann es höchstens einen Wert  $t$  geben, der diese Gleichung erfüllt. Im Bild ist eine mögliche Lösung dargestellt:  $\alpha = 3, \beta = 1, a_1 = -1, a_2 = 2$ .



Im Fall der Gleichheit  $\alpha^2/4 = \beta$  kann man nachrechnen, dass neben  $e^{-\alpha/2 t}$  auch  $t e^{-\alpha/2 t}$  eine Lösung von (1.2) ist und die allgemeine Lösung hat die Gestalt

$$y(t) = (a_1 + a_2 t) e^{-\alpha/2 t}, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

Beide Fälle werden als aperiodischer Kriechfall bezeichnet.

*2. Fall: kleine Reibungskraft im Vergleich zur Federkraft.* In diesem Fall wird man eine gedämpfte Schwingung erwarten. Die Dämpfung kann man wieder mit einer Exponentialfunktion beschreiben und die Schwingung mit einer Winkelfunktion. Ein geeigneter Ansatz ist

$$y(t) = e^{at} (c_1 \cos(bt) + c_2 \sin(bt)), \quad a < 0, b \neq 0.$$

Wir schreiben diesen Ansatz zunächst in anderer Form. Seien  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $A \in \mathbb{R}^+$ . Setzt man  $c_1 = A \cos \lambda$ ,  $c_2 = A \sin \lambda$ , so erhält man

$$y(t) = A e^{at} (\cos \lambda \cos(bt) + \sin \lambda \sin(bt)) = A e^{at} \cos(bt - \lambda).$$

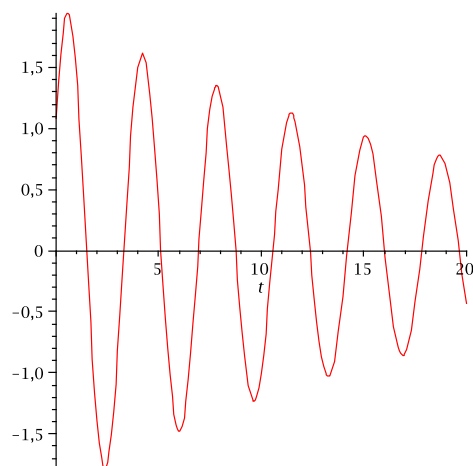
Einsetzen in (1.2) liefert

$$Ae^{at} \left( (a^2 - b^2 + \alpha a + \beta) \cos(bt - \lambda) - b(2a + \alpha) \sin(bt - \lambda) \right) = 0.$$

Das ist erfüllt, wenn der letzte Faktor verschwindet, also wenn

$$a = -\frac{\alpha}{2}, \quad b = \pm \sqrt{a^2 + \alpha a + \beta} = \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \frac{\alpha^2}{2} + \beta} = \pm \sqrt{-\frac{\alpha^2}{4} + \beta}.$$

gelten. Die Lösung ist eine gedämpfte Schwingung. Im Bild:  $\alpha = 0.1, \beta = 3, \lambda = 1, A = 2$



□

Im allgemeinen kann man eine Differentialgleichung nur in Spezialfällen analytisch lösen. Generell kann man jedoch Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (1.1) untersuchen. Zudem kann man sich mit Hilfe von numerischen Näherungsverfahren eine Vorstellung von der Gestalt der Lösung verschaffen, obwohl man keine explizite Formel für diese besitzt.

## Literatur zur Theorie Gewöhnlicher Differentialgleichungen

Lehrbücher zu den Grundlagen der gewöhnlichen Differentialgleichungen bietet fast jeder wissenschaftliche Verlag. Eine kleine Auswahl ist

- H. Amann, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 2. Auflage, de Gruyter Verlag, 1995
- O. Forster, Analysis 2, Vieweg, 7. Auflage, 2006
- H. Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 5. Auflage, Teubner-Verlag 2006
- W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 7. Auflage, Springer-Verlag 2000

Die Vorlesung wird sich nicht strikt an ein Lehrbuch halten. Zum Selbststudium kann man ebenso andere Lehrbücher verwenden. Da die Mehrheit des präsentierten Stoffes bereits seit der 2. Hälfte des 19. Jh. oder der ersten Hälfte des 20. Jh. bekannt ist, kann man getrost auch ältere Lehrbücher verwenden, zum Beispiel

- H. Goering, Elementare Methoden zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungsproblemen, Akademie-Verlag, Berlin 1978
- Günther, Beyer, Gottwald, Wunsch : Grundkurs Analysis, Teil 4, B.G. Teubner, Leipzig 1974
- E. Kamke : Differentialgleichungen I, Geest & Portig, Leipzig 1962
- H. Triebel : Höhere Analysis, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972

## Teil I

# Theorie Gewöhnlicher Differentialgleichungen



## Kapitel 2

# Grundbegriffe, Integrierbare Typen von Gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung

### 2.1 Definitionen und Beispiele

**Definition 2.1 Gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung, explizite gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.** Eine gewöhnliche Differentialgleichung wird von erster Ordnung genannt, wenn in ihr keine höhere Ableitung von  $y(x)$  als die erste Ableitung vorkommt. Die allgemeine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung lautet

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

Eine Funktion  $y(x)$  ist Lösung dieser Gleichung in einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  wenn  $y(x)$  in  $I$  differenzierbar ist und  $F(x, y(x), y'(x)) = 0$  für alle  $x \in I$  gilt.

Die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung wird explizit genannt, wenn man sie in der Form

$$\frac{dy}{dx} = y'(x) = f(x, y(x)) \quad (2.1)$$

schreiben kann, wobei  $f(x, y)$  eine auf einer Menge  $G$  der  $(x, y)$ -Ebene erklärte reellwertige Funktion ist. Eine Funktion  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist Lösung von (2.1), wenn  $y(x)$  in  $I$  differenzierbar ist und

$$(x, y(x)) \in G, \quad y'(x) = f(x, y(x))$$

für alle  $x \in I$  ist. □

Die Vorlesung wird sich vorwiegend auf explizite Differentialgleichungen konzentrieren.

**Beispiel 2.2 Organisches Wachstum.** Die absolute Wachstumsrate von Bakterienkulturen auf unerschöpflichem Nährboden ist proportional zur Anzahl  $N$  der im Augenblick  $t$  vorhandenen Bakterien

$$N'(t) = \alpha N(t). \quad (2.2)$$

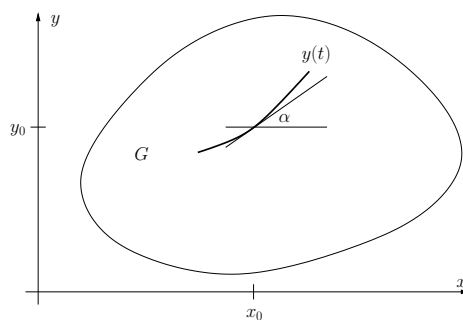
Hierbei ist  $\alpha$  die relative Wachstumsrate der Bakterienart. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist eine differenzierbare und demzufolge stetige Funktion. Das steht streng genommen im Widerspruch zur Tatsache, dass  $N$  eine natürliche Zahl sein muss. In der Praxis ist  $N$  jedoch sehr groß, so dass man mit dem mathematischen Modell, welches durch die Differentialgleichung (2.2) gegeben ist, nur einen kleinen Modellfehler begeht. Die Lösung von (2.2) wird im Abschnitt 2.4 behandelt.

Für Ableitungen nach der Zeit verwendet man statt  $N'(t)$  auch oft die Bezeichnung  $\dot{N}(t)$ .  $\square$

**Bemerkung 2.3 Geometrische Interpretation.** Die explizite Differentialgleichung (2.1) gestattet eine einfache geometrische Interpretation. Geht eine Lösung  $y(t)$  von (2.1) durch den Punkt  $(x_0, y_0) \in G$ , das heißt  $y(x_0) = y_0$ , so beträgt ihre Steigung an dieser Stelle

$$y'(x_0) = f(x_0, y_0) = \tan \alpha,$$

wobei  $\alpha$  der Anstiegswinkel ist.

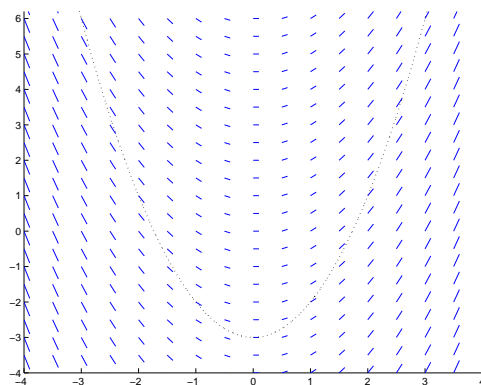


Man nennt das Tripel  $(x_0, y_0, \tan \alpha) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ , oder sein geometrisches Äquivalent, Linienelement. Die Gesamtheit aller Linienelemente  $(x, y, f(x, y))$  heißt Richtungsfeld. Eine Kurve  $y(x)$  erweist sich als Lösung der Differentialgleichung (2.1), wenn sie in das vorgegebene Richtungsfeld passt. Das heißt, in jedem Kurvenpunkt stimmt ihre Tangentenrichtung mit der Richtung des Linienelements überein.  $\square$

**Beispiel 2.4 Richtungsfeld einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung.** Gesucht sei die Lösung von

$$y'(x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mit den obigen Bezeichnungen ist  $f(x, y) = x$ . Diese Funktion ist für konstantes  $x$  konstant.



Die Gesamtheit aller Lösungen einer Differentialgleichung nennt man allgemeine Lösung. Die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung ist

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Man sieht an diesem Beispiel, dass diese Differentialgleichung unendlich viele Lösungen besitzt. Zum anderen gibt es für jeden Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  genau eine Lösung, die diesen Punkt enthält.  $\square$

In der Praxis ist es oft nicht so wichtig, alle Lösungen zu kennen, sondern eine Lösung zu finden, die durch einen vorgegebenen Punkt verläuft.

**Definition 2.5 Anfangswertproblem, Anfangswert.** Gegeben sind eine auf einer Menge  $G \subset \mathbb{R}^2$  erklärte Funktion  $f(x, y)$  und ein fester Punkt  $(x_0, y_0) \in G$ . Dann nennt man das Problem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

Anfangswertproblem (AWP). Die Nebenbedingung wird Anfangsbedingung (AB) genannt.  $\square$

## 2.2 Gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen

**Definition 2.6 Gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen.** Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$y'(x) = f(x)g(y) \tag{2.3}$$

nennt man gewöhnliche Differentialgleichung mit getrennten Variablen.  $\square$

**Beispiel 2.7** Ein Spezialfall von (2.3) ist die Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x).$$

Der Lösungsweg für diese Differentialgleichung ist bereits aus der Schule bekannt: unbestimmte Integration. Existiert eine Stammfunktion  $F(x)$  von  $f(x)$ , so ist die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung

$$y(x) = F(x) + c,$$

wobei  $c \in \mathbb{R}$  eine beliebige Konstante ist.

Man spricht anstelle des „Auffindens der Lösung einer Differentialgleichung“ auch oft von der „Integration einer Differentialgleichung“.  $\square$

**Satz 2.8 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.** Die Funktion  $f(x)$  sei im Intervall  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  und die Funktion  $g(y)$  sei im Intervall  $(c, d) \subset \mathbb{R}$  stetig und es gelte  $g(y) \neq 0$  für alle  $y \in (c, d)$ . Dann ist das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x)g(y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in (a, b), \quad y_0 \in (c, d), \tag{2.4}$$

eindeutig lösbar. Seien  $G(y)$  die Stammfunktion von  $1/g(y)$  mit  $G(y_0) = 0$  und  $F(x)$  die Stammfunktion von  $f(x)$  mit  $F(x_0) = 0$ . Dann ist

$$y(x) = (G^{-1} \circ F)(x) = G^{-1}(F(x))$$

die Lösung des gestellten Anfangswertproblems in einer Umgebung von  $x_0$ . Hierbei ist  $G^{-1}(y)$  die Umkehrfunktion von  $G(y)$ .

**Beweis:** *i) Eindeutigkeit.* Angenommen,  $y(x)$  sei eine Lösung des AWP (2.4) mit  $y(x_0) = y_0$ . Dann gilt

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x).$$

Da beide Funktionen dieser Gleichung stetig sind, kann man sie integrieren

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

Da  $G(y)$  die Stammfunktion von  $1/g(y)$  ist und  $F(x)$  die Stammfunktion von  $f(x)$ , erhält man mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$G(y(x)) - \underbrace{G(y(x_0))}_{=y_0} = F(x) - \underbrace{F(x_0)}_{=0}. \quad (2.5)$$

Da  $1/g(y) \neq 0$  ist, ist  $G(y)$  eine streng monotone Funktion. Daraus folgt, dass die Umkehrfunktion  $G^{-1}(y)$  existiert. Damit ergibt sich aus (2.5)

$$y(x) = (G^{-1} \circ F)(x) = G^{-1}(F(x)). \quad (2.6)$$

Das heißt, existiert eine Lösung des AWP (2.4), so kann man sie in der Form (2.6) darstellen. Die Eindeutigkeit folgt aus der Eindeutigkeit der Funktionen  $F(x)$  und  $G(y)$ .

*ii) Existenz.* Man zeigt durch nachrechnen, dass (2.6) eine Lösung des AWP (2.4) ist. Es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) & \stackrel{\text{Kettenregel}}{=} (G^{-1})'(F(x)) F'(x) \\ & \stackrel{\text{Abl. Umkehrfunktion}}{=} \frac{1}{G'(G^{-1}(F(x)))} F'(x) \\ & \stackrel{(2.6)}{=} \frac{1}{G'(y(x))} F'(x) \\ & \stackrel{G'(y) = 1/g(y)}{=} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(y)}} = f(x)g(y). \end{aligned}$$

Für die Anfangsbedingung gilt

$$y(x_0) = G^{-1}(F(x_0)) = G^{-1}(0) = y_0. \quad \blacksquare$$

**Beispiel 2.9** Betrachte

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{x}{y(x)}, \quad x \in (a, b), \quad y \in (c, d), \quad 0 \notin (c, d) \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Mit der obigen Herangehensweise erhält man

$$f(x) = x \implies F(x) = \int_{x_0}^x t dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}$$

und

$$g(y) = \frac{1}{y} \implies \frac{1}{g(y)} = y \implies G(y) = \int_{y_0}^y t dt = \frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2}.$$

Nach (2.5) folgt

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} = \frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2}. \quad (2.7)$$

Durch Umstellen erhält man die Lösung

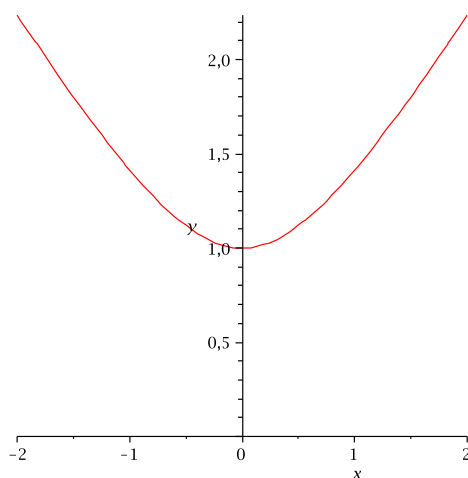
$$y = \sqrt{x^2 - x_0^2 + y_0^2} \quad \text{falls } c > 0,$$

$$y = -\sqrt{x^2 - x_0^2 + y_0^2} \quad \text{falls } d < 0.$$

Die Wahl von  $x$  kann in Abhängigkeit von  $(x_0, y_0)$  eingeschränkt sein. Nach (2.7) kann man die Lösung auch in der Form

$$y^2 - x^2 = y_0^2 - x_0^2 =: c_0$$

schreiben. Dies ist eine Hyperbel. Sei  $c_0 > 0$ , dann hat man für  $c > 0$  einen oberen Ast und für  $d < 0$  einen unteren Ast.



Für  $c_0 < 0$  besteht die Lösung aus je einem Teil des linken beziehungsweise des rechten Astes einer Hyperbel. Im Fall  $c_0 = 0$  ist die Lösung  $y = |x|$  oder  $y = -|x|$ , jeweils mit  $x \neq 0$ .  $\square$

**Bemerkung 2.10 Methode der Trennung der Variablen.** Man braucht sich die Lösungsformel für das Anfangswertproblem (2.4) nicht zu merken, da es einen einfachen, wenngleich mathematisch nicht ganz exakten, Weg zur Berechnung der Lösung gibt – die Methode der Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \quad \text{behandle linke Seite wie einen Bruch}$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \text{integriere}$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx \quad \text{finde Stammfunktionen}$$

$$G(y) = F(x) + c \quad \text{fasse Integrationskonstanten zusammen}$$

$$y = G^{-1}(F(x) + c) \quad \text{löse nach } y \text{ auf.}$$

Die Konstante  $c$  wird aus der Anfangsbedingung bestimmt.  $\square$

**Beispiel 2.11** Betrachte die Methode der Trennung der Variablen in Beispiel 2.9.

Man hat

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y} \implies \\ ydy &= xdx \implies \\ \int y dy &= \int x dx \implies \\ \frac{y^2}{2} &= \frac{x^2}{2} + c.\end{aligned}$$

Nun hat man zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Die Anfangsbedingung ergibt

$$\frac{y_0^2}{2} = \frac{x_0^2}{2} + c \implies c = \frac{1}{2} (y_0^2 - x_0^2).$$

□

**Bemerkung 2.12 Der Fall, dass  $g(y)$  eine Nullstelle besitzt.** Sei  $y_1 \in (c, d)$  mit  $g(y_1) = 0$ . Dann ist eine Lösung des AWP (2.4) mit der Anfangsbedingung  $y(x_0) = y_1$  sofort durch  $y(x) = y_1$  für alle  $x \in (a, b)$  gegeben, da dann beide Seiten der Differentialgleichung von (2.4) gleich Null sind. Es kann jedoch passieren, dass es weitere Lösungen dieses AWP gibt, siehe Übungsaufgaben. □

## 2.3 Homogene Differentialgleichungen

**Definition 2.13 Homogene Differentialgleichung.** Eine Differentialgleichung der Gestalt

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.8)$$

mit  $x > 0$  beziehungsweise  $x < 0$  heißt homogene Differentialgleichung. □

**Bemerkung 2.14** Seien  $D(f)$  der Definitionsbereich von  $f(x)$  und  $\alpha \in D(f)$ . Dann ordnet die Differentialgleichung (2.8) allen Punkten der Geraden  $y = \alpha x$  die gleiche Richtung zu

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = f(\alpha) = \tan \beta = y'(x).$$

□

Die Differentialgleichung (2.8) lässt sich unter gewissen Voraussetzungen in eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen transformieren. Auf dieser Transformation beruht folgender Satz.

**Satz 2.15 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.** Die Funktion  $f(x)$  sei in  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  stetig,  $x_0 \neq 0$ ,  $y_0/x_0 \in (a, b)$  und es sei

$$f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \neq \frac{y_0}{x_0}.$$

Dann ist das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad y(x_0) = y_0$$

eindeutig lösbar. Die Funktion  $z(x) = y(x)/x$  genügt einer gewöhnlichen Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

**Beweis:** Man nutzt den Ansatz

$$y(x) = xz(x) \implies y'(x) = z(x) + xz'(x).$$

Einsetzen in (2.8) ergibt

$$z(x) + xz'(x) = f(z).$$

Das ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen für  $z(x)$

$$z'(x) = \frac{1}{x} (f(z) - z(x)). \quad (2.9)$$

Damit die rechte Seite dieser Gleichung nicht verschwindet, benötigt man die Bedingung

$$f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \neq \frac{y_0}{x_0} = z_0.$$

Die Funktion  $y(x)$  löst (2.8) genau dann, wenn die Funktion  $z(x)$  (2.9) löst. Das AWP (2.9) mit der Anfangsbedingung  $(x_0, z_0) = (x_0, y_0/x_0)$  ist nach Satz 2.8 eindeutig lösbar, da alle in diesem Satz geforderten Bedingungen erfüllt sind. Damit ist auch das Anfangswertproblem der homogenen Differentialgleichung eindeutig lösbar. ■

**Bemerkung 2.16** Der Fall

$$f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = \frac{y_0}{x_0}.$$

führt auf den Fall  $g(y_1) = 0$  aus Bemerkung 2.12. □

**Beispiel 2.17** Betrachte das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{y^2 - x^2}{2yx}, \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 > 0, \quad y_0 > 0.$$

Wegen des Nenners benötigt man  $x \neq 0$  und  $y \neq 0$ . Da in der Anfangsbedingung  $x_0$  und  $y_0$  positiv sind, wird man Lösungen für  $x > 0$  und  $y > 0$  erwarten können.

Die obige Differentialgleichung ist eine homogene Differentialgleichung, da

$$y'(x) = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Für die Koordinaten der Anfangsbedingung gilt

$$f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) = \frac{1}{2} \frac{y_0}{x_0} - \frac{1}{2\frac{y_0}{x_0}} < \frac{1}{2} \frac{y_0}{x_0}.$$

Also gilt

$$f\left(\frac{y_0}{x_0}\right) \neq \frac{y_0}{x_0}.$$

Nutze nun den Ansatz aus dem Beweis von Satz 2.15

$$\begin{aligned} y(x) &= xz(x) \implies z(x) > 0 \text{ und} \\ z(x) + xz'(x) &= \frac{z^2(x) - 1}{2z(x)} \implies \\ z'(x) &= \left(\frac{z^2 - 1}{2z} - z\right) \frac{1}{x} = \left(-\frac{z^2 + 1}{2z}\right) \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Das ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen.

Anwendung der Methode der Trennung der Variablen liefert

$$\begin{aligned} \frac{2z}{z^2+1} dz &= -\frac{dx}{x} \implies \text{mit Integration} \\ \ln(z^2+1) &= -\ln|x| + c \stackrel{x>0}{=} \ln \frac{1}{x} + c \implies \text{potenzieren} \\ z^2+1 &= \exp\left(\ln \frac{1}{x}\right) \underbrace{\exp(c)}_{c_0>0} = \frac{c_0}{x}. \end{aligned}$$

Man erhält wegen  $z(x) > 0$

$$z(x) = \sqrt{\frac{c_0}{x} - 1}.$$

Rücksubstitution ergibt

$$y(x) = xz(x) = \sqrt{c_0x - x^2}.$$

Die Konstante  $c_0$  wird aus der Anfangsbedingung bestimmt

$$y(x_0) = y_0 = \sqrt{c_0x_0 - x_0^2} \implies c_0 = \frac{y_0^2 + x_0^2}{x_0}.$$

Somit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

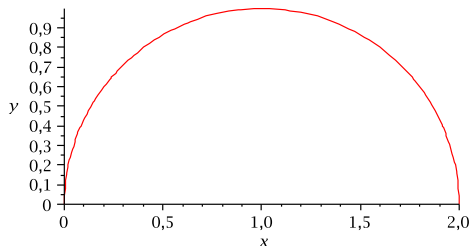
$$y(x) = \sqrt{\frac{y_0^2 + x_0^2}{x_0}x - x^2}.$$

Dies wird durch die Probe *Übungsaufgabe* bestätigt. Die Probe sollte immer nach der Lösung einer Differentialgleichung durchgeführt werden!

Zur geometrischen Veranschaulichung schreibt man die Lösung in der Form

$$\begin{aligned} y^2 + x^2 - \frac{y_0^2 + x_0^2}{x_0}x &= 0 \implies \\ y^2 + \left(x - \frac{1}{2} \frac{y_0^2 + x_0^2}{x_0}\right)^2 &= \frac{1}{4} \left(\frac{y_0^2 + x_0^2}{x_0}\right)^2. \end{aligned}$$

Das ist eine Halbellipse mit dem Scheitel auf der positiven  $x$ -Achse, siehe Lösung für  $x_0 = y_0 = 1$ .



□



## 2.4 Lineare Differentialgleichungen

**Definition 2.18 Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.** Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Gestalt

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x), \quad (2.10)$$

wobei  $f(x), g(x)$  definiert und stetig in  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  sind, heißt lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Für  $g(x) \equiv 0$  spricht man von einer homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.  $\square$

**Bemerkung 2.19**

- Die gewöhnliche Differentialgleichung heißt linear, weil  $y'(x)$  und  $y(x)$  nur linear auftreten.
- Die homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung ist eine spezielle Differentialgleichung mit getrennten Variablen.
- Man sieht sofort, dass  $y(x) \equiv 0$  eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist.  $\square$

**Satz 2.20 Superpositionsprinzip.**

- i) Sind  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  zwei Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, so ist auch jede Linearkombination  $c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$  mit beliebigen Konstanten  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.*
- ii) Sind  $y_i(x)$  eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung und  $y_h(x)$  eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, dann ist  $y_i(x) + y_h(x)$  eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.*
- iii) Sind  $y_i(x)$  und  $\tilde{y}_i(x)$  zwei Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, so ist ihre Differenz Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.*

**Beweis:** Alle Aussagen beweist man durch direktes Nachrechnen.

*i)* Es gilt

$$\begin{aligned} & (c_1y_1(x) + c_2y_2(x))' + f(x)(c_1y_1(x) + c_2y_2(x)) \\ &= c_1y_1'(x) + c_2y_2'(x) + f(x)(c_1y_1(x) + c_2y_2(x)) \\ &= c_1 \underbrace{(y_1'(x) + f(x)y_1(x))}_{=0} + c_2 \underbrace{(y_2'(x) + f(x)y_2(x))}_{=0} = 0, \end{aligned}$$

da  $y_1(x), y_2(x)$  nach Voraussetzung Lösung der homogenen Differentialgleichung sind. Man nutzt im Beweis die Linearität der Differentialgleichung und die Linearität der Differentiation.

*ii), iii)* Übungsaufgaben.  $\blacksquare$

**Bemerkung 2.21** Die Gültigkeit des Superpositionsprinzip ist nicht auf lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung beschränkt. Solch ein Prinzip gilt allgemein bei linearen Problemen, zum Beispiel auch bei linearen Gleichungssystemen und linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung, siehe Satz 4.6.  $\square$

**Satz 2.22 Allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.** Man erhält alle Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung, indem man zu einer speziellen Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung  $y_i(x)$  alle Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung  $\{y_h(x)\}$  addiert.

**Beweis:** Jede Funktion  $y_i(x) + \tilde{y}_h(x)$  mit  $\tilde{y}_h(x) \in \{y_h(x)\}$  ist nach dem Superpositionsprinzip ii) Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. Also ist  $y_i(x) + \{y_h(x)\}$  eine Teilmenge der Gesamtheit aller Lösungen.

Sei  $\tilde{y}_i(x)$  eine beliebige Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung. Nach Superpositionsprinzip iii) ist dann  $\tilde{y}_i(x) - y_i(x)$  eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung. Also gibt es ein  $\tilde{y}_h(x) \in \{y_h(x)\}$  mit

$$\tilde{y}_i(x) - y_i(x) = \tilde{y}_h(x) \iff \tilde{y}_i(x) = y_i(x) + \tilde{y}_h(x).$$

Demzufolge lässt sich jede Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung in der oben angegebenen Form darstellen. ■

allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung  
 = spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung  
 + allgemeine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

**Satz 2.23 Existenz der allgemeinen Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.** Seien  $f(x), g(x)$  in  $(a, b)$  stetig. Es gibt eine Funktion  $y_h(x)$  mit  $D(y_h) = (a, b)$ ,  $y_h \in C^1(a, b)$ ,  $y_h(x) \neq 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , so dass

$$\{cy_h(x) : c \in \mathbb{R}\}$$

die Gesamtheit aller Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist. Das ist ein eindimensionaler Unterraum von  $C^1(a, b)$ .

**Beweis:** Betrachte die homogene lineare Differentialgleichung

$$y_h'(x) + f(x)y_h(x) = 0 \iff y_h'(x) = -f(x)y_h(x).$$

Das ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Wähle  $y_h(x) > 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Dann hat die Differentialgleichung die Lösung

$$y_h(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^x f(t) dt\right)$$

mit  $x_0 \in (a, b)$ , denn man erhält mit der Kettenregel und der Differentiation nach der oberen Integrationsgrenze

$$y_h'(x) = \exp\left(-\int_{x_0}^x f(t) dt\right) (-f(x)) = -f(x)y_h(x).$$

Zur Erinnerung: Differentiation nach der oberen Integrationsgrenze, wobei  $F(x)$  eine Stammfunktion von  $f(x)$  ist:

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(t) dt = \frac{d}{dx} (F(x) - F(x_0)) = F'(x) = f(x),$$

mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Da  $f(x)$  stetig ist, ist  $y_h(x)$  differenzierbar. Außerdem gilt wegen der Exponentialfunktion  $y_h(x) > 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Nach dem Superpositionsprinzip ist  $\{cy_h(x)\}$  mit  $c \in \mathbb{R}$  Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung.

Es bleibt zu zeigen, dass es neben  $\{cy_h(x) : c \in \mathbb{R}\}$  keine anderen Lösungen gibt. Sei  $\tilde{y}_h \in C^1(a, b)$  eine beliebige Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. Wir setzen

$$\tilde{y}_h(x) = w(x)y_h(x) \implies w(x) = \frac{\tilde{y}_h(x)}{y_h(x)}, \quad y_h(x) \neq 0.$$

Da  $\tilde{y}_h, y_h \in C^1(a, b)$  und  $y_h(x) \neq 0$  folgt  $w \in C^1(a, b)$ . Es ist

$$w'(x) = \frac{\tilde{y}'_h(x)y_h(x) - \tilde{y}_h(x)y'_h(x)}{(y_h(x))^2}$$

Dgl. einsetzen  $\underline{=} \frac{-f(x)\tilde{y}_h(x)y_h(x) + \tilde{y}_h(x)f(x)y_h(x)}{(y_h(x))^2} = 0.$

Damit ist  $w(x)$  eine Konstante und  $\tilde{y}_h(x) = cy_h(x)$ . Es gibt also keine weiteren Lösungen als  $\{cy_h(x) : c \in \mathbb{R}\}$ . ■

**Satz 2.24 Existenz einer Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung.** Seien  $f(x), g(x)$  in  $(a, b)$  stetig. Dann gibt es eine Lösung  $y_i(x)$  der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit  $D(y_i) = (a, b)$ ,  $y_i \in C^1(a, b)$ , so dass  $\{y_i(x) + cy_h(x) : c \in \mathbb{R}\}$  die Gesamtheit aller Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist (affine Mannigfaltigkeit mit Trägerpunkt  $y_i(x)$ ).

**Beweis:** Nutze den Ansatz

$$y_i(x) = c(x)y_h(x),$$

wobei  $y_h(x)$  die im Beweis von Satz 2.23 konstruierte Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist. Dieser Ansatz wird Variation der Konstanten genannt. Man versucht eine stetig differenzierbare Funktion  $c(x)$  so zu bestimmen, dass  $y_i(x)$  eine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist. Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} c'(x)y_h(x) + c(x)y'_h(x) + f(x)c(x)y_h(x) &= g(x) \iff \\ c'(x)y_h(x) + c(x)\underbrace{(y'_h(x) + f(x)y_h(x))}_{=0} &= g(x). \end{aligned}$$

Damit genügt  $c(x)$  der Differentialgleichung mit getrennten Variablen

$$c'(x) = \frac{g(x)}{y_h(x)} \implies c(x) = \int_{x_0}^x \frac{g(t)}{y_h(t)} dt, \quad x_0 \in (a, b).$$

Rücksubstitution liefert

$$y_i(x) = \left( \int_{x_0}^x \frac{g(t)}{y_h(t)} dt \right) y_h(x).$$

Diese Funktion ist stetig differenzierbar, da beide Faktoren stetig differenzierbar sind. Nach Konstruktion löst  $y_i(x)$  die inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Nach dem Superpositionsprinzip ist  $\{y_i(x) + cy_h(x) : c \in \mathbb{R}\}$  die Gesamtheit aller Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung. ■

**Satz 2.25 Eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems.** Seien  $f(x), g(x)$  in  $(a, b)$  stetig. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y'(x) + f(x)y(x) = g(x), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in (a, b),$$

mit beliebigem  $y_0 \in \mathbb{R}$  eine eindeutige Lösung.

**Beweis:** Seien  $x_0 \in (a, b)$  und  $y_0 \in \mathbb{R}$  gegeben. Einsetzen der Anfangsbedingung in die im Satz 2.24 angegebene allgemeine Lösung ergibt

$$y_i(x_0) + cy_h(x_0) = y(x_0) = y_0.$$

Mit Hilfe der in den Beweisen von Satz 2.23 und 2.24 konstruierten Darstellung der allgemeinen Lösung folgt

$$0 + c \cdot 1 = y_0 \implies c = y_0.$$

Damit ist die Konstante eindeutig bestimmt. ■

**Bemerkung 2.26 Fazit.**

- Die homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung wird mit Trennung der Veränderlichen gelöst.
- Eine spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung findet man mit der Methode der Variation der Konstanten.
- Ob man die allgemeine Lösung explizit angeben kann, hängt „lediglich“ davon ab, ob man die auftretenden Integrale explizit berechnen kann.
- Ein Anfangswertproblem löst man, indem man zuerst die allgemeine Lösung berechnet und dann in diese die Anfangsbedingung einsetzt.
- Besitzen die Koeffizientenfunktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  in (2.10) eine „günstige“ Gestalt, so kann man eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung auch mit einem geeigneten Ansatz gewinnen. Sind  $f(x)$  und  $g(x)$  beispielsweise Polynome, so setzt man auch  $y_i(x)$  als Polynom mit geeignetem Grad an. Diese Herangehensweise nennt man Störgliedansätze, siehe Übungsaufgaben.

□

**Beispiel 2.27** Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) + y(x) = \cos(x), \quad y(0) = 4711.$$

i) *allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.*

$$\begin{aligned} y_h' + y_h &= 0 \implies \\ \int \frac{dy}{y_h} &= - \int dx \implies \\ \ln |y_h| &= -x + c_0 \implies \\ y_h(x) &= ce^{-x}, \quad c \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ii) *spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit Variation der Konstanten.* Der Ansatz ist

$$y_i(x) = c(x)e^{-x}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\begin{aligned} c'(x)e^{-x} + \underbrace{c(x)(-e^{-x}) + c(x)e^{-x}}_{=0} &= \cos(x) \implies \\ c'(x) &= e^x \cos(x) \implies \\ c(x) &= \int_0^x e^t \cos(t) dt \implies \\ c(x) &= \frac{1}{2}e^x (\cos(x) + \sin(x)) - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Einsetzen in den Ansatz ergibt

$$y_i(x) = c(x)y_h(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)) - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Der zweite Term gehört zur allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung. Damit erhält man als allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y_i(x) = \frac{1}{2}(\cos(x) + \sin(x)) + c_0e^{-x}, \quad c_0 \in \mathbb{R}.$$

iii) *Anfangsbedingung.* Einsetzen in die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ergibt

$$y_i(0) = \frac{1}{2} + c_0 = 4711 \implies c_0 = 4710.5.$$

Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = \frac{1}{2} (\cos(x) + \sin(x)) + 4710.5e^{-x}.$$

**Wichtig: Nicht die fertigen Formeln merken, sondern den Weg!!!**  $\square$

## 2.5 Die Bernoullische Differentialgleichung

**Definition 2.28 Bernoulli<sup>1</sup>sche Differentialgleichung.** Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Gestalt

$$y'(x) = f_0(x)y^\alpha(x) + f_1(x)y(x) \quad (2.11)$$

mit  $f_0, f_1 \in C([a, b])$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 1$ ,  $f_0(x) \not\equiv 0$  heißt Bernoullische Differentialgleichung.  $\square$

Die Bernoullische Differentialgleichung lässt sich mit einer geeigneten Transformation auf eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung überführen.

**Satz 2.29** *Ist  $y(x)$  eine Lösung der Bernoullischen Differentialgleichung (2.11) mit  $y(x) > 0$  für alle  $x \in (a, b)$ , so genügt*

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x)$$

der linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$z'(x) = (1 - \alpha)(f_0(x) + f_1(x)z(x)). \quad (2.12)$$

Umgekehrt erhält man aus jeder Lösung  $z(x)$  von (2.12) mit  $z(x) > 0$  für alle  $x \in (a, b)$  durch

$$y(x) = z^{1/(1-\alpha)}(x)$$

eine Lösung von (2.11).

Das Anfangswertproblem zu (2.11) mit  $y(x_0) = y_0$  ist eindeutig lösbar, falls  $y_0 > 0$  ist.

**Beweis:** Aus (2.11) folgt durch Division mit  $y^\alpha(x) > 0$

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x) &= (f_0(x) + f_1(x)y^{1-\alpha}(x))(1 - \alpha) \iff \\ (y^{1-\alpha})'(x) &= (f_0(x) + f_1(x)y^{1-\alpha}(x))(1 - \alpha). \end{aligned}$$

Setze  $z(x) = y^{1-\alpha}(x) > 0$ . Daraus folgt mit (2.11)

$$z'(x) = (1 - \alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x) = (1 - \alpha)(f_0(x) + f_1(x)y^{1-\alpha}(x)) = (1 - \alpha)(f_0(x) + f_1(x)z(x)).$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Da alle Umformungen äquivalent waren folgt, dass falls  $y(x)$  (2.11) löst, so löst  $z(x)$  auch (2.12) und umgekehrt.

Das Anfangswertproblem zu (2.12) mit  $z(x_0) = z_0 \in \mathbb{R}^+$  beliebig (da  $z(x) > 0$ ) ist nach Satz 2.25 eindeutig lösbar. Damit ist auch das Anfangswertproblem zu (2.11) mit  $y_0 = y(x_0) = z_0^{1/(1-\alpha)} > 0$  eindeutig lösbar. Die Abbildung  $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $z_0 \mapsto y_0$  ist bijektiv für  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \neq 1$ . Damit hat das Anfangswertproblem zu (2.11) für jedes  $y_0 > 0$  eine eindeutige Lösung.  $\blacksquare$

---

<sup>1</sup>Jakob Bernoulli (1654 – 1705)

**Beispiel 2.30** Gesucht ist die Lösung von

$$y'(x) + 2xy(x) = 2x^3y^3(x), \quad y(0) = 2.$$

Ansatz:

$$z(x) = y^{-2}(x) = \frac{1}{y^2(x)} \implies z'(x) = -2y^{-3}(x)y'(x).$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{y'(x)}{y^3(x)} + 2\frac{x}{y^2(x)} &= 2x^3 \implies \\ -\frac{z'(x)}{2} + 2xz(x) &= 2x^3 \implies \\ z'(x) &= 4xz(x) - 4x^3. \end{aligned}$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung.

Homogene Gleichung:

$$z'_h(x) = 4xz_h(x) \implies z_h(x) = ce^{2x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Inhomogene Gleichung mit Variation der Konstanten: Ansatz

$$z_i(x) = c(x)e^{2x^2}.$$

Einsetzen in Differentialgleichung liefert

$$c'(x)e^{2x^2} = -4x^3 \implies c'(x) = -4x^3e^{-2x^2}.$$

Zweimalige partielle Integration ergibt

$$c(x) = e^{-2x^2} \left( \frac{1}{2} + x^2 \right).$$

Einsetzen in den Ansatz:

$$z_i(x) = \left( \frac{1}{2} + x^2 \right) \implies z(x) = \left( \frac{1}{2} + x^2 \right) + ce^{2x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Für die Lösung des Anfangswertproblems der Bernoullischen Differentialgleichung benötigt man nur die Lösung mit  $z(x) > 0$  in einer Umgebung von  $x = 0$ . Durch Rücksubstitution erhält man

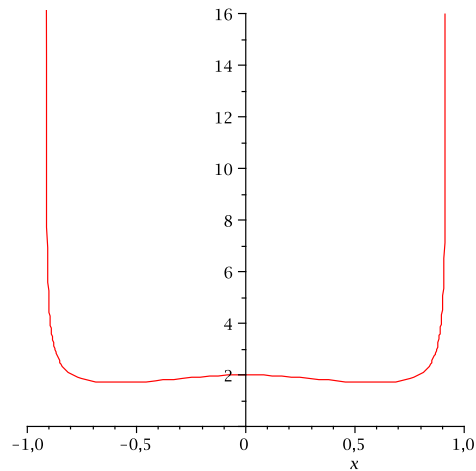
$$y(x) = z^{-1/2}(x) = \left( \frac{2}{1} + x^2 + ce^{2x^2} \right)^{-1/2} > 0.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung:

$$y(0) = \left( \frac{1}{2} + c \right)^{-1/2} = 2 \implies 1 = 4 \left( \frac{1}{2} + c \right) \implies c = -\frac{1}{4}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(x) = z^{-1/2}(x) = \left( \frac{1}{2} + x^2 - \frac{1}{4}e^{2x^2} \right)^{-1/2}.$$



Man beachte:

- Der Definitionsbereich von  $y(x)$  ist beschränkt.
- Für  $y_0 < 0$  ist das Anfangswertproblem nicht lösbar.
- **Wichtig: Substitution**  $z(x) = y^{1-\alpha}(x)$  **merken !!!**

□

## 2.6 Die Riccati'sche Differentialgleichung

**Definition 2.31 Riccati'sche Differentialgleichung.** Eine gewöhnliche Differentialgleichung der Gestalt

$$y'(x) = f_0(x)y^2(x) + 2f_1(x)y(x) + f_2(x) \quad (2.13)$$

mit  $f_i \in C(a, b)$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ ,  $f_0(x) \not\equiv 0$  heißt Riccati'sche Differentialgleichung. □

**Bemerkung 2.32 Spezialfälle.** Spezialfälle von (2.13) sind

- $f_0(x) \equiv 0$ , lineare Differentialgleichung,
- $f_1(x) \equiv 0$ , Bernoulli'sche Differentialgleichung.

□

**Bemerkung 2.33 Normalform.** Seien  $f_1 \in C^1(a, b)$ ,  $f_0 \in C^2(a, b)$  sowie  $f_0(x) \neq 0$  in  $(a, b)$ . Dann kann man die Riccati'sche Differentialgleichung mittels der Transformation

$$z(x) = f_0(x)y(x) + \frac{1}{2f_0(x)} (f_0'(x) + 2f_1(x)f_0(x))$$

in die sogenannte Normalform

$$z'(x) = z^2(x) - f(x) \quad (2.14)$$

mit

$$f(x) = \left( -f_0f_2 + f_1^2 - f_1' + \frac{1}{4f_0^2} [4f_0f_0'f_1 + 3(f_0')^2 - 2f_0f_0''] \right) (x)$$

überführen *Übungsaufgabe*. Eine Funktion  $y(x)$  ist genau dann Lösung von (2.13) wenn  $z(x)$  Lösung von (2.14) ist. □

**Bemerkung 2.34 Lösbarkeit.** Die Riccati'sche Differentialgleichung ist im allgemeinen nicht durch elementare Rechenoperationen und Aufsuchen von Stammfunktionen lösbar. Dies ist nur in folgenden Spezialfällen von (2.14) möglich:

---

<sup>2</sup>Jacobo Francesco Riccati (1676 – 1754)

- $f(x) = c \in \mathbb{R}$  für alle  $x \in (a, b) \implies$  Trennung der Veränderlichen,
- $f(x) = c/x^2$ ,  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Dann führt die Transformation  $u(x) = 1/z(x)$  zu

$$u'(x) = -1 + c \left( \frac{u(x)}{x} \right)^2.$$

Das ist eine homogene Differentialgleichung.

- Der wichtigste Fall ist der Folgende. Ist eine Lösung  $z_0(x)$  von (2.14) bekannt, dann können alle weiteren Lösungen durch elementare Rechenoperationen und Aufsuchen der Stammfunktion bestimmt werden. Die allgemeine Lösung lautet

$$z(x) = z_0(x) + \frac{1}{u_0(x) + cu_1(x)}, \quad c \in \mathbb{R},$$

wobei  $u_0(x)$  eine spezielle Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung ist und  $u_1(x)$  Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung.  $\square$

**Satz 2.35 Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems.** *In jedem Intervall  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$  existiert höchstens eine Lösung des Anfangswertproblems der Riccatischen Differentialgleichung (2.14) mit der Anfangsbedingung  $z(x_0) = z_0$ ,  $x_0 \in (\alpha, \beta)$ .*

**Beweis:** Seien  $z_1, z_2 \in C^1(\alpha, \beta)$  zwei Lösungen des Anfangswertproblems. Dann erfüllt die Differenz  $y(x) = z_1(x) - z_2(x)$  das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'(x) &= z_1'(x) - z_2'(x) = z_1^2(x) - f(x) - (z_2^2(x) - f(x)) = z_1^2(x) - z_2^2(x) \\ &= (z_1(x) - z_2(x))(z_1(x) + z_2(x)) = y(x)(y(x) + 2z_2(x)) =: \tilde{f}(x)y(x) \end{aligned}$$

mit  $\tilde{f}(x) := y(x) + 2z_2(x)$  und  $y(x_0) = 0$ . Man kann sich  $\tilde{f}(x)$  als gegebene Funktion denken. Demzufolge erfüllt  $y(x)$  das Anfangswertproblem einer linearen Differentialgleichung, welches eindeutig lösbar ist. Die Lösung lautet  $y(x) \equiv 0$ .  $\blacksquare$

Die Existenz einer Lösung wird später, Folgerung 3.35, bewiesen.

**Satz 2.36 Konstruktion aller Lösungen mit einer bekannten Lösung.** *Sei  $z_0 \in C^1(a, b)$  eine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung (2.14) mit  $f \in C(a, b)$ . Die Funktion  $y \in C^1(\alpha, \beta)$ ,  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ , ist genau dann eine von  $z_0(x)$  verschiedene Lösung von (2.14), das heißt  $y(x) \neq z_0(x)$  in  $(\alpha, \beta)$ , wenn*

$$u(x) = \frac{1}{y(x) - z_0(x)}$$

in  $(\alpha, \beta)$  eine nicht verschwindende Lösung, das heißt  $u(x) \neq 0$  für alle  $x \in (\alpha, \beta)$ , der linearen Differentialgleichung

$$u'(x) + 2z_0(x)u(x) + 1 = 0 \tag{2.15}$$

ist.

**Beweis:** Verwende den Ansatz

$$z_0(x) = y(x) - \frac{1}{u(x)} \implies z_0'(x) = y'(x) + \frac{u'(x)}{u^2(x)}.$$

Dieser Ansatz ist wohldefiniert, da  $u(x) \neq 0$  in  $(\alpha, \beta)$ . Einsetzen in (2.14) ergibt

$$\begin{aligned} y'(x) + \frac{u'(x)}{u^2(x)} &= y^2(x) - \frac{2y(x)}{u(x)} + \frac{1}{u^2(x)} - f(x) \implies \\ y'(x) - y^2(x) + f(x) &= \frac{1}{u^2(x)} (1 - 2y(x)u(x) - u'(x)) \\ &= \frac{1}{u^2(x)} \left( 1 - 2z_0(x)u(x) - 2\frac{u(x)}{u(x)} - u'(x) \right) \\ &= -\frac{1}{u^2(x)} (1 + 2z_0(x)u(x) + u'(x)). \end{aligned}$$



i) Ist  $y(x)$  die Lösung von (2.14), so ist die linke Seite gleich Null und  $u(x)$  erfüllt die Differentialgleichung (2.15), da  $1/u^2(x) > 0$ .

ii) Genügt andererseits  $u(x)$  der Gleichung (2.15) und ist  $u(x) \neq 0$  in  $(\alpha, \beta)$ , so erfüllt  $y(x)$  (2.14) und es gilt  $y(x) \neq z_0(x)$  in  $(\alpha, \beta)$ , da

$$y(x) = z_0(x) + \frac{1}{u(x)}.$$

Da  $1/u(x) \neq 0$  ist, gilt  $y(x) \neq z_0(x)$  für alle  $x \in (\alpha, \beta)$ . ■

**Bemerkung 2.37 Bestimmung aller Lösungen von (2.14).** Die Bestimmung aller Lösungen von (2.14), im Falle dass eine Lösung bekannt ist, erfolgt wie der Beweis der beiden letzten Sätze. Sei  $z_0(x)$  eine bekannte Lösung von (2.14).

- Sei  $z_1(x)$  eine andere Lösung von (2.14), dann erfüllt die Differenz  $y(x) = z_1(x) - z_0(x)$  die Differentialgleichung

$$y'(x) = y^2(x) + 2z_0(x)y(x).$$

Das ist eine Bernoullische Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung man bestimmen kann.

- Oder man verwendet den Ansatz vom Beweis von Satz 2.36:

$$y(x) = z_0(x) + \frac{1}{u(x)}$$

und berechnet  $u(x)$  durch Lösen von (2.15). □

**Beispiel 2.38** Gesucht ist die Lösung von

$$y'(x) = y^2(x) - (2x + 1)y(x) + (1 + x + x^2),$$

vgl. Kamke S. 43.

i) *Finden einer speziellen Lösung.* Das ist der schwierigste Teil, im allgemeinen hilft nur scharfes Hinsehen und Probieren. In diesem Beispiel ist  $z_0(x) = x$  eine Lösung.

ii) *Ansatz.*

$$y(x) = z_0(x) + \frac{1}{u(x)} \implies y'(x) = 1 - \frac{u'(x)}{u^2(x)}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$u'(x) = u(x) - 1.$$

iii) *Lösen der linearen Differentialgleichung.*

$$u(x) = 1 + ce^x.$$

iv) *Rücksubstitution.*

$$y(x) = z_0(x) + \frac{1}{u(x)} = x + \frac{1}{1 + ce^x}.$$

Das ist die allgemeine Lösung der Riccatischen Differentialgleichung. □

## 2.7 Die exakte Differentialgleichung

**Definition 2.39 Gradientenfeld.** Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet. In  $G$  seien die Funktionen  $P(x, y)$  und  $Q(x, y)$  definiert. Gibt es eine Funktion  $F(x, y) \in C^2(G)$ , so dass

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$$

gelten, so nennt man das Vektorfeld mit den Komponenten  $P(x, y)$  und  $Q(x, y)$  ein Gradientenfeld.  $\square$

**Satz 2.40** Seien  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein konvexes Gebiet und  $P, Q \in C^1(G)$ . Notwendig und hinreichend dafür, dass das Vektorfeld  $(P(x, y), Q(x, y))^T$  ein Gradientenfeld darstellt ist

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad \text{für alle } (x, y) \in G, \quad (2.16)$$

die sogenannte Integrabilitätsbedingung.

**Beweis:** *i) Notwendigkeit.* Sei  $(P(x, y), Q(x, y))^T = \nabla F(x, y)$  ein Gradientenfeld mit  $F \in C^2(G)$ . Nach dem Satz von Schwarz gilt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) \quad \implies \quad \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in G.$$

*ii) Hinlänglichkeit.* Es wird eine Konstruktion für eine Funktion  $F(x, y)$  angegeben, deren partielle Ableitungen gerade die Komponenten des Gradientenfeldes sind.

Sei (2.16) erfüllt. Die Konvexität von  $G$  bedeutet, dass jede Gerade, die zwei Punkte aus  $G$  miteinander verbindet, vollständig in  $G$  liegt. Daraus folgt, dass achsenparallele Geraden den Rand von  $G$  höchstens in zwei Punkten schneiden. Betrachte eine Gerade parallel zur  $x$ -Achse, die den Rand von  $G$  in genau zwei Punkten schneidet. Der linke Schnittpunkt sei  $(x_0, y_0)$ . Dann gibt es eine Funktion  $F_1(x, y)$  mit

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) = P(x, y), \quad \text{da} \quad F_1(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) \, dx. \quad (2.17)$$

Dazu wählt man bei festem  $y$  eine Stammfunktion bezüglich  $x$  von  $P(x, y)$ . Betrachte jetzt den Ansatz

$$F(x, y) = F_1(x, y) + \phi(y). \quad (2.18)$$

Dann ist  $\partial F / \partial x(x, y) = P(x, y)$  erfüllt. Für die andere partielle Ableitung gilt

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) + \phi'(y) = Q(x, y).$$

Daraus folgt

$$\phi'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y). \quad (2.19)$$

Damit gilt

$$0 = \frac{\partial \phi'(y)}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y}(x, y) \stackrel{(2.17)}{=} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y).$$

Diese Gleichung ist nach Voraussetzung (2.16) erfüllt. Also existiert eine Funktion  $\phi(y)$ , die für den Ansatz (2.18) geeignet ist und diese lässt sich aus (2.19) bestimmen. Damit ist  $(P(x, y), Q(x, y))^T$  ein Gradientenfeld.  $\blacksquare$

### Bemerkung 2.41

- o Die Voraussetzungen an das Gebiet im Satz 2.40 lassen sich abschwächen. Es reicht ein sternförmiges Gebiet, siehe Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 2, Paragraph 182. Insbesondere sind nicht einfach zusammenhängende Gebiete, also Gebiete mit Loch, nicht sternförmig.

- Man beachte die Beziehung der Aussage von Satz 2.40 zur Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

bei festem Anfangs- und Endpunkt der Kurve  $C \subset G$ .

□

**Definition 2.42 Exakte Differentialgleichung.** Seien  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein konvexes Gebiet,  $P, Q \in C^1(G)$  mit  $Q(x, y) \neq 0$  für alle  $(x, y) \in G$ . Weiter sei die Integrabilitätsbedingung (2.16) erfüllt. Dann nennt man die Differentialgleichung

$$y'(x) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} \quad (2.20)$$

Exakte Differentialgleichung.

□

**Satz 2.43 Lösung der Exakten Differentialgleichung.** Eine Funktion  $y(x)$  mit  $y \in C^1(I)$  und  $\{(x, y) : x \in I, y = y(x)\} \subset G$  ist genau dann Lösung der Exakten Differentialgleichung (2.20), wenn

$$F(x, y(x)) = \text{const} \quad \forall x \in I, \quad \text{und} \quad \nabla F(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

gelten.

**Beweis:** Sei  $y(x)$  eine Lösung der Exakten Differentialgleichung, das heißt  $y(x)$  erfüllt (2.20). Da die Integrabilitätsbedingung (2.16) erfüllt ist, gibt es nach Satz 2.40 eine Funktion  $F(x, y)$  mit  $\nabla F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))^T$ . Es folgt durch Differentiation, unter Nutzung der Kettenregel für Funktionen mit vektorwertigen Argumenten,

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dx}(x, y(x)) &:= (F(x, y(x)))' \stackrel{\text{KR}}{=} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))y'(x) \\ &= P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x) \stackrel{(2.20)}{=} 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Daraus folgt  $F(x, y) = \text{const}$ .

Ist andererseits  $F(x, y) = \text{const}$ , dann folgt  $\frac{dF}{dx}(x, y) = 0$  für alle  $(x, y) \in G$ . Mit der Kettenregel, siehe (2.21), folgt weiter, dass  $y(x)$  dann die Exakte Differentialgleichung (2.20) löst. ■

**Satz 2.44 Eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems der Exakten Differentialgleichung.** Seien die Voraussetzungen von Satz 2.43 erfüllt. Für jeden Punkt  $(x_0, y_0) \in G$  ist das Anfangswertproblem für die Exakte Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung  $(x_0, y_0)$  eindeutig lösbar. Man erhält die Lösung durch Auflösen der Gleichung

$$F(x, y(x)) = F(x_0, y_0) (= \text{const}) \quad (2.22)$$

nach  $y(x)$ .

**Beweis:** Aus Satz 2.43 folgt, dass  $y(x)$  genau dann Lösung des Anfangswertproblems ist, wenn (2.22) erfüllt ist. Wegen

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in G,$$

ist die Auflösung von (2.22) nach  $y(x)$  nach dem Satz über die implizite Funktion eindeutig möglich. ■

**Bemerkung 2.45 Niveaukurven.** Die Graphen der Lösung der Exakten Differentialgleichung stellen im  $\mathbb{R}^2$  gerade die Niveaukurven (Höhenlinien, Kurven mit konstantem Funktionswert) der Funktion  $F(x, y)$  dar. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt, dass durch jedes  $(x_0, y_0) \in G$  genau eine Niveaukurve geht.  $\square$

**Bemerkung 2.46 Nichterfülltsein der Integrabilitätsbedingung.** Betrachte eine Differentialgleichung der Gestalt (2.20) bei der bis auf die Integrabilitätsbedingung (2.16) alle Bedingungen von Definition 2.42 erfüllt sind. Dann kann diese Differentialgleichung durch Erweiterung mit einer geeigneten Funktion  $\lambda(x, y) \in C^1(G)$  exakt gemacht werden. Diese Funktion genügt der partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{\partial(\lambda P)}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial(\lambda Q)}{\partial x}(x, y), \quad (2.23)$$

die der Integrabilitätsbedingung (2.16) entspricht. Sie wird integrierender Faktor oder Euler<sup>3</sup>scher Multiplikator genannt.

Oft kann man  $\lambda(x, y)$  durch erraten oder überprüfen von (2.23) erhalten.  $\square$

**Beispiel 2.47** Gesucht ist die Lösung von

$$y'(x) = - \left( 1 + \frac{1}{x + y(x)} \right) \quad \text{mit} \quad (x, y) \in G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}.$$

Es ist

$$y'(x) = - \frac{1 + \frac{1}{x+y(x)}}{1} = - \frac{P_1(x, y)}{Q_1(x, y)}.$$

Damit folgen, mit der Bezeichnung  $y = y(x)$ ,

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial P_1}{\partial y}(x, y) = - \frac{1}{(x+y)^2} \quad \implies \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x}(x, y) \neq \frac{\partial P_1}{\partial y}(x, y).$$

Als integrierenden Faktor kann man  $\lambda(x, y) = x + y$  wählen. Dann ist

$$y'(x) = - \frac{\lambda(x, y)P_1(x, y)}{\lambda(x, y)Q_1(x, y)} = - \frac{x + y + 1}{x + y} = - \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (2.24)$$

Jetzt ist die Differentialgleichung wegen

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = 1$$

exakt.

Nun löst man (2.24) mit Integration

$$F_1(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx = \int_{x_0}^x (x + y + 1) dx = \frac{x^2}{2} + xy + x + c.$$

Mit dem Ansatz  $F(x, y) = F_1(x, y) + \phi(y)$  erhält man

$$Q(x, y) = \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y) + \phi'(y) = x + \phi'(y) \quad \implies \quad \phi'(y) = y,$$

also

$$\phi(y) = \frac{y^2}{2} + c.$$

---

<sup>3</sup>Leonhard Euler (1707 – 1783)

Damit ist

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} + x + c = \frac{(x+y)^2}{2} + x + c.$$

Eine explizite Lösung  $y(x)$  erhält man durch Auflösen von  $F(x, y) = \text{const}$  nach  $y$ . Ist ein Anfangswertproblem zu lösen, so bestimmt man die Konstante  $c \in \mathbb{R}$  durch Einsetzen.

Die Niveaukurven sind durch

$$0 = \frac{(x+y)^2}{2} + x + c.$$

gegeben. Mit der Koordinatentransformation

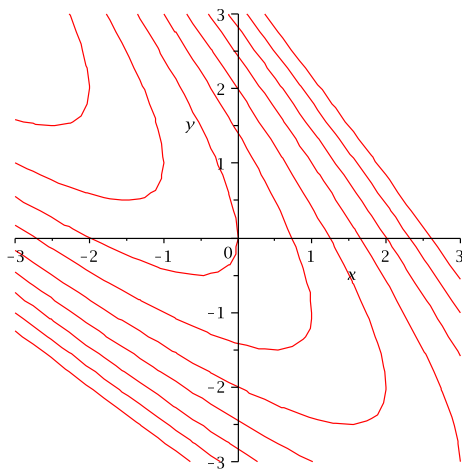
$$\xi = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{-x+y}{\sqrt{2}}$$

erhält man daraus

$$0 = \xi^2 + \frac{\xi - \eta}{\sqrt{2}} + c \implies \eta = \sqrt{2}\xi^2 + \xi + c.$$

Das sind Gleichungen von Parabeln im  $\xi$ - $\eta$ -Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^2$ . Für die Koordinatenachsen dieses Systems gilt

$$\xi = 0 \implies y = -x, \quad \eta = 0 \implies y = x.$$



Die Lösungen der Differentialgleichung sind die Kurvenstücke oberhalb der Geraden  $y = -x$ . Diese Kurvenstücke sind Funktionen.  $\square$

## Kapitel 3

# Allgemeine Existenz– und Eindeutigkeitsätze

### 3.1 Allgemeines

Man hat bei den Spezialfällen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung aus Kapitel 2 gesehen, dass es immer schwieriger wurde, analytische Lösungen anzugeben. Bei einer allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung wird das nicht mehr möglich sein. Trotzdem kann man auch im allgemeinen Fall Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen untersuchen.

**Bemerkung 3.1 Inhalt des Kapitels.** In diesem Kapitel werden zwei grundlegende Sätze behandelt:

- Satz von Picard–Lindelöf (sukzessive Approximation):
  - beruht auf dem Banachschen Fixpunktsatz,
  - Voraussetzung: Stetigkeit und partielle Lipschitz–Bedingung der rechten Seite,
  - Ergebnis: Existenz und Eindeutigkeit.
- Satz von Peano (Polygonzüge):
  - Voraussetzung: Stetigkeit der rechten Seite,
  - Ergebnis: Existenz.

□

**Bemerkung 3.2 Explizite Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung.** In diesem Kapitel werden explizite Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachtet, da Untersuchungen für Systeme nicht anders sind als für eine einzelne Gleichung. Seien  $y_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i : D(f_i) = D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dann werden die Vektoren

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

definiert. Die betrachteten Systeme haben dann die Form

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \quad \text{oder} \quad y_i'(x) = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.1)$$

Das zugehörige Anfangswertproblem lautet wie folgt. Gegeben seien  $n + 1$  reelle Zahlen  $x^{(0)}, y_1^0, \dots, y_n^0$  mit  $(x^{(0)}, y_1^0, \dots, y_n^0) \in D$ . Gesucht ist eine Lösung von (3.1) mit  $y_i(x^{(0)}) = y_i^0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . □

**Bemerkung 3.3 Umformung einer Differentialgleichung in äquivalente Integralgleichung.** Sei  $\mathbf{y}(x)$  eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(x^{(0)}) = \mathbf{y}^{(0)}, \quad x \in I = [a, b], \quad x^{(0)} \in I,$$

wobei  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  stetig ist. Wegen der Stetigkeit beider Seiten der Differentialgleichung kann man diese integrieren und man erhält

$$\begin{aligned} \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{y}'(t) dt &= \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt \implies \\ \mathbf{y}(x) &= \mathbf{y}(x^{(0)}) + \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dies ist eine Integralgleichung. Jede Lösung des Anfangswertproblems ist Lösung der Integralgleichung und umgekehrt.  $\square$

## 3.2 Der Satz von Picard–Lindelöf

Zur Formulierung und zum Beweis dieses Satzes werden einige Vorbereitungen benötigt.

**Definition 3.4 Lipschitz<sup>1</sup>–Bedingung, Lipschitz–Konstante, Lipschitz–Stetigkeit.** Eine Funktion  $f(x)$  mit  $D(f) = I$  genügt im Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  einer Lipschitz–Bedingung, falls für alle  $x_1, x_2 \in I$

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|$$

mit einer Konstanten  $L \geq 0$  gilt. Diese Konstante wird Lipschitz–Konstante genannt und die Funktion  $f(x)$  Lipschitz–stetig.  $\square$

**Bemerkung 3.5 Zusammenhang mit anderen Stetigkeitsbegriffen.** Eine Funktion  $f(x)$ , die in  $I$  einer Lipschitzbedingung genügt ist in  $I$  auch stetig, denn es gilt für alle  $x_1, x_2 \in I$

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1} |f(x_1) - f(x_2)| \leq L \lim_{x_2 \rightarrow x_1} |x_1 - x_2| = 0.$$

Allgemein gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{array}{ccc} f(x) \text{ stetig in } (a, b) & \iff & f(x) \text{ stetig in } [a, b] \\ \uparrow & & \updownarrow \\ f(x) \text{ gleichmäßig stetig in } (a, b) & \iff & f(x) \text{ gleichmäßig stetig in } [a, b] \\ \uparrow & & \uparrow \\ f(x) \text{ Lipschitz–stetig in } (a, b) & \iff & f(x) \text{ Lipschitz–stetig in } [a, b] \\ \uparrow & & \uparrow \\ f(x) \text{ differenzierbar in } (a, b) & \iff & f(x) \text{ differenzierbar in } [a, b] \\ \downarrow & & \\ f(x) \text{ stetig in } (a, b) & & \end{array}$$

Einige dieser Beziehungen folgen direkt aus der Definition der Begriffe, andere werden als Übungsaufgaben bewiesen.

Insgesamt ist Lipschitz–Stetigkeit von  $f(x)$  in einem abgeschlossenen Intervall etwas weniger als Differenzierbarkeit, aber mehr als Stetigkeit von  $f(x)$ .  $\square$

<sup>1</sup>Rudolf Lipschitz (1832 – 1903)

**Lemma 3.6** Die Funktion  $f(x)$  sei in  $[a, b]$  differenzierbar und die Ableitung  $f'(x)$  sei in  $[a, b]$  beschränkt, das heißt  $f \in C^1([a, b])$ . Dann erfüllt  $f(x)$  in  $[a, b]$  eine Lipschitz-Bedingung mit

$$L = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|.$$

**Beweis:** mit Mittelwertsatz der Differentialrechnung, Übungsaufgabe. ■

**Beispiel 3.7**

- Die Funktion  $f(x) = |x|$  ist in  $[-1, 1]$  nicht differenzierbar, jedoch Lipschitz-stetig mit  $L = 1$ . Das folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |x_1| &\leq |x_2 - x_1| + |x_2| \implies |x_1| - |x_2| \leq |x_2 - x_1|, \\ |x_2| &\leq |x_2 - x_1| + |x_1| \implies |x_2| - |x_1| \leq |x_2 - x_1|, \\ &\implies ||x_2| - |x_1|| \leq |x_2 - x_1|. \end{aligned}$$

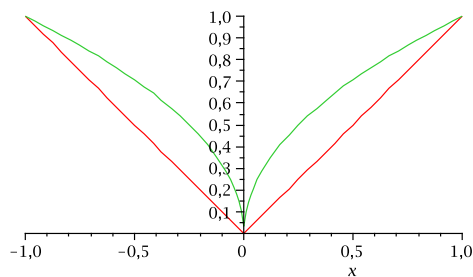
- Betrachte  $f(x) = \sqrt{|x|}$  in  $[-1, 1]$ . Diese Funktion ist in diesem Intervall stetig, sie erfüllt aber keine Lipschitz-Bedingung. Das zeigt man durch einen indirekten Beweis. Sei also eine Lipschitz-Bedingung erfüllt. Dann gilt für alle  $x_1, x_2 \in [-1, 1]$

$$\left| \sqrt{|x_2|} - \sqrt{|x_1|} \right| \leq L |x_2 - x_1|.$$

Betrachte jetzt speziell  $x_1 = 0, x_2 \neq 0$ . Dann folgt

$$\left| \sqrt{|x_2|} \right| \leq L |x_2| \implies \frac{1}{\sqrt{|x_2|}} \leq L.$$

Das gilt aber nicht für  $x_2 \rightarrow 0$ , im Widerspruch zur Annahme.



□

**Bemerkung 3.8 Normen von Vektoren.** Wir werden im folgenden Normen von Vektoren des  $\mathbb{R}^n$  benötigen. Da im  $\mathbb{R}^n$  alle Normen äquivalent sind, spielt die Wahl der Norm keine entscheidende Rolle. Zur Einfachheit werden wir die Maximumnorm betrachten

$$\|\mathbf{y}\| := \|\mathbf{y}\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} |y_i|, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

□



**Definition 3.9 Lipschitz-Bedingung bezüglich von Variablen.** Sei  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$  wie im System (3.1). Dann erfüllt  $f(x, \mathbf{y})$  eine Lipschitz-Bedingung bezüglich der Variablen  $y_1, \dots, y_n$ , falls für alle  $(x, y_1, \dots, y_n)$  und  $(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$  gilt

$$\|f(x, y_1, \dots, y_n) - f(x, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)\|_\infty \leq L \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|_\infty$$

mit  $L \in \mathbb{R}$ . □

**Lemma 3.10** Die Funktion  $f(x, \mathbf{y})$  sei stetig differenzierbar nach  $y_1, \dots, y_n$  im Quader

$$Q := \left\{ (x, \mathbf{y}) : \left| x - x^{(0)} \right| \leq a, |y_j - y_j^0| \leq b, j = 1, \dots, n \right\}.$$

Dann erfüllt  $f(x, \mathbf{y})$  bezüglich  $y_1, \dots, y_n$  eine Lipschitz-Bedingung.

**Beweis:** Genauso wie von Lemma 3.6, Übungsaufgabe. ■

Es folgen einige Wiederholungen aus der Analysisvorlesung.

**Definition 3.11 Metrischer Raum.** Sei  $E$  eine nichtleere Menge. Eine Metrik (ein Abstand) auf  $E$  ist eine Abbildung  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit den folgenden Eigenschaften:

- 1.)  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
- 2.)  $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in E$  (Symmetrie),
- 3.)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \forall x, y, z \in E$  (Dreiecksungleichung).

Das Paar  $(E, d)$  heißt metrischer Raum. □

**Definition 3.12 Cauchy<sup>2</sup>-Folge.** Seien  $(E, d)$  ein metrischer Raum und  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $a_n \in E$  für alle  $n$ . Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  heißt Cauchy-Folge, falls für jedes  $\varepsilon > 0$   $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  existiert mit

$$d(a_n, a_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0(\varepsilon).$$

Die Folgenglieder weichen untereinander beliebig wenig ab, wenn die Indizes hinreichend groß sind. □

**Definition 3.13 Vollständiger metrischer Raum.** Ein metrischer Raum  $(E, d)$  heißt vollständig, wenn in ihm jede Cauchy-Folge konvergiert. □

**Definition 3.14 Kontrahierende oder kontraktive Abbildung.** Seien  $(E, d)$  ein metrischer Raum,  $A \subset E$  eine Teilmenge und  $T : A \rightarrow E$  eine Abbildung. Die Abbildung wird kontrahierend oder kontraktiv genannt, falls es ein  $\kappa \in [0, 1)$  gibt, so dass

$$d(T(x), T(y)) \leq \kappa d(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in A$$

ist. Der Abstand der Bilder ist also kleiner als der Abstand der Urbilder. □

**Definition 3.15 Norm, Banach-Raum.** Eine Norm  $\|\cdot\|$  auf einem Vektorraum  $E$  ist eine Abbildung  $E \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  mit folgenden Eigenschaften:

- 1.)  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ,
- 2.)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall x \in E, \forall \lambda \in K$ ,
- 3.)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in E$  (Dreiecksungleichung).

---

<sup>2</sup>Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)

Ein vollständiger normierter Raum  $(E, \|\cdot\|)$  heißt Banach<sup>3</sup>-Raum. □

**Beispiel 3.16** Sei  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . Der Raum der auf  $I$  stetigen vektorwertigen Funktionen

$$[C(I)]^n := \{\mathbf{y}(x) : x \in I, y_i(x) \text{ stetig auf } I, i = 1, \dots, n\}$$

ausgestattet mit der Norm

$$\|\mathbf{y}\|_{[C(I)]^n} := \max_{x \in I} \|\mathbf{y}(x)\| \quad (3.3)$$

ist ein Banach-Raum. □

**Satz 3.17 Fixpunktsatz von Banach (1920).** *Seien  $A$  eine nichtleere, abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes  $(E, d)$  und  $T : A \rightarrow A$  eine kontrahierende Abbildung von  $A$  in sich. Dann gibt es genau einen Fixpunkt  $\hat{x} \in A$  mit  $T(\hat{x}) = \hat{x}$ . Dieser ist der Grenzwert der sukzessiven Approximation*

$$x^{(n+1)} = T(x^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

mit beliebigem Startwert  $x^{(0)} \in A$ .

**Beweis:** Analysis-Vorlesung, Literatur. ■

**Satz 3.18 Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard<sup>4</sup>-Lindelöf<sup>5</sup>.** *Betrachte das Anfangswertproblem*

$$y'_j(x) = f_j(x, y_1, \dots, y_n), \quad y_j(x^{(0)}) = y_j^0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.4)$$

auf dem abgeschlossenen und beschränkten (kompaktem) Quader

$$Q := \{(x, \mathbf{y}) : |x - x^{(0)}| \leq a, |y_j - y_j^0| \leq b, j = 1, \dots, n\}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+.$$

Die Funktion  $\mathbf{f} : Q \rightarrow \mathbb{R}$  sei auf  $Q$  stetig und sie genüge einer Lipschitz-Bedingung bezüglich  $\mathbf{y}$ :

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \bar{\mathbf{y}})\| \leq L \max_{1 \leq j \leq n} \max_{x \in [x^{(0)} - a, x^{(0)} + a]} |y_j(x) - \bar{y}_j(x)| =: L \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\|, \quad (3.5)$$

für alle  $(x, \mathbf{y}), (x, \bar{\mathbf{y}}) \in Q$  mit  $L \in \mathbb{R}_0^+$ . Dann gibt es eine Zahl  $M > 0$ , so dass gilt

$$|f_j(x, \mathbf{y})| \leq M \quad \text{für alle } (x, \mathbf{y}) \in Q, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Das Anfangswertproblem (3.4) besitzt auf dem Intervall

$$I := [x^{(0)} - a, x^{(0)} + a] \cap [x^{(0)} - c, x^{(0)} + c]$$

mit

$$c := \min \left\{ \frac{1}{\alpha L}, \frac{b}{M} \right\} \quad \text{mit } \alpha > 1 \text{ beliebig}, \quad (3.7)$$

genau eine Lösung  $\mathbf{y} \in [C^1(I)]^n$ . Die sukzessive Approximation

$$\mathbf{y}^{(k+1)}(x) := \mathbf{y}^{(0)}(x) + \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}^{(k)}(t)) dt, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \mathbf{y}^{(0)}(x) := \mathbf{y}^0, \quad (3.8)$$

konvergiert auf  $I$  gegen diese Lösung  $\mathbf{y}(x)$ .

<sup>3</sup>Stefan Banach (1892 – 1945)

<sup>4</sup>Emile Picard (1856 – 1941)

<sup>5</sup>Ernst Lindelöf (1870 – 1946)

**Beweis:** Die Beschränktheit von  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  auf  $Q$  folgt nach dem Satz von Weierstraß<sup>6</sup> aus der Stetigkeit von  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  und der Abgeschlossenheit von  $Q$ .

Der Beweis der Existenz und der Eindeutigkeit der Lösung erfolgt durch Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes 3.17. Betrachte dazu die Abbildung

$$T\mathbf{y}(x) := \mathbf{y}^0 + \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt, \quad x \in I. \quad (3.9)$$

Nach Bemerkung 3.3 folgt, dass ein Fixpunkt dieser Abbildung eine Lösung von (3.4) ist.

Zunächst wird gezeigt, dass das Bild dieser Abbildung eine stetige Funktion ist. Seien  $\hat{x}, \tilde{x} \in I$ , dann gilt

$$\begin{aligned} \|T\mathbf{y}(\hat{x}) - T\mathbf{y}(\tilde{x})\| &= \left\| \mathbf{y}^0 + \int_{x^{(0)}}^{\hat{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt - \mathbf{y}^0 - \int_{x^{(0)}}^{\tilde{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt \right\| \\ &= \left\| \int_{\tilde{x}}^{\hat{x}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt \right\| \leq \int_{\min\{\tilde{x}, \hat{x}\}}^{\max\{\tilde{x}, \hat{x}\}} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))\| dt \\ &\leq |\hat{x} - \tilde{x}| \max_{x \in I} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t))\| \leq M |\hat{x} - \tilde{x}|, \end{aligned}$$

woraus folgt  $T\mathbf{y}(\hat{x}) \rightarrow T\mathbf{y}(\tilde{x})$  für  $\hat{x} \rightarrow \tilde{x}$ . Wegen der Stetigkeit von  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  ist das Integral als Funktion der oberen Grenze wohldefiniert und es gilt  $(T\mathbf{y})'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$  für alle  $x \in I$ . Damit ist die Funktion  $T\mathbf{y}(x)$  auch differenzierbar. Offenbar gilt  $T\mathbf{y}(x^{(0)}) = \mathbf{y}^0$ .

Nun wird gezeigt, dass die Abbildung  $T$  die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

*Abgeschlossener Definitionsbereich von  $T$ .* Betrachte die Menge

$$A := \{\mathbf{y} \in [C(I)]^n : \|\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}^0\| \leq b \text{ für alle } x \in I\}.$$

Die Menge  $A \neq \emptyset$  ist eine abgeschlossene Teilmenge des Banach-Raumes  $[C(I)]^n$ . Das  $A$  eine Teilmenge von  $[C(I)]^n$  ist folgt aus dem ersten Teil des Beweises. Die Abgeschlossenheit erhält man wie folgt. Sei  $\{\mathbf{y}^{(k)}(x)\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\mathbf{y}^{(k)} \in A$ , eine konvergente Folge mit Grenzwert  $\mathbf{y} \in [C(I)]^n$ , das heißt es gilt

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{y}^{(k)}(x) - \mathbf{y}(x) \right\|_{[C(I)]^n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{x \in I} \left\| \mathbf{y}^{(k)}(x) - \mathbf{y}(x) \right\|.$$

Mit Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}^0\|_{[C(I)]^n} &\leq \left\| \mathbf{y}(x) - \mathbf{y}^{(k)}(x) \right\|_{[C(I)]^n} + \left\| \mathbf{y}^{(k)}(x) - \mathbf{y}^0 \right\|_{[C(I)]^n} \\ &\leq \left\| \mathbf{y}(x) - \mathbf{y}^{(k)}(x) \right\|_{[C(I)]^n} + b. \end{aligned}$$

Bildet man auf beiden Seiten den Grenzwert  $k \rightarrow \infty$ , erhält man

$$\|\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}^0\|_{[C(I)]^n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathbf{y}(x) - \mathbf{y}^{(k)}(x) \right\|_{[C(I)]^n} + b = b.$$

Demzufolge gilt  $\mathbf{y} \in A$ .

$T$  ist eine Abbildung von  $A$  in sich. Als nächstes wird gezeigt, dass  $T$  die abgeschlossene Menge  $A$  in sich abbildet, unter der Bedingung, dass (3.7) erfüllt ist:

$$\max_{x \in I} \|(T\mathbf{y})(x) - \mathbf{y}^0\| = \max_{x \in I} \left\| \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt \right\| \leq M \max_{x \in I} |x - x^{(0)}| = Mc \leq b.$$

$T$  ist kontrahierend. Jetzt muss noch gezeigt werden, dass  $T$  kontrahierend ist. Seien  $\hat{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{y}} \in A$ , dann folgt mit der Lipschitz-Stetigkeit in der zweiten Komponente

$$\begin{aligned} \max_{x \in I} \|(T\hat{\mathbf{y}})(x) - (T\tilde{\mathbf{y}})(x)\| &= \max_{x \in I} \left( \left\| \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{y}}(t)) - \mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{y}}(t)) dt \right\| \right) \\ &\leq L \max_{x \in I} \left( \int_{\min\{x^{(0)}, x\}}^{\max\{x^{(0)}, x\}} \|\hat{\mathbf{y}}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t)\| dt \right) \\ &\leq L \max_{x \in I} |x - x^{(0)}| \max_{x \in I} \|\hat{\mathbf{y}}(x) - \tilde{\mathbf{y}}(x)\| \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \max_{x \in I} \|\hat{\mathbf{y}}(x) - \tilde{\mathbf{y}}(x)\|. \end{aligned}$$

---

<sup>6</sup>Karl Weierstraß (1815 – 1897)

Wegen  $\alpha > 1$  ist die Abbildung damit kontrahierend.

Damit sind alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Die Abbildung besitzt also einen eindeutigen Fixpunkt und die sukzessive Approximation (3.8) konvergiert gegen diesen Fixpunkt. ■

**Bemerkung 3.19**

- Die Einzigkeit der Lösung folgt aus der Lipschitz-Bedingung an die rechte Seite, siehe Beispiel 3.20.
- Erhöht man die Grenzen  $a$  oder  $b$  des Quaders  $Q$ , so können die Konstanten  $L$  und  $M$  höchstens wachsen und das von Satz 3.18 garantierte Existenzintervall einer eindeutigen Lösung kann höchstens kleiner werden. Das von diesem Satz garantierte Intervall ist aber im allgemeinen nicht das maximale Intervall, siehe Beispiel 3.21.
- Gelten Stetigkeit und Lipschitz-Bedingung gleichmäßig für alle  $a, b > 0$ , dann kann man eine globale Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, das heißt im Intervall  $[x^{(0)} - a, x^{(0)} + a]$  erwarten, siehe Satz 3.22.

□

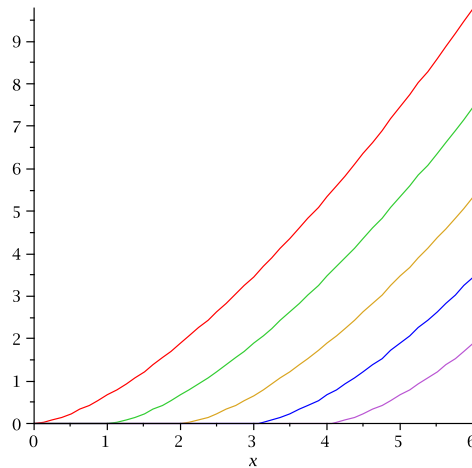
**Beispiel 3.20 Nichteindeutigkeit der Lösung bei verletzter Lipschitz-Bedingung.** Betrachte

$$y'(x) = \sqrt[3]{y(x)}, \quad y(0) = 0.$$

Die Voraussetzungen von Satz 3.18 sind bis auf die Lipschitz-Bedingung erfüllt. Die Funktion  $f(y)$  ist in keiner Umgebung von  $x^{(0)} = 0$  Lipschitz-stetig. Das obige Problem besitzt unendliche viele Lösungen

$$u_\sigma = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq \sigma, \\ \left(\frac{2}{3}(x - \sigma)\right)^{3/2} & \text{für } x > \sigma, \end{cases}$$

mit  $\sigma \in \mathbb{R}_0^+$  beliebig.



□

**Beispiel 3.21 Nichtmaximalität des Existenzintervalls einer eindeutigen Lösung.** Betrachte

$$y'(x) = y^3(x), \quad y(0) = 1,$$

also  $f(x, y) = y^3$ ,  $x^{(0)} = 0$ ,  $y^{(0)} = 1$ . Die Voraussetzungen des lokalen Satzes von Picard-Lindelöf, Satz 3.18, sind für jedes  $a > 0$  und jedes  $b > 0$  erfüllt. Es gelten

$$|f(x, y)| = |y^3| \implies \max_{(x,y) \in Q} |f(x, y)| = \max_{y \in [-b+1, b+1]} |y^3| = (b+1)^3 =: M$$

und

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 3y^2 \implies L = \max_{y \in [-b+1, b+1]} |3y^2| = 3(b+1)^2 =: L.$$

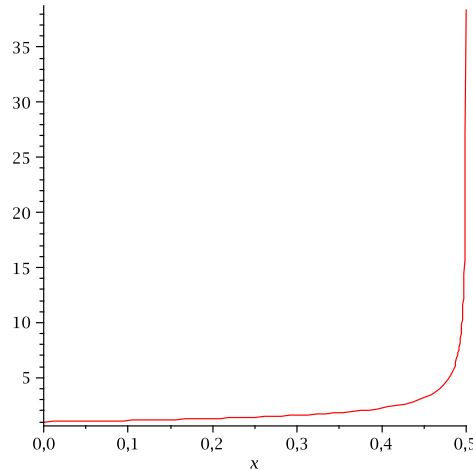
Nach dem lokalen Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf gibt es eine eindeutige Lösung  $y : [-c, c] \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$c = \min \left\{ \frac{1}{\alpha L}, \frac{b}{M} \right\} = \min \left\{ \frac{1}{\alpha 3(b+1)^2}, \frac{b}{(b+1)^3} \right\}, \quad \alpha > 1.$$

Der zweite Term nimmt sein Maximum  $0.148\overline{148}$  für  $b = 1/2$  an, so dass das  $c$  aus diesem Satz nicht größer als dieser Wert ist. Die analytische Lösung des Problems ist

$$y(x) = (1 - 2x)^{-1/2}.$$

Diese kann bis zu  $x < 0.5$  fortgesetzt werden. Dann kommt es zu einem sogenannten Blow-up.



Die Bestimmung des maximalen Definitionsbereiches von Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen ist ein wichtiges Gebiet, auf welches aus Zeitgründen allerdings nicht eingegangen werden kann.  $\square$

**Satz 3.22 Globaler Existenz- und Eindeutigkeitsatz.** Sei  $\mathbf{f} : [x^{(0)} - a, x^{(0)} + a] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und im zweiten Argument gleichmäßig Lipschitz-stetig. Das heißt, es existiert ein  $L > 0$ , so dass für alle  $x \in I := [x^{(0)} - a, x^{(0)} + a]$  und alle  $\mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(x, \bar{\mathbf{y}})\| \leq L \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}}\| \quad (3.10)$$

gilt. Dann besitzt das Anfangswertproblem (3.4) eine eindeutige Lösung  $\mathbf{y} \in [C^1(I)]^n$ .

**Beweis:** Der Beweis beruht wieder auf dem Banachschen Fixpunktsatz. Man stattet den Raum  $[C(I)]^n$  mit der Norm

$$\|\mathbf{y}\|_e := \max_{x \in I} \left( e^{-L|x-x^{(0)}|} \|\mathbf{y}(x)\| \right)$$

aus. Man kann zeigen, dass  $\|\mathbf{y}\|_e$  und  $\|\mathbf{y}\|_{[C(I)]^n}$  aus (3.3) äquivalente Normen sind. Demzufolge ist  $[C(I)]^n$  ausgestattet mit  $\|\mathbf{y}\|_e$  ein Banach-Raum.

Man betrachtet wieder die Abbildung  $T$  aus (3.9). Alle Eigenschaften von  $T$ , bis auf die Kontraktivität, weist man analog wie im Beweis von Satz 3.18 nach. Zum Beweis der Kontraktivität startet man wie folgt

$$\|T\hat{\mathbf{y}} - T\tilde{\mathbf{y}}\|_e = \max_{x \in I} \left( e^{-L|x-x^{(0)}|} \left\| \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{f}(t, \hat{\mathbf{y}}(t)) - \mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{y}}(t)) dt \right\| \right).$$

Wegen des Betrages im Exponenten und wegen der Norm um das Integral kann man an dieser Stelle ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $x > x^{(0)}$  annehmen. Dann erhält man weiter

$$\begin{aligned}
\|T\hat{\mathbf{y}} - T\tilde{\mathbf{y}}\|_e &\leq L \max_{x \in I} \left( e^{-L|x-x^{(0)}|} \int_{x^{(0)}}^x \|\hat{\mathbf{y}}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t)\| dt \right) \\
&= L \max_{x \in I} \left( e^{-L|x-x^{(0)}|} \int_{x^{(0)}}^x e^{L(t-x^{(0)})} e^{-L(t-x^{(0)})} \|\hat{\mathbf{y}}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t)\| dt \right) \\
&\leq L \max_{x \in I} \left( e^{-L|x-x^{(0)}|} \int_{x^{(0)}}^x e^{L(t-x^{(0)})} dt \right) \times \\
&\quad \max_{t \in [x^{(0)}, x]} \left\{ e^{-L(t-x^{(0)})} \|\hat{\mathbf{y}}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t)\| \right\} \\
&= L \max_{x \in I} \left( e^{-L|x-x^{(0)}|} \int_{x^{(0)}}^x e^{L(t-x^{(0)})} dt \right) \|\hat{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}\|_e \\
&= L \max_{x \in I} \left( e^{-L|x-x^{(0)}|} \frac{e^{L(x-x^{(0)})} - 1}{L} \right) \|\hat{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}\|_e \\
&= \max_{x \in I} \left( (1 - e^{-L|x-x^{(0)}|}) \right) \|\hat{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}\|_e \\
&\leq \left( 1 - e^{-L \max_{x \in I} |x-x^{(0)}|} \right) \|\hat{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}\|_e \\
&= \left( 1 - e^{-La} \right) \|\hat{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{y}}\|_e.
\end{aligned}$$

Das zeigt die Kontraktivität von  $T$ , da  $(1 - e^{-La}) < 1$  ist. Die Aussage des Satzes folgt nun mit dem Banachschen Fixpunktsatz. ■

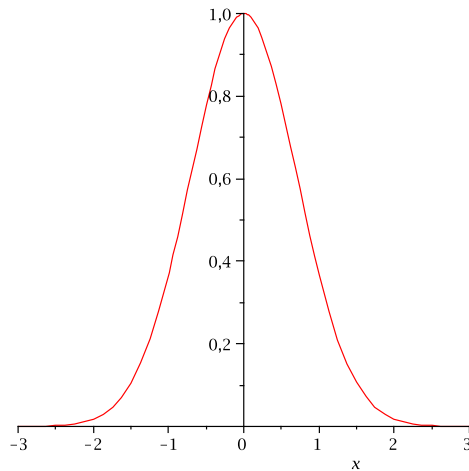
**Beispiel 3.23 Lösung eines Anfangswertproblems mit sukzessiver Approximation nach Picard–Lindelöf.** Betrachte die Gleichung

$$y'(x) = -2xy(x), \quad y(0) = 1.$$

Dieses Anfangswertproblem erfüllt die Voraussetzungen des globalen Existenz- und Eindeigkeitssatzes, Satz 3.22. Anwendung von (3.8) liefert

$$\begin{aligned}
y^{(0)}(x) &= 1 \\
y^{(1)}(x) &= y^{(0)} + \int_0^x (-2ty^{(0)}(t)) dt = 1 - \int_0^x 2t dt = 1 - x^2 \Big|_0^x = 1 - x^2, \\
y^{(2)}(x) &= y^{(0)} + \int_0^x (-2ty^{(1)}(t)) dt = 1 - \int_0^x 2t(1-t^2) dt = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}, \\
y^{(3)}(x) &= y^{(0)} + \int_0^x (-2ty^{(2)}(t)) dt = 1 - \int_0^x 2t \left( 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} \right) dt \\
&= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6}, \\
&\vdots \\
y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in das Anfangswertproblem bestätigt die Richtigkeit der Lösung.



□

**Satz 3.24 Stetige Abhängigkeit der Lösung von der Anfangsbedingung.** Seien die Voraussetzungen des globalen Existenz- und Eindeutigkeitsatzes, Satz 3.22, erfüllt. Dann hängt die Lösung  $\mathbf{y}(x)$  in der Norm  $\|\cdot\|_e$  stetig vom Anfangswert  $\mathbf{y}^0$  ab.

**Beweis:** Betrachte die Lösungen  $\mathbf{y}(x)$  und  $\tilde{\mathbf{y}}(x)$  zu den Anfangswerten  $\mathbf{y}^0$  und  $\tilde{\mathbf{y}}^0$ . Man verwendet wieder die Darstellung der Lösungen als Fixpunkt einer Integralgleichung. Dann folgt analog zum Beweis von Satz 3.22

$$\begin{aligned} \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|_e &= \left\| \mathbf{y}^0 - \tilde{\mathbf{y}}^0 + \int_{x(0)}^x (\mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) - \mathbf{f}(t, \tilde{\mathbf{y}}(t))) dt \right\|_e \\ &\leq \|\mathbf{y}^0 - \tilde{\mathbf{y}}^0\|_e + (1 - e^{-La}) \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|_e, \end{aligned}$$

also

$$\|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|_e \leq e^{La} \|\mathbf{y}^0 - \tilde{\mathbf{y}}^0\|_e.$$

Für  $\mathbf{y}^0 \rightarrow \tilde{\mathbf{y}}^0$  folgt also  $\mathbf{y}(x) \rightarrow \tilde{\mathbf{y}}(x)$  in  $\|\cdot\|_e$ . ■

**Bemerkung 3.25 Stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten.** Neben der stetigen Abhängigkeit der Lösung vom Anfangswert kann man auch die stetige Abhängigkeit der Lösung von der rechten Seite  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  beweisen (Heuser, Satz 13.1). Eine verbale Beschreibung der Ergebnisse ist: werden die Daten des Problems leicht gestört, so ist die Lösung des gestörten Problems im gewissen Sinne nahe bei der Lösung des ungestörten Problems. Diese Eigenschaft ist sehr wichtig für die Praxis, da man es dort im allgemeinen mit gestörten Problemen zu tun hat:

- $\mathbf{y}^0$  ist ein Messwert, dann treten Messfehler auf.
- $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  kommt aus einem Modell, dann treten Modellfehler auf.
- Bei der Nutzung numerischer Verfahren kann  $\mathbf{y}^0$  im allgemeinen nicht exakt dargestellt werden, zum Beispiel  $y^0 = \pi$ , und  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  kann nicht genau berechnet werden:  $f(x, y) = \sin(xy)$ ,  $x = 1$ ,  $y = \pi/4$ , daraus folgt  $\sin(xy) = \sqrt{2}/2$ . Für  $\pi$  und  $\sqrt{2}$  kennt der Computer nur Näherungswerte.

Die Abschätzung im Beweis von Satz 3.24 ist dergestalt, dass die Nachbarschaft einer Lösung und einer gestörten Lösung wegen des exponentiellen Faktors ziemlich schlecht sein kann. *Übungsaufgabe mit linearer Dgl.* □

### 3.3 Der Existenzsatz von Peano

Dies ist der zweite fundamentale Satz zur Theorie von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung. Es wird gezeigt, dass schon die Stetigkeit von  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$

für die Existenz einer Lösung ausreicht, allerdings nicht für deren Eindeutigkeit. Da man relativ wenig Voraussetzungen verwendet, wird die verwendete Analysis recht kompliziert.

**Definition 3.26 Gleichmäßig beschränkte Menge von Funktionen, gleichgradig stetige Menge von Funktionen.** Sei  $\mathcal{F}$  eine Menge reellwertiger Funktionen mit gemeinsamen Definitionsbereich  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Die Funktionen  $f \in \mathcal{F}$  heißen gleichmäßig beschränkt, falls eine Konstante  $M$  existiert, so dass für alle  $\mathbf{x} \in D$  und für alle  $f \in \mathcal{F}$  gilt

$$|f(\mathbf{x})| \leq M.$$

Die Funktionen aus  $\mathcal{F}$  heißen gleichgradig stetig, falls zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon) > 0$  existiert, so dass für alle  $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$  mit  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\| < \delta(\varepsilon)$  folgt

$$|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}')| < \varepsilon$$

für alle  $f \in \mathcal{F}$ . □

**Bemerkung 3.27** Gleichgradige Stetigkeit ist gegeben, falls:

- jede Funktion aus  $\mathcal{F}$  gleichmäßig stetig ist,
- alle Funktionen kommen bei ihrer gleichmäßigen Stetigkeit mit demselben  $\delta(\varepsilon)$  aus.

Gleichgradig stetig heißt also,  $\delta(\varepsilon)$  ist unabhängig von  $\mathbf{x}$  und  $f(\mathbf{x})$ . □

**Beispiel 3.28**  $\mathcal{F}$  sei die Menge aller Funktionen  $f(x)$  welche in  $I = [a, b]$  einer Lipschitz-Bedingung mit einheitlicher Lipschitz-Konstanten  $L$  genügen

$$|f(x) - f(x')| \leq L|x - x'| \quad \text{für alle } x, x' \in I, f \in \mathcal{F}.$$

Diese Menge ist gleichgradig stetig, wähle  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/L$ . □

**Lemma 3.29** Seien  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}$  eine abzählbare Menge,  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$  eine Folge reellwertiger Funktionen,  $D(f_n) = \mathcal{M}$  und  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$  ist auf  $\mathcal{M}$  gleichmäßig beschränkt. Dann kann man eine Teilfolge aus  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$  auswählen, die für alle Punkte  $x \in \mathcal{M}$  konvergiert.

**Beweis:** Sei  $\mathcal{M} = \{x_1, x_2, \dots\}$ . Betrachte die Zahlenfolge  $\{f_n(x_1)\}_{n \geq 1}$ . Diese ist nach Voraussetzung beschränkt  $|f_n(x_1)| \leq M$  für alle  $f_n(x)$ . Nach dem Satz von Bolzano<sup>7</sup>–Weierstraß kann man aus jeder beschränkten Folge eine konvergente Teilfolge auswählen. Diese sei  $\{f_n^{(1)}(x_1)\}_{n \geq 1}$ . Die Zahlenfolge  $\{f_n^{(1)}(x_2)\}_{n \geq 1}$  besitzt mit dem gleichen Argument ebenfalls eine konvergente Teilfolge:  $\{f_n^{(2)}(x_2)\}_{n \geq 1}$ . Führt man diese Konstruktion weiter, ergibt sich folgendes Bild

$$\begin{array}{ccccccc} f_1^{(1)}(x) & f_2^{(1)}(x) & f_3^{(1)}(x) & \dots & \text{konvergiert für } x \in \{x_1\}, \\ f_1^{(2)}(x) & f_2^{(2)}(x) & f_3^{(2)}(x) & \dots & \text{konvergiert für } x \in \{x_1, x_2\}, \\ f_1^{(3)}(x) & f_2^{(3)}(x) & f_3^{(3)}(x) & \dots & \text{konvergiert für } x \in \{x_1, x_2, x_3\}. \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{array}$$

Betrachte nun  $g_n(x) := f_n^{(n)}(x)$  als Teilfolge von  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ . Die Zahlenfolge  $\{g_n(x_i)\}_{n \geq 1}$  konvergiert für alle  $x_i$ , da die Folgeglieder von  $\{g_n(x_i)\}_{n \geq 1}$  bis auf die ersten  $(i-1)$  Glieder Teilfolge von  $\{f_n^{(n)}(x_i)\}_{n \geq 1}$  sind. Das heißt,  $\{g_n(x)\}_{n \geq 1}$  konvergiert für alle  $x \in \mathcal{M}$ . ■

<sup>7</sup>Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781 – 1848)



**Definition 3.30 Gleichmäßig konvergente Funktionenfolge.** Sei  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$ ,  $D(f_n) = I \subset \mathbb{R}$ , eine konvergente Funktionenfolge mit Grenzwert  $f(x)$ . Die Funktionenfolge heißt gleichmäßig konvergent, falls für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0(\varepsilon)$  existiert, so dass für alle  $x \in I$  und  $n \geq n_0(\varepsilon)$  gilt

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Gleichmäßig heißt, dass  $n_0(\varepsilon)$  unabhängig von  $x$  gewählt werden kann. □

**Satz 3.31 Satz von Arzelà<sup>8</sup>–Ascoli<sup>9</sup>.** Sei  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$  eine gleichmäßig beschränkte und gleichgradig stetige Funktionenfolge mit kompaktem (abgeschlossen und beschränkt) Definitionsbereich  $D$ . Dann kann man aus  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$  eine Teilfolge auswählen, die auf  $D$  gleichmäßig konvergiert.

**Beweis:** Sei  $\mathcal{M}$  eine abzählbar dichte Teilmenge von  $D$ . Nach Lemma 3.29 existiert eine Teilfolge  $\{f_n^*(x)\}_{n \geq 1}$ , die für alle  $x \in \mathcal{M}$  konvergiert. Es bleibt zu zeigen, dass  $\{f_n^*(x)\}_{n \geq 1}$  sogar gleichmäßig konvergiert.

Dieser Beweis ist recht technisch. Er beruht auf dem Überdeckungssatz von Heine<sup>10</sup>–Borel<sup>11</sup>, siehe Literatur. ■

**Satz 3.32 Existenzsatz von Peano<sup>12</sup>** Die Funktion  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  sei stetig auf dem abgeschlossenen und beschränkten (kompaktem) Quader

$$Q := \left\{ (x, \mathbf{y}) : \left| x - x^{(0)} \right| \leq a, \left| y_j - y_j^0 \right| \leq b, j = 1, \dots, n \right\}, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$$

sowie durch  $M > 0$  beschränkt

$$|f_j(x, \mathbf{y})| \leq M \quad \text{auf } Q, j = 1, \dots, n.$$

Sei

$$c := \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\},$$

dann gibt es auf  $J := [x^{(0)} - c, x^{(0)} + c]$  mindestens eine Lösung des Anfangswertproblems (3.4).

**Beweis:** Idee. Man konstruiert sich eine geeignete Funktionenfolge, welche die Bedingungen des Satzes von Arzelà–Ascoli erfüllt. Vom Grenzwert einer Teilfolge zeigt man, dass er eine Lösung der Integralgleichung (3.2) ist. Somit ist er auch Lösung des Anfangswertproblems (3.4).

*Konstruktion der Funktionenfolge.* Der Beweis wird für  $J_r := [x^{(0)}, x^{(0)} + c]$  geführt, für  $[x^{(0)} - c, x^{(0)}]$  geht er analog. Es sei  $Z$  eine beliebige Zerlegung von  $J_r$  in endlich viele Teilintervalle  $I_k := [x_k, x_{k+1}]$ ,  $k = 0, \dots, m-1$ ,  $x_0 = x^{(0)}$ ,  $x_m = x^{(0)} + c$ . Die maximale Länge eines Teilintervalls sei  $\eta_Z$ . Die Menge aller derartigen Zerlegungen wird mit  $\mathcal{Z}$  bezeichnet. Durch

$$\mathbf{y}_Z(x) := \mathbf{y}_Z(x_k) + (x - x_k) \mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_Z(x_k)), \quad \mathbf{y}_Z(x^{(0)}) = \mathbf{y}^0, \quad x \in I_k, \quad (3.11)$$

$k = 0, 1, \dots, m-1$  wird sukzessive auf  $I_0, \dots, I_{m-1}$  und damit auf ganz  $J_r$  eine von  $Z \in \mathcal{Z}$  abhängige stetige Funktion  $\mathbf{y}_Z(x)$  definiert. **Bild 1D** Die Funktionen  $\mathbf{y}_Z(x)$  sind stückweise lineare Funktionen, Polygonzüge in  $\mathbb{R}^n$ .

Man kann diese Funktionen auch mit Integralen schreiben. Setze dazu

$$\mathbf{F}_Z(x) = \mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_Z(x_k)) \quad \text{für } x \in I_k \setminus \{x_{k+1}\}.$$

<sup>8</sup>Cesare Arzelà (1847 – 1912)

<sup>9</sup>Giulio Ascoli (1843 – 1896)

<sup>10</sup>Heinrich Eduard Heine (1828 – 1888)

<sup>11</sup>Félix Édouard Justin Émile Borel (1871 – 1956)

<sup>12</sup>Giuseppe Peano (1858 – 1932).

Das ist eine stückweise konstante Funktion. Aus (3.11) folgt für  $x \in I_k$

$$\mathbf{y}_Z(x) = \mathbf{y}_Z(x_k) + \int_{x_k}^x \mathbf{F}_Z(t) dt.$$

Durch sukzessives Einsetzen in  $\mathbf{y}_Z(x_k)$  folgt für  $x \in J_r$

$$\mathbf{y}_Z(x) = \mathbf{y}_Z(x^{(0)}) + \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{F}_Z(t) dt = \mathbf{y}^0 + \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{F}_Z(t) dt. \quad (3.12)$$

*Wohldefiniertheit und gleichmäßige Beschränktheit der Funktionenmenge.* Damit die Folgen  $\mathbf{y}_Z(x)$  beziehungsweise  $\mathbf{F}_Z(x)$  überhaupt definiert werden können, muss gezeigt werden, dass die dabei verwendeten Argumente im Definitionsbereich von  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  liegen, insbesondere das zweite Argument. Es muss also gezeigt werden, dass die Funktionenmenge  $\{\mathbf{y}_Z(x) : Z \in \mathcal{Z}\}$  in  $Q$  definiert ist, das heißt dass gilt

$$|y_{Z,j}(x) - y_j^0| \leq b. \quad (3.13)$$

Dies geschieht induktiv. Nach Voraussetzung gilt  $|f_j(x, \mathbf{y})| \leq M$  für alle  $(x, \mathbf{y}) \in Q$ ,  $j = 1, \dots, n$ , also gilt insbesondere

$$|f_j(x^{(0)}, \mathbf{y}^0)| = |F_{Z,j}(x^{(0)})| \leq M. \quad (3.14)$$

Aus (3.12) und (3.14) ergibt sich zunächst für  $k = 0$  und  $x \in I_0$

$$|y_{Z,j}(x) - y_j^0| \leq |x - x^{(0)}| |f_j(x^{(0)}, \mathbf{y}^0)| \leq |x - x^{(0)}| M \leq cM \leq b.$$

Beachte, daraus folgt insbesondere  $|y_{Z,j}(x_1) - y_j^0| \leq b$ , da  $x_1 \in I_0$ . Sei nun (3.13) für  $x \in I_l$  bewiesen. Dann gilt insbesondere

$$|y_{Z,j}(x_k) - y_j^0| \leq b, \quad k = 0, 1, \dots, l + 1.$$

Damit ist  $F_{Z,j}(x_k)$ ,  $k = 0, 1, \dots, l + 1$ , wohldefiniert und nach Voraussetzung dem Betrage nach mit  $M$  beschränkt. Es folgt nun mit (3.12) für  $x \in I_{l+1}$

$$|y_{Z,j}(x) - y_j^0| = \left| \int_{x^{(0)}}^x F_{Z,j}(t) dt \right| \leq |x - x^{(0)}| M \leq cM \leq b.$$

Das zeigt (3.13) für  $x \in J_r$ . Man erhält also für  $x \in J_r$

$$\|\mathbf{y}_Z(x)\| \leq \|\mathbf{y}^0\| + b.$$

Die Funktionenmenge  $\{\mathbf{y}_Z(x) : Z \in \mathcal{Z}\} \subset \left[ C([x^{(0)}, x^{(0)} + c]) \right]^n$  ist also gleichmäßig beschränkt.

*Gleichgradige Stetigkeit der Funktionenmenge.* Wegen (3.12) gilt für eine beliebige positive Zahl  $\varepsilon$ , für  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/M$  und für  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in J_r$

$$|y_{Z,j}(\bar{x}_2) - y_{Z,j}(\bar{x}_1)| = \left| \int_{\bar{x}_1}^{\bar{x}_2} F_{Z,j}(t) dt \right| \leq |\bar{x}_2 - \bar{x}_1| M \leq \delta M = \varepsilon.$$

Die Zahl  $\delta(\varepsilon)$  ist dabei von  $Z \in \mathcal{Z}$  unabhängig, sie hängt nur von  $\varepsilon$  und  $M$  ab.

*Konstruktion einer Lösung.* Es sei  $\{Z_l\}_{l \geq 1} \subset \mathcal{Z}$  eine Menge ausgezeichnetener Zerlegungsfolgen für  $J_r$ , das bedeutet, die Länge  $\eta_Z$  des längsten Teilintervalls von  $Z_l$  konvergiert gegen Null für  $l \rightarrow \infty$ . Diese Menge definiert eine zugehörige Funktionenfolge  $\{\mathbf{y}_{Z_l}(x)\}_{l \geq 1}$ . Nach dem Satz von Arzelà–Ascoli findet man eine gleichmäßig konvergente Teilfolge  $\{\mathbf{y}_{Z'_l}(x)\}_{l \geq 1}$ . Sei

$$\mathbf{y}^*(x) := \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{y}_{Z'_l}(x) \quad (3.15)$$

der Grenzwert dieser Teilfolge. Aus der Analysis ist bekannt, dass der Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge stetiger Funktionen stetig ist. Da die Funktionen  $\mathbf{y}_{Z'_l}(x)$  stetig sind (Polygonzüge), ist somit auch  $\mathbf{y}^*(x)$  stetig. Aus (3.12) folgt  $\mathbf{y}_{Z'_l}(x^{(0)}) = \mathbf{y}^0$  für

alle  $l'$  und somit gilt für den Grenzwert  $\mathbf{y}^*(x^{(0)}) = \mathbf{y}^0$ . Jetzt wird gezeigt, dass  $\mathbf{y}^*(x)$  eine Lösung von (3.4) ist. Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig vorgegeben. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $f(x, \mathbf{y})$  in  $Q$  (folgt aus Stetigkeit auf kompakter Menge) gibt es ein  $\delta_1 > 0$  so dass

$$\|\mathbf{f}(x_1, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x_2, \mathbf{y}_2)\| < \varepsilon, \quad (x_1, \mathbf{y}_1), (x_2, \mathbf{y}_2) \in Q, \quad (3.16)$$

mit  $|x_1 - x_2| < \delta_2, \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\| < \delta_1$ . Wegen der Stetigkeit von  $\mathbf{y}^*(x)$  gibt es ein  $\delta_2 > 0$ , so dass für  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in J_r$  mit  $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2| < \delta_2$  gilt

$$\|\mathbf{y}^*(\bar{x}_1) - \mathbf{y}^*(\bar{x}_2)\| < \frac{\delta_1}{2}.$$

Setze  $\delta' := \min\{\delta_1/2, \delta_2\}$ . Sei  $\eta_l$  die größte Länge eines Teilintervalles von  $Z_{l'}$ , dann gibt es wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge ein  $l_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für  $l \geq l_0$  und  $x \in J_r$  gelten

$$\|\mathbf{y}_{Z_l'}(x) - \mathbf{y}^*(x)\| < \delta' \quad \text{und} \quad \eta_l < \delta'.$$

Damit erhält man

$$\|\mathbf{y}_{Z_l'}(x_k) - \mathbf{y}^*(x)\| \leq \|\mathbf{y}_{Z_l'}(x_k) - \mathbf{y}^*(x_k)\| + \|\mathbf{y}^*(x_k) - \mathbf{y}^*(x)\| < \delta' + \frac{\delta_1}{2} \leq \delta_1.$$

Außerdem folgt für  $x \in [x_k, x_{k+1}]$  und  $l \geq l_0$

$$|x - x_k| \leq \eta_l < \delta' \leq \delta_2.$$

Aus (3.16) und den letzten beiden Abschätzungen folgt

$$\|\mathbf{F}_{Z_{l'}}(x) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}^*(x))\| = \|\mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_{Z_l'}(x_k)) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}^*(x))\| < \varepsilon.$$

Die Folge  $\{\mathbf{F}_{Z_{l'}}(x)\}_{l \geq 1}$  konvergiert daher auf  $J_r$  gleichmäßig mit dem Grenzwert  $\mathbf{F}(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}^*(x))$ . Aus (3.12) erhält man schließlich für  $x \in J_r$

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^*(x) &= \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{y}_{Z_l'}(x) = \mathbf{y}^0 + \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{F}_{Z_{l'}}(t) dt = \mathbf{y}^0 + \int_{x^{(0)}}^x \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{F}_{Z_{l'}}(t) dt \\ &= \mathbf{y}^0 + \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}^*(t)) dt. \end{aligned}$$

Integration und Grenzwertbildung dürfen wegen der gleichmäßigen Konvergenz vertauscht werden. Nach Bemerkung 3.3 ist  $\mathbf{y}^*(x)$  eine Lösung von (3.4). Da  $\mathbf{f}(x, \mathbf{y})$  und  $\mathbf{y}^*(x)$  stetig sind, definiert das Integral eine stetig differenzierbare Funktion, also ist auch  $(\mathbf{y}^*)'(x)$  stetig. ■

**Bemerkung 3.33 Zusammenfassung.** Der Beweis des Satzes von Peano betrachtet die Integralform des Anfangswertproblems

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{y}(x^{(0)}) + \int_{x^{(0)}}^x \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) dt.$$

Man:

- betrachtet eine Zerlegung  $Z$ ,
- approximiert den Integranden durch die stückweise konstante Funktion  $\mathbf{f}(x_k, \mathbf{y}_z(x_k))$ ,
- erhält damit eine stetige, stückweise linear Approximation  $\mathbf{y}_Z(x)$  der Lösung.

Man zeigt im Grenzprozess immer feiner werdender Zerlegungen, dass eine Teilfolge der stetigen, stückweise linearen Approximationen gegen eine Lösung der Integralgleichung konvergiert. Die Analyse dieses Grenzprozesses ist mathematisch nicht trivial. □

**Bemerkung 3.34 Eulersches Polygonzugverfahren.** Im Falle der Eindeutigkeit der Lösung von (3.4) stellt jeder der im Beweis konstruierten Polygonzüge eine Approximation der Lösung dar. Dieses Verfahren wird Eulersches Polygonzugverfahren oder explizites Euler-Verfahren oder Vorwärts-Euler-Verfahren genannt und im Teil Numerik näher behandelt.  $\square$

**Folgerung 3.35 Existenz der Lösung des Anfangswertproblems zur Riccatischen Differentialgleichung.** Betrachte das Anfangswertproblem zur Riccatischen Differentialgleichung (2.13) mit dem Anfangswert  $y(x^{(0)}) = y^0$ ,  $x^{(0)} \in [a, b]$ . Seien die Funktion  $f_i \in C([a, b])$ ,  $i \in \{0, 1, 2\}$ ,  $f_0(x) \neq 0$ . Dann besitzt das Anfangswertproblem zu (2.13) eine Lösung.

**Beweis:** Unter den gemachten Voraussetzungen ist die rechte Seite der Riccatischen Differentialgleichung stetig. Damit folgt die Aussage unmittelbar aus dem Existenzsatz von Peano.  $\blacksquare$

**Bemerkung 3.36 Andere Beweise des Existenzsatzes von Peano.** Man kann den Existenzsatz von Peano auch mit Hilfe des Schauder<sup>13</sup>schen Fixpunktsatzes beweisen. Dieser sichert die Existenz, jedoch nicht die Eindeutigkeit eines Fixpunktes der Fixpunktgleichung (3.9). Man braucht auch den Satz von Arzelà-Ascoli und zusätzlich einige Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis, siehe Emmrich, Anhang 2. Der Beweis mit Schauderschem Fixpunktsatz ist nicht konstruktiv.  $\square$

**Bemerkung 3.37 Zu weiteren Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen.** Neben den beiden grundlegenden Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen gibt es noch weitere. Ist beispielsweise die rechte Seite der Differentialgleichung in eine Potenzreihe entwickelbar, dann kann man zeigen, dass es in einer Umgebung des Anfangswertes genau eine Lösung gibt, die sich als absolut konvergente Potenzreihe darstellen lässt, Satz von Cauchy<sup>14</sup>.  $\square$

---

<sup>13</sup>Juliusz Pawel Schauder (1899 – 1943)

<sup>14</sup>Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)

## Kapitel 4

# Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung

### 4.1 Definition, Zusammenhang zu Systemen 1. Ordnung

**Definition 4.1 Allgemeine und explizite gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung.** Die allgemeine gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung hat die Gestalt

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0. \quad (4.1)$$

Sie wird explizit genannt, wenn man sie in der Form

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \quad (4.2)$$

schreiben kann. Die Funktion  $y(x)$  ist eine Lösung von (4.1) in einem Intervall  $I$ , wenn sie in  $I$   $n$ -mal stetig differenzierbar ist und (4.1) identisch erfüllt.

Sei  $x_0 \in I$  gegeben. Dann wir (4.1) mit den Bedingungen

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

das zu (4.1) gehörige Anfangswertproblem genannt.  $\square$

**Beispiel 4.2** Die allgemeine beziehungsweise explizite gewöhnliche Differentialgleichung höherer Ordnung kann man nur noch in Spezialfällen analytisch lösen. Zwei Spezialfälle, die im folgenden nicht weiter betrachtet werden sind:

- Betrachte die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) = f(x, y'(x)).$$

Mit der Substitution  $y'(x) = z(x)$  erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung für  $z(x)$

$$z'(x) = f(x, z(x)).$$

Falls man diese analytisch lösen kann, erhält man  $y'(x)$ . Findet man zu  $y'(x)$  eine Stammfunktion, so hat man eine analytische Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung gefunden. Im Falle eines Anfangswertproblems mit

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1,$$

lautet die Anfangsbedingung für die Differentialgleichung 1. Ordnung

$$z(x_0) = y_1.$$

Die andere Anfangsbedingung benötigt man zur Festlegung der Konstanten der Stammfunktion von  $y'(x)$ .

- Betrachte die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) = f(y, y').$$

Sei eine Lösung  $y(x)$  dieser Differentialgleichung bekannt und sei  $y^{-1}(y)$  ihre Umkehrfunktion, das heißt  $y^{-1}(y(x)) = x$ . Dann verwendet man den Ansatz

$$p(y) := y'(y^{-1}(y)).$$

Daraus folgt mit der Ableitungsregel für die Umkehrfunktion ( $(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$ )

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dy}(y) &= y''(y^{-1}(y)) \frac{d}{dy}(y^{-1}(y(x))) = \frac{y''(y^{-1}(y))}{y'(x)} = \frac{y''(y^{-1}(y))}{y'(y^{-1}(y))} \\ &= \frac{y''(y^{-1}(y))}{p(y)}. \end{aligned}$$

Damit hat man die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$p'(y) = \frac{f(y, p(y))}{p(y)}$$

erhalten.

□

**Satz 4.3 Zusammenhang expliziter gewöhnlicher Differentialgleichungen höherer Ordnung und Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung.**

Jede explizite Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung (4.2) kann äquivalent in das System von  $n$  Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y'_k(x) &= y_{k+1}(x), \quad k = 1, \dots, n-1, \\ y'_n(x) &= f(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{aligned} \quad (4.3)$$

oder (beachte das System ist im Allgemeinen nichtlinear, da die Funktionen noch in  $f(\cdot, \dots, \cdot)$  auftauchen)

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} y'_1(x) \\ y'_2(x) \\ \vdots \\ y'_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix}$$

für die  $n$  Funktionen  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  überführt werden. Dabei ist die Lösung von (4.2)  $y(x) = y_1(x)$ .

**Beweis:** Setze in (4.2)

$$\begin{aligned} y_1(x) &:= y(x), \quad y_2(x) := y'_1(x) = y'(x), \quad y_3(x) := y'_2(x) = y''(x), \quad \dots \\ y_n(x) &:= y'_{n-1}(x) = y^{(n-1)}(x). \end{aligned}$$

Ist  $y \in C^n(I)$  eine Lösung von (4.2), so ist  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  offenbar eine Lösung von (4.3) in  $I$ .

Ist umgekehrt  $y_1(x), \dots, y_n(x) \in C^1(I)$  eine Lösung von (4.3), dann gelten

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1'(x), & y_3(x) &= y_2'(x) = y_1''(x), \dots, y_n(x) = y_1^{(n-1)}(x) \\ y_n'(x) &= y_1^{(n)}(x) = f(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned}$$

Die Funktion  $y_1(x)$  ist also  $n$ -mal stetig differenzierbar und die Lösung von (4.2) in  $I$ . ■

**Beispiel 4.4** Die Differentialgleichung 3. Ordnung

$$y'''(x) + 2y''(x) - 5y'(x) = f(x, y(x))$$

lässt sich in die Form

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(x) \\ y_1'(x) &= y_2(x) (= y'(x)) \\ y_2'(x) &= y_3(x) (= y''(x)) \\ y_3'(x) &= y'''(x) = -2y''(x) + 5y'(x) + f(x, y(x)) \\ &= -2y_3(x) + 5y_2(x) + f(x, y_1(x)) \end{aligned}$$

bringen. □

## 4.2 Lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung

**Definition 4.5 Lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung.** Eine lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung hat die Gestalt

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \quad (4.4)$$

wobei die Funktionen  $a_0(x), \dots, a_n(x)$  im Intervall  $I$ , in dem eine Lösung von (4.4) gesucht wird, stetig sind und  $a_n(x) \neq 0$  in  $I$  gilt. Die lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung heißt homogen, falls  $f(x) = 0$  für alle  $x \in I$

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0. \quad (4.5)$$

□

**Satz 4.6 Superpositionsprinzip.** Es gilt das Superpositionsprinzip, siehe Satz 2.20.

**Beweis:** Einfaches Nachrechnen, wie im Beweis von Satz 2.20. ■

**Folgerung 4.7** Die allgemeine Lösung von (4.4) ist die Summe aus der allgemeinen Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung (4.5) und einer speziellen Lösung der inhomogenen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung (4.4).

**Bemerkung 4.8 Umformung in ein lineares System von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung.** Eine lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung lässt sich äquivalent in das lineare  $n \times n$ -System

$$\begin{aligned} y_k'(x) &= y_{k+1}(x), & k &= 1, \dots, n-1, \\ y_n'(x) &= -\sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i(x)}{a_n(x)} y_{i+1}(x) + f(x) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}'(x) &= \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{a_0(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_n(x)} & -\frac{a_2(x)}{a_n(x)} & \cdots & -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{f(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix} \\
 &=: A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{f}(x) \tag{4.6}
 \end{aligned}$$

überführen.  $\square$

**Satz 4.9 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems.** Seien  $I = [x_0 - a, x_0 + a]$  und  $a_i \in C(I)$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $f \in C(I)$ . Dann besitzt die lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung (4.4) genau eine Lösung in  $y \in C^n(I)$  zu gegebenen Anfangswerten

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \quad x_0 \in I.$$

**Beweis:** Da (4.4) äquivalent zum System (4.6) ist, kann man den globalen Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard–Lindelöf, Satz 3.22, anwenden. Dazu muss man die gleichmäßige Lipschitz–Stetigkeit der rechten Seite von (4.6) bezüglich  $y_1, \dots, y_n$  zeigen. Bezeichnet man die rechte Seite mit  $\mathbf{F}(x, \mathbf{y})$ , so folgt

$$\|\mathbf{F}(x, \mathbf{y}) - \mathbf{F}(x, \tilde{\mathbf{y}})\|_\infty = \|A(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}})\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|_\infty =: L \|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{y}}\|_\infty$$

mit

$$L = \max \left\{ 1, \left| \frac{a_1(x)}{a_n(x)} \right| + \dots + \left| \frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)} \right| \right\}.$$

Da  $I$  abgeschlossen ist, sind alle Quotienten beschränkt, da stetige Funktionen im abgeschlossenen Intervall beschränkt sind.  $\blacksquare$

**Definition 4.10 Linear unabhängige Lösungen, Fundamentalsystem.** Die Lösungen  $y_i(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , von (4.5) heißen linear unabhängig, wenn aus

$$\sum_{i=1}^k c_i y_i(x) = 0, \quad \text{für alle } x \in I, \quad c_i \in \mathbb{R},$$

folgt  $c_i = 0$  für  $i = 1, \dots, k$ . Man nennt  $n$  linear unabhängige Lösungen ein Fundamentalsystem von (4.5).  $\square$

**Definition 4.11 Wronski<sup>1</sup>–Matrix, Wronski–Determinante.** Seien  $y_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, k$  Lösungen von (4.5). Die Matrix

$$\mathcal{W}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) & \cdots & y_k(x) \\ y_1'(x) & \cdots & y_k'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \cdots & y_k^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

heißt Wronski–Matrix. Für  $k = n$  nennt man  $\det(\mathcal{W})(x) =: W(x)$  Wronski–Determinante.  $\square$

<sup>1</sup>Joseph Marie Wronski (1758 – 1853)



**Lemma 4.12 Eigenschaften der Wronski-Matrix und Wronski-Determinante.** Seien  $I = [a, b]$  und  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  Lösungen von (4.5).

i) Es gilt

$$W'(x) = -\frac{a_{n-1}(x)}{a_n(x)}W(x).$$

ii) Es gilt für alle  $x \in I$

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^x \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)} dt\right)$$

mit  $x_0 \in I$ .

iii) Existiert ein  $x_0 \in I$  mit  $W(x_0) \neq 0$ , dann gilt  $W(x) \neq 0$  für alle  $x \in I$ .

iv) Existiert ein  $x_0 \in I$  mit  $\text{rang}(\mathcal{W}(x_0)) = k$ , dann sind mindestens  $k$  Lösungen von (4.5), etwa  $y_1(x), \dots, y_k(x)$ , linear unabhängig.

**Beweis:**

i) Mit dem Laplace<sup>2</sup>schen Entwicklungssatz für Determinanten und der Produktregel gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \det(\mathcal{W}(x)) &= \frac{d}{dx} \left( \sum_{\sigma \in S_n} \left( \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^n y_{j,\sigma_j}(x) \right) \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \left( \text{sgn}(\sigma) \sum_{i=1}^n \left( \prod_{j=1, j \neq i}^n y_{j,\sigma_j}(x) \right) y'_{i,\sigma_i}(x) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \sum_{\sigma \in S_n} \left( \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1, j \neq i}^n y_{j,\sigma_j}(x) y'_{i,\sigma_i}(x) \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} & & \dots & \\ & & & \dots \\ & & & & \dots \\ (y_1^{(i-1)}(x))' & & & & \\ \dots & & & & \\ (y_n^{(i-1)}(x))' & & & & \\ \dots & & & & \dots \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei  $S_n$  die Menge aller Permutationen der Zahlen  $\{1, \dots, n\}$  ist. *Übungsaufgabe für  $n = 2, 3$*  In der  $i$ -ten Zeile in der letzten Matrix steht die  $(i-1)$ -te Ableitung. Die punktierten Zeilen in dieser Matrix stimmen mit den entsprechenden Zeilen von  $\mathcal{W}(x)$  überein. Für  $i = 1, \dots, n-1$  verschwinden die Determinanten, da in diesen Fällen je zwei Zeilen gleich sind. Also ist

$$\frac{d}{dx} \det(\mathcal{W}(x)) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(x) & \dots & y_n^{(n-2)}(x) \\ y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}.$$

Nun nutzt man, dass  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  Lösungen von (4.5) sind und ersetzt jeweils die  $n$ -te Ableitung in der letzten Zeile, indem man (4.5) umstellt. Mit Determinantengesetzen erhält man

$$\frac{d}{dx} \det(\mathcal{W}(x)) = \sum_{i=1}^n -\frac{a_{i-1}(x)}{a_n(x)} \det \begin{pmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(i-1)}(x) & \dots & y_n^{(i-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Bis auf den letzten Summanden verschwinden wieder alle Determinanten, da für die anderen Summanden je zwei Zeilen gleich sind.

<sup>2</sup>Pierre-Simon (Marquis de) Laplace (1749 – 1827)

- ii) Das ist die Lösung des Anfangswertproblems für die Wronski-Determinante zum Anfangswert  $W(x_0)$ , siehe Satz 2.25 und seinen Beweis.
- iii) Das folgt direkt aus ii), da die Exponentialfunktion nicht Null wird.
- iv) *Übungsaufgabe* ? Die Aussage folgt für  $k = n$  aus iii). Sei  $k \leq n$ . Die Spalten der Wronski-Matrix werden so umgeordnet, dass die ersten  $k$  Spalten von  $\mathcal{W}(x_0)$  linear unabhängig sind. Wenn die zugehörigen Funktionen  $y_1(x), \dots, y_k(x)$  linear abhängig sind, dann gibt es Konstanten  $c_1, \dots, c_k$  mit  $\sum_{i=1}^k c_i y_i(x) = 0$  für alle  $x \in I$ . Das gilt insbesondere für  $x = x_0$ , was im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der ersten  $k$  Spalten von  $\mathcal{W}(x_0)$  steht. Also sind  $y_1(x), \dots, y_k(x)$  linear unabhängig. ■

**Satz 4.13 Existenz von Fundamentalsystemen, Darstellung der Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit Fundamentalsystemen.** *Die homogene Gleichung (4.5) besitzt Fundamentalsysteme. Jede Lösung von (4.5) kann als Linearkombination der Lösungen eines beliebigen Fundamentalsystems dargestellt werden.*

**Beweis:** Betrachte  $n$  homogene Anfangswertprobleme mit den Anfangswerten

$$y_j^{(i-1)}(x_0) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Jedes dieser Anfangswertprobleme besitzt nach Satz 4.9 eine eindeutig bestimmte Lösung  $y_j(x)$ . Für diese Lösungen ist  $W(x_0) = 1$ . Nach Lemma 4.12, iii) sind  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  ein Fundamentalsystem.

Seien  $y(x)$  eine beliebige Lösung von (4.5) mit  $y^{(i-1)}(x_0) = y_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , und  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  ein beliebiges Fundamentalsystem. Das System

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

besitzt eine eindeutige Lösung. Die Funktion  $\sum_{i=1}^n c_{i-1} y_i(x)$  erfüllt die Anfangswerte und nach Superpositionsprinzip ist sie eine Lösung von (4.5). Da diese Lösung nach Satz 4.9 eindeutig ist, gilt  $y(x) = \sum_{i=1}^n c_{i-1} y_i(x)$ . ■

**Satz 4.14 Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung.** *Sei  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung (4.5) in  $I = [a, b]$ . Weiter sei  $W_l(x)$  die Determinante, die aus der Wronski-Determinante  $W(x)$  bezüglich  $\{y_1(x), \dots, y_n(x)\}$  hervorgeht, wenn man die  $l$ -te Spalte durch  $(0, 0, \dots, f(x)/a_n(x))^T$  ersetzt. Dann ist*

$$y(x) = \sum_{l=1}^n y_l(x) \int_{x_0}^x \frac{W_l(t)}{W(t)} dt, \quad x_0, x \in I,$$

eine Lösung der inhomogenen Gleichung (4.4).

**Beweis:** Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Prinzips der Variation der Konstanten. Dieses Prinzip wird in einem einfacheren Zusammenhang in Bemerkung 4.25 vorgestellt. Für Details des Beweises, siehe Literatur. ■

### 4.3 Lineare Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

**Definition 4.15 Lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.** Eine lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Gestalt

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \quad (4.7)$$

mit  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $a_n \neq 0$ .  $\square$

#### 4.3.1 Die homogene Gleichung

Nach dem Superpositionsprinzip benötigt man die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung.

**Bemerkung 4.16 Grundsätzlicher Ansatz zur Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.** Betrachte

$$\sum_{i=0}^n a_i y_h^{(i)}(x) = 0. \quad (4.8)$$

Im Falle einer Differentialgleichung 1. Ordnung, das heißt  $n = 1$ ,

$$a_1 y_h'(x) + a_0 y_h(x) = 0$$

kann man die Lösung durch Trennung der Veränderlichen bestimmen. Man erhält

$$y_h(x) = c \exp\left(-\frac{a_0}{a_1} x\right).$$

Für die Lösung von (4.8) macht man von der Struktur her den gleichen Ansatz

$$y_h(x) = e^{\lambda x}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (4.9)$$

Es folgen

$$y_h'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \dots, y_h^{(n)}(x) = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

Einsetzen in (4.8) liefert

$$(a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda x} = 0. \quad (4.10)$$

Es ist  $e^{\lambda x} \neq 0$ , auch für komplexe  $\lambda$ . Mit Eulerscher Formel gilt nämlich für  $\lambda = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$e^\lambda = e^a (\cos b + i \sin b) = e^a \cos b + i e^a \sin b.$$

Eine komplexe Zahl ist nur Null, wenn sowohl Realteil als auch Imaginärteil verschwinden. Es ist  $e^a > 0$  und es gibt kein  $b \in \mathbb{R}$ , für welches gleichzeitig  $\sin(b)$  und  $\cos(b)$  verschwinden. Also ist  $e^\lambda \neq 0$ .

Die Gleichung (4.10) ist genau dann erfüllt, wenn einer der Faktoren gleich Null ist. Da der zweite nie Null wird, muss gelten

$$p(\lambda) := a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Die Funktion  $p(\lambda)$  wird charakteristisches Polynom von (4.8) genannt. Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind die gesuchten Werte  $\lambda$  im Ansatz für  $y_h(x)$ .

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra gilt, dass  $p(\lambda)$  genau  $n$  Nullstellen besitzt, die nicht notwendig verschieden sein müssen. Da die Koeffizienten von  $p(\lambda)$  reell sind, gilt weiter, dass mit jeder komplexen Nullstelle  $\lambda_1 = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ , auch der konjugiert komplexe Wert  $\lambda_2 = a - ib$  eine Nullstelle von  $p(\lambda)$  ist.

Wir werden sehen, dass der grundsätzliche Ansatz (4.9) im Falle mehrfacher Nullstellen nicht ausreicht.  $\square$

**Satz 4.17 Linear unabhängige Lösungen bei  $k$ -facher reeller Nullstelle.** Sei  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  eine  $k$ -fache reelle Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $p(\lambda)$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Dann ergeben sich mit Hilfe von  $\lambda_0$  die  $k$  linear unabhängigen Lösungen von (4.8)

$$y_{h,1}(x) = e^{\lambda_0 x}, \quad y_{h,2}(x) = x e^{\lambda_0 x}, \quad \dots, \quad y_{h,k}(x) = x^{k-1} e^{\lambda_0 x}. \quad (4.11)$$

**Beweis:** Für  $k = 2$ .

$y_{h,1}(x), y_{h,2}(x)$  lösen (4.8). Das ist für  $y_{h,1}(x)$  bereits klar, da diese Funktion die Form des Ansatzes (4.9) besitzt. Für  $y_{h,2}(x)$  gelten

$$\begin{aligned} y'_{h,2}(x) &= (1 + \lambda_0 x) e^{\lambda_0 x}, \\ y''_{h,2}(x) &= (2\lambda_0 + \lambda_0^2 x) e^{\lambda_0 x}, \\ &\vdots \\ y^{(n)}_{h,2}(x) &= (n\lambda_0^{n-1} + \lambda_0^n x) e^{\lambda_0 x}. \end{aligned}$$

Einsetzen in die linke Seite von (4.8) ergibt

$$e^{\lambda_0 x} \sum_{i=0}^n a_i (i\lambda_0^{i-1} + \lambda_0^i x) = e^{\lambda_0 x} \left( x \underbrace{\sum_{i=0}^n a_i \lambda_0^i}_{p(\lambda_0)} + \underbrace{\sum_{i=0}^n a_i i \lambda_0^i}_{p'(\lambda_0)} \right). \quad (4.12)$$

Es ist  $p(\lambda_0) = 0$ , da  $\lambda_0$  eine Nullstelle von  $p(\lambda)$  ist. Der zweite Summand ist die Ableitung  $p'(\lambda)$  von  $p(\lambda)$  an der Stelle  $\lambda_0$ . Da  $\lambda_0$  eine doppelte Nullstelle von  $p(\lambda)$  ist, lässt sich  $p(\lambda)$  in der Form

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2 p_0(\lambda)$$

schreiben, wobei  $p_0(\lambda)$  ein Polynom vom Grad  $n - 2$  ist. Es folgt

$$p'(\lambda) = 2(\lambda - \lambda_0) p_0(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)^2 p'_0(\lambda).$$

Also gilt insbesondere  $p'(\lambda_0) = 0$ . Damit verschwindet (4.12) und  $y_{h,2}(x)$  ist eine Lösung von (4.8).

$y_{h,1}(x), y_{h,2}(x)$  sind linear unabhängig. Nach Lemma 4.12 muss man zeigen, dass die Wronski-Determinante nicht verschwindet. Es gilt

$$\begin{aligned} W(x) &= \det \begin{pmatrix} y_{h,1}(x) & y_{h,2}(x) \\ y'_{h,1}(x) & y'_{h,2}(x) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 x} & x e^{\lambda_0 x} \\ \lambda_0 e^{\lambda_0 x} & (1 + \lambda_0 x) e^{\lambda_0 x} \end{pmatrix} \\ &= e^{2\lambda_0 x} \det \begin{pmatrix} 1 & x \\ \lambda_0 & 1 + \lambda_0 x \end{pmatrix} = e^{2\lambda_0 x} (1 + \lambda_0 x - \lambda_0 x) = e^{2\lambda_0 x} > 0 \end{aligned}$$

für alle  $x \in I$ .

*$k$ -fache Nullstellen.* Für  $k$ -fache Nullstellen,  $k > 2$ , geht man analog vor, wobei man die Faktorisierung  $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k p_0(\lambda)$  nutzt. Das Ausrechnen der Wronski-Determinante ist jedoch komplizierter.  $\blacksquare$

**Bemerkung 4.18 Komplexe Nullstellen.** Die eben bewiesene Aussage gilt auch für die komplexen Nullstellen von  $p(\lambda)$ , wobei man in der Wronski-Determinante zum Schluss  $e^{2\lambda_0 x} \neq 0$  hat. Allerdings sind die zugehörigen Lösungen, zum Beispiel

$$\tilde{y}_{1,h}(x) = e^{\lambda_1 x} = e^{(a+ib)x}$$

komplexwertig. Da man reelle Koeffizienten in (4.8) hat, möchte man natürlich auch reellwertige Lösungen haben. Diese kann man sich aus den komplexen Lösungen konstruieren. Seien  $\lambda_1 = a + ib$ ,  $\overline{\lambda_1} = a - ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$ , konjugiert komplexe Nullstellen von  $p(\lambda)$ . Dann folgt mit Hilfe der Eulerschen Formel

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 x} &= e^{(a+ib)x} = e^{ax} (\cos(bx) + i \sin(bx)), \\ e^{\overline{\lambda_1} x} &= e^{(a-ib)x} = e^{ax} (\cos(bx) - i \sin(bx)). \end{aligned}$$

Nach dem Superpositionsprinzip ist jede Linearkombination auch eine Lösung von (4.8).  $\square$

**Satz 4.19 Linear unabhängige Lösungen bei einfacher konjugiert komplexer Nullstelle.** *Seien  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_1 = a + ib$ ,  $b \neq 0$ , eine einfache konjugiert komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $p(\lambda)$  mit reellen Koeffizienten. Dann sind*

$$y_{h,1}(x) = \operatorname{Re}(e^{\lambda_1 x}) = e^{ax} \cos(bx), \quad y_{h,2}(x) = \operatorname{Im}(e^{\lambda_1 x}) = e^{ax} \sin(bx)$$

reellwertige, linear unabhängige Lösungen von (4.8).

**Beweis:** Man muss Reellwertigkeit, die Eigenschaft Lösung von (4.8) zu sein sowie die lineare Unabhängigkeit beweisen, oder man argumentiert mit dem Superpositionsprinzip, Übungsaufgabe.  $\blacksquare$

**Satz 4.20 Linear unabhängige Lösungen bei mehrfachen konjugiert komplexen Nullstellen.** *Seien  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ ,  $\lambda_1 = a + ib$ ,  $b \neq 0$ , eine  $k$ -fache konjugiert komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $p(\lambda)$  mit reellen Koeffizienten. Dann sind*

$$\begin{aligned} y_{h,1}(x) &= e^{ax} \cos(bx), \dots, y_{h,k}(x) = x^{k-1} e^{ax} \cos(bx), \\ y_{h,k+1}(x) &= e^{ax} \sin(bx), \dots, y_{h,2k}(x) = x^{k-1} e^{ax} \sin(bx) \end{aligned} \quad (4.13)$$

reellwertige, linear unabhängige Lösungen von (4.8).

**Beweis:** Mit den gleichen Mitteln wie in den vorangegangenen Sätzen.  $\blacksquare$

**Satz 4.21 Fundamentalsystem für (4.8).** *Sei  $p(\lambda)$  das charakteristische Polynom von (4.8) mit den Nullstellen  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ , wobei mehrfache Nullstellen mehrfach gezählt werden. Dann ist die Menge der Lösungen der Formen (4.11) und (4.13) ein Fundamentalsystem von (4.8).*

**Beweis:** Eine  $k$ -fache reelle Nullstelle liefert  $k$  linear unabhängige Lösungen, eine  $k$ -fache konjugiert komplexe Nullstelle liefert  $2k$  Lösungen. Damit entspricht die Gesamtzahl der Lösungen der Formen (4.11) und (4.13) der Anzahl der Nullstellen von  $p(\lambda)$ . Diese Anzahl ist nach dem Fundamentalsatz der Algebra gleich  $n$ . Nach Satz 4.13 besitzt ein Fundamentalsystem genau  $n$  Funktionen. Damit ist die richtige Anzahl von Funktionen vorhanden.

Man kann zeigen, dass Lösungen zu unterschiedlichen Nullstellen linear unabhängig sind (Literatur: GBGW, S.75ff.). Die lineare Unabhängigkeit der Lösungen zu einer Nullstelle wurde in den vorangegangenen Sätzen gezeigt.  $\blacksquare$

**Beispiel 4.22 Homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.**

1. Betrachte

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 9$$

mit der doppelten Nullstelle  $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ . Damit erhält man das Fundamentalsystem

$$y_{h,1}(x) = e^{-3x}, \quad y_{h,2}(x) = xe^{-3x}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$y_h(x) = c_1 y_{h,1}(x) + c_2 y_{h,2}(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Betrachte

$$y''(x) + 4y(x) = 0 \quad \implies \quad p(\lambda) = \lambda^2 + 4 \quad \implies \quad \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} y_{h,1}(x) &= \cos(2x), & y_{h,2}(x) &= \sin(2x) \\ y_h(x) &= c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x), & c_1, c_2 &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

### 4.3.2 Die inhomogene Gleichung

Nach dem Superpositionsprinzip benötigt man nun noch eine spezielle Lösung von (4.7). Es gibt mehrere Möglichkeiten, die man versuchen kann, eine solche Lösung zu gewinnen.

**Bemerkung 4.23 Störgliedansätze.** Falls die rechte Seite  $f(x)$  eine entsprechende Gestalt hat, kann man durch scharfes Hinsehen einen geeigneten Ansatz für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (4.7) finden. Diese nennt man Störgliedansätze. Das funktioniert beispielsweise bei folgenden rechten Seiten:

- $f(x)$  ist ein Polynom

$$f(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m, \quad b_m \neq 0.$$

Der Störgliedansatz ist auch ein Polynom

$$y_i(x) = x^k (c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m),$$

wobei 0 eine  $k$ -fache Nullstelle von  $p(\lambda)$  ist.

- rechte Seite:

$$f(x) = (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m) e^{ax}$$

Ansatz:

$$y_i(x) = x^k (c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m) e^{ax}$$

falls  $a$  eine  $k$ -fache Nullstelle von  $p(\lambda)$  ist.

- rechte Seite:

$$\begin{aligned} f(x) &= (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m) \cos(bx), \\ f(x) &= (b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m) \sin(bx) \end{aligned}$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} y_i(x) &= x^k (c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m) \cos(bx) \\ &\quad + x^k (d_0 + d_1 x + \dots + d_m x^m) \sin(bx), \end{aligned}$$

falls  $ib$  eine  $k$ -fache Nullstelle von  $p(\lambda)$  ist.

Weitere Ansätze findet man in der Literatur, zum Beispiel Bronstein, Heuser.  $\square$

**Beispiel 4.24 Störgliedansatz.** Betrachte

$$y''(x) - y'(x) + 2y(x) = \cos x.$$

Der Störgliedansatz ist hier

$$\begin{aligned} y_i(x) &= a \cos x + b \sin x \implies \\ y'_i(x) &= -a \sin x + b \cos x \implies \\ y''_i(x) &= -a \cos x - b \sin x. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung liefert

$$\begin{aligned} -a \cos x - b \sin x + a \sin x - b \cos x + 2a \cos x + 2b \sin x &= \cos x \implies \\ (-a - b + 2a) \cos x + (-b + a + 2b) \sin x &= \cos x. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist erfüllt, wenn man Zahlen  $a, b$  findet, die folgendes Gleichungssystem lösen

$$a - b = 1, \quad a + b = 0 \implies a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}.$$

Man erhält mit dem Störgliedansatz

$$y_i(x) = \frac{1}{2} (\cos x - \sin x).$$

$\square$

**Bemerkung 4.25 Variation der Konstanten.** Falls man keinen Störgliedansatz findet, kann man die Variation der Konstanten probieren. Diese wird am Beispiel der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \tag{4.14}$$

erläutert. Seien  $y_{h,1}(x), y_{h,2}(x)$  zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen Differentialgleichung, dann ist

$$y_h(x) = c_1 y_{h,1}(x) + c_2 y_{h,2}(x)$$

die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Man macht nun den Ansatz

$$y_i(x) = c_1(x) y_{h,1}(x) + c_2(x) y_{h,2}(x)$$

mit den zwei unbekannt Funktionen  $c_1(x), c_2(x)$ . Zu ihrer Bestimmung benötigt man zwei Bedingungen. Man hat

$$\begin{aligned} y'_i(x) &= c'_1(x) y_{h,1}(x) + c_1(x) y'_{h,1}(x) + c'_2(x) y_{h,2}(x) + c_2(x) y'_{h,2}(x) \\ &= (c'_1(x) y_{h,1}(x) + c'_2(x) y_{h,2}(x)) + c_1(x) y'_{h,1}(x) + c_2(x) y'_{h,2}(x). \end{aligned}$$

Den Term in der Klammer setzt man Null, das ist die erste Bedingung. Es folgt

$$y''_i(x) = c'_1(x) y'_{h,1}(x) + c_1(x) y''_{h,1}(x) + c'_2(x) y'_{h,2}(x) + c_2(x) y''_{h,2}(x).$$

Einsetzen in (4.14) liefert

$$\begin{aligned} f(x) &= c'_1(x) y'_{h,1}(x) + c_1(x) y''_{h,1}(x) + c'_2(x) y'_{h,2}(x) + c_2(x) y''_{h,2}(x) \\ &\quad + a_1 (c_1(x) y'_{h,1}(x) + c_2(x) y'_{h,2}(x)) + a_0 (c_1(x) y_{h,1}(x) + c_2(x) y_{h,2}(x)) \\ &= c_1 \underbrace{(y''_{h,1}(x) + a_1 y'_{h,1}(x) + a_0 y_{h,1}(x))}_{=0} + c_2 \underbrace{(y''_{h,2}(x) + a_1 y'_{h,2}(x) + a_0 y_{h,2}(x))}_{=0} \\ &\quad + c'_1(x) y'_{h,1}(x) + c'_2(x) y'_{h,2}(x). \end{aligned}$$

Das ist die zweite Bedingung. Fasst man beide Bedingungen zusammen, erhält man folgendes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_{h,1}(x) & y_{h,2}(x) \\ y'_{h,1}(x) & y'_{h,2}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}.$$

Dieses System ist eindeutig lösbar, da  $y_{h,1}(x), y_{h,2}(x)$  linear unabhängig sind und demzufolge die Determinante der Matrix ungleich Null ist. Die Lösung ist

$$c'_1(x) = -\frac{f(x)y_{h,2}(x)}{y_{h,1}(x)y'_{h,2}(x) - y'_{h,1}(x)y_{h,2}(x)}, \quad c'_2(x) = \frac{f(x)y_{h,1}(x)}{y_{h,1}(x)y'_{h,2}(x) - y'_{h,1}(x)y_{h,2}(x)}.$$

Der Erfolg der Methode der Variation der Konstanten hängt einzig und allein davon ab, ob man die Integrale lösen kann, um von  $c'_1(x), c'_2(x)$  auf  $c_1(x), c_2(x)$  zu gelangen.

Bei Gleichungen höherer als zweiter Ordnung verfolgt man auch das Ziel, ein lineares System für  $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$  zu erhalten. Dazu setzt man in jeder Ableitung die Terme mit  $c'_1(x), \dots, c'_n(x)$  zu Null. Das lineare System hat als Systemmatrix die Wronski-Matrix und die rechte Seite ist der Vektor, welcher in den ersten  $n-1$  Komponenten Nullen hat und in der letzten Komponente  $f(x)$ .  $\square$

**Beispiel 4.26 Variation der Konstanten.** Man finde die allgemeine Lösung von

$$y''(x) + 6y'(x) + 9y(x) = \frac{e^{-3x}}{1+x}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$y_h(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}.$$

Die Variation der Konstanten führt auf folgendes Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} e^{-3x} & x e^{-3x} \\ -3e^{-3x} & (1-3x)e^{-3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{e^{-3x}}{1+x} \end{pmatrix}.$$

Es folgen

$$c'_1(x) = -\frac{e^{-6x} \left( \frac{x}{1+x} \right)}{(1-3x+3x)e^{-6x}} = -\frac{x}{1+x},$$

$$c'_2(x) = \frac{e^{-6x} \left( \frac{1}{1+x} \right)}{(1-3x+3x)e^{-6x}} = \frac{1}{1+x}.$$

Man erhält

$$c_1(x) = -\int \frac{x}{1+x} dx = -\int \frac{1+x}{1+x} dx + \int \frac{1}{1+x} dx = -x + \ln|1+x|,$$

$$c_2(x) = \int \frac{1}{1+x} dx = \ln|1+x|.$$

Damit ergibt sich

$$y_i(x) = (-x + \ln|1+x|) e^{-3x} + \ln|1+x| x e^{-3x}$$

und für die allgemeine Lösung erhält man

$$y(x) = (-x + \ln|1+x| + c_1) e^{-3x} + (\ln|1+x| + c_2) x e^{-3x}.$$

Probe stimmt.  $\square$



## Kapitel 5

# Lineare Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung

### 5.1 Definition, Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Explizite Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung wurden bereits in Bemerkung 3.2 eingeführt.

**Definition 5.1 Lineares System von Differentialgleichungen 1. Ordnung.** Bei einem linearen System von Differentialgleichungen 1. Ordnung sucht man Funktionen  $y_1(x), \dots, y_n(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ , die das System

$$y'_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y_j(x) + b_i(x), i = 1, \dots, n, \quad (5.1)$$

oder in Matrix-Vektor-Schreibweise

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x) \quad (5.2)$$

mit

$$\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} y'_1(x) \\ \vdots \\ y'_n(x) \end{pmatrix},$$
$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \mathbf{b}(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \vdots \\ b_n(x) \end{pmatrix},$$

erfüllen, wobei  $a_{ij}(x), b_i(x) \in C(I)$  ist. Gilt  $\mathbf{b}(x) \equiv \mathbf{0}$ , so heißt das System homogen.  $\square$

**Satz 5.2 Superpositionsprinzip für lineare Systeme.** *Betrachte das lineare System gewöhnlicher Differentialgleichungen (5.2). Dann gilt das Superpositionsprinzip.*

**Beweis:** Analog zu Satz 2.20, Übungsaufgabe. ■

**Folgerung 5.3**

- i) Sind  $\mathbf{y}_1(x), \mathbf{y}_2(x), \dots, \mathbf{y}_k(x)$  Lösungen des homogenen Systems, so ist auch jede Linearkombination  $\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{y}_i$ ,  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ , eine Lösung des homogenen Systems.
- ii) Die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems ist die Summe aus einer speziellen Lösung des inhomogenen Systems und der allgemeinen Lösung des homogenen Systems.

**Satz 5.4 Eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems.** Es gibt genau eine Lösung  $\mathbf{y}(x) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  des Anfangswertproblems (5.2) mit dem Anfangswert  $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ ,  $x_0 \in I$ .

**Beweis:** Die Aussage des Satzes ist eine Folgerung des globalen Existenz- und Eindeigkeitssatzes von Picard-Lindelöf, Satz 3.22. Da die Funktionen  $a_{ij}(x)$  auf dem abgeschlossenen Intervall  $I$  stetig sind, sind sie dort nach dem Satz von Weierstraß beschränkt, das heißt es gibt eine Konstante  $M$  mit

$$|a_{ij}(x)| \leq M, \quad x \in I, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}(x, \mathbf{y}_1) - \mathbf{f}(x, \mathbf{y}_2)\|_\infty &= \max_{i=1, \dots, n} |f_i(x, \mathbf{y}_1) - f_i(x, \mathbf{y}_2)| \\ &= \max_{i=1, \dots, n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) y_{1,j}(x) + b_i(x) - \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) y_{2,j}(x) - b_i(x) \right| \\ &= \max_{i=1, \dots, n} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) (y_{1,j}(x) - y_{2,j}(x)) \right| \\ &\leq n \max_{i,j=1, \dots, n} |a_{ij}(x)| \max_{i=1, \dots, n} |y_{1,i}(x) - y_{2,i}(x)| \\ &\leq nM \|\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Damit erfüllt die rechte Seite eine gleichmäßige Lipschitz-Bedingung bezüglich  $\mathbf{y}$  mit der Lipschitz-Konstanten  $nM$ . ■

## 5.2 Lösung des homogenen Systems

**Bemerkung 5.5** Wegen des Superpositionsprinzips benötigt man die allgemeine Lösung des homogenen Systems

$$\mathbf{y}'(x) = A(x)\mathbf{y}(x). \tag{5.3}$$

Dieses System besitzt immer die triviale Lösung  $\mathbf{y}(x) = \mathbf{0}$ .

Im skalaren Fall  $y'(x) = a(x)y(x)$  lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = c \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right), \quad c \in \mathbb{R}, x_0 \in (a, b),$$

siehe Satz 2.23 Auch für das System (5.3) kann man die allgemeine Lösung mit Hilfe der Exponentialfunktion angeben. □

**Definition 5.6 Matrixexponentialfunktion.** Seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und

$$A^0 := I, A^1 := A, A^2 := AA, \dots, A^k := A^{k-1}A.$$

Die Matrixexponentialfunktion ist gegeben durch

$$e^A := \exp(A) : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad A \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

□

**Lemma 5.7 Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion.** Die Matrixexponentialfunktion besitzt folgende Eigenschaften:

i) Die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

ist für alle  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  absolut konvergent (wie im Reellen).

ii) Falls die Matrizen  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  kommutieren, das heißt es gilt  $AB = BA$ , dann folgt

$$e^A e^B = e^{A+B}.$$

iii) Die Matrix  $(e^A)^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  existiert für alle  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und es gilt

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

iv) Es gelten  $\text{rang}(e^A) = n$ ,  $\det(e^A) \neq 0$ .

v) Die matrixwertige Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $x \mapsto e^{Ax}$  kann nach  $x$  differenziert werden

$$\frac{d}{dx} e^{Ax} = A e^{Ax},$$

formal wie im Reellen, die Ableitung des Exponenten steht vor der Matrixexponentialfunktion.

**Beweis:**

- i) mittels vollständiger Induktion und Majorantenkriterium, siehe Literatur,
- ii) folgt aus i), Übungsaufgabe,
- iii) folgt aus ii), Übungsaufgabe,
- iv) folgt aus iii),
- v) Nachrechnen mit Differenzenquotient, Übungsaufgabe.

■

**Beispiel 5.8**

1. Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ax)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} x^k & 0 & 0 \\ 0 & (2x)^k & 0 \\ 0 & 0 & (3x)^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & e^{2x} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kann man die zugehörigen Reihen einfach berechnen ( $B^2 = 0$ ). Man erhält

$$e^A = \begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}, \quad e^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hier gilt

$$e^A e^B = \begin{pmatrix} e^2 & e^2 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} e^2 & e^3 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix} = e^B e^A.$$

Man sieht auch, dass die Komponenten von  $e^B$  keine Exponentialfunktionen sind. □

**Satz 5.9 Allgemeine Lösung des homogenen linearen Systems erster Ordnung.** Die allgemeine Lösung von (5.3) lautet

$$\mathbf{y}_h(x) = e^{\int_{x_0}^x A(t) dt} \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n, x_0 \in (a, b). \quad (5.4)$$

Das Integral ist komponentenweise zu verstehen.

**Beweis:** Dass (5.4) eine Lösung von (5.3) ist, folgt aus der Ableitung der Matrixexponentialfunktion und der Differentiation eines Integrals nach der oberen Grenze

$$\mathbf{y}'_h(x) = \frac{d}{dx} \left( \int_{x_0}^x A(t) dt \right) e^{\int_{x_0}^x A(t) dt} \mathbf{c} = A(x) e^{\int_{x_0}^x A(t) dt} \mathbf{c}.$$

Betrachte eine beliebige Lösung  $\tilde{\mathbf{y}}_h(x)$  von (5.3) mit dem Wert  $\tilde{\mathbf{y}}_h(x_0) \in \mathbb{R}^n$  im Punkt  $x_0$ . Setze in (5.4)  $\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{y}}_h(x_0)$ . Dann gilt

$$\mathbf{y}_h(x_0) = e^{\int_{x_0}^{x_0} A(t) dt} \tilde{\mathbf{y}}_h(x_0) = \underbrace{e^0}_{=I} \tilde{\mathbf{y}}_h(x_0) = \tilde{\mathbf{y}}_h(x_0).$$

Damit ist  $e^{\int_{x_0}^x A(t) dt} \tilde{\mathbf{y}}_h(x_0)$  eine Lösung von (5.3), die im Punkt  $x_0$  den gleichen (Anfangs-)Wert wie  $\tilde{\mathbf{y}}_h(x)$  besitzt. Da nach Satz 4.13 die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig ist, gilt  $\tilde{\mathbf{y}}_h(x) = e^{\int_{x_0}^x A(t) dt} \tilde{\mathbf{y}}_h(x_0)$ . ■

## 5.3 Lineare Systeme von Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

**Bemerkung 5.10 Lineares System von Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.** Ein lineares System von Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Gestalt

$$\mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x) + \mathbf{b}(x), \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \quad (5.5)$$

Das homogenen System besitzt damit die Form

$$\mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x). \quad (5.6)$$

Seine allgemeine Lösung besitzt nach Satz 5.9 die Gestalt

$$\mathbf{y}_h(x) = e^{Ax} \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n. \quad (5.7)$$

□

**Bemerkung 5.11 Eliminationsmethode, Substitutionsmethode für das homogene System.** Wegen des Superpositionsprinzips benötigt man die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. In der Praxis lässt sich  $\exp(Ax)$  jedoch schlecht berechnen, weil es über eine Reihe definiert ist. Für kleine Systeme,  $n \leq 3, 4$ , kann man die sogenannte Eliminations- oder Substitutionsmethode zur Berechnung der allgemeinen Lösung von (5.6) verwenden. Diese entspricht dem bekannten Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme: Man stellt eine Gleichung nach einer Unbekannten um und setzt diese in die anderen Gleichungen ein. Dazu muss die umgestellte Gleichung differenziert werden. Das Ergebnis ist die Reduktion der Dimension des Systems um Eins. Man fährt so fort, bis nur noch eine Unbekannte übrig bleibt. Für diese ist eine homogene lineare Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung zu lösen, siehe Abschnitt 4.3. Durch Rücksubstitution erhält man die Lösung von (5.6).  $\square$

**Beispiel 5.12 Eliminationsmethode, Substitutionsmethode.** Gesucht ist die Lösung von

$$\mathbf{y}'(x) = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}(x) \iff y_1'(x) = -3y_1(x) - y_2(x), \quad y_2'(x) = y_1(x) - y_2(x).$$

Man stellt die zweite Gleichung nach  $y_1(x)$  um und differenziert

$$y_1(x) = y_2'(x) + y_2(x), \quad y_1'(x) = y_2''(x) + y_2'(x).$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$y_2''(x) + y_2'(x) = -3(y_2'(x) + y_2(x)) - y_2(x) \iff y_2''(x) + 4y_2'(x) + 4y_2(x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet

$$y_2(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man

$$y_1(x) = y_2'(x) + y_2(x) = (-c_1 + c_2) e^{-2x} - c_2 x e^{-2x}.$$

Damit hat man die allgemeine Lösung des linearen Systems linearer Differentialgleichungen. Man beachte, dass die Konstanten für  $y_2(x)$  frei gewählt werden, sich für  $y_1(x)$  aber durch die Rücksubstitution ergeben.

Sind noch Anfangsbedingungen gegeben, so bestimmt man zu diesen die passenden Konstanten.  $\square$

**Bemerkung 5.13 Andere Methoden zur Bestimmung der allgemeinen Lösung des homogenen Systems.** Es gibt noch andere Methoden zur Bestimmung der allgemeinen Lösung von (5.6).

- Die Idee der Methode der Haupt- und Eigenvektoren besteht darin, das System in Dreiecksgestalt umzuformen. Dann kann man die Gleichungen sukzessive lösen. Dafür konstruiert man mit den sogenannten Haupt- und Eigenvektoren eine invertierbare Matrix  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , für welche  $C^{-1}AC$  eine Dreiecksmatrix ist. Man kann zeigen, dass es solch eine Matrix für jedes  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gibt. Anschließend setzt man

$$\mathbf{y}(x) = C\mathbf{z}(x) \implies \mathbf{y}'(x) = C\mathbf{z}'(x).$$

Einsetzen in (5.6) liefert

$$C\mathbf{z}'(x) = AC\mathbf{z}(x) \iff \mathbf{z}'(x) = C^{-1}AC\mathbf{z}(x).$$

Das ist ein Dreieckssystem für  $\mathbf{z}(x)$ , welches man sukzessive für die Komponenten von  $\mathbf{z}(x)$  löst. Die Lösung von (5.6) erhält man durch  $C\mathbf{z}(x)$ .

- Die Methode der Matrixfunktionen basiert auf einem geeigneten Ansatz für die Lösung.

Jedoch auch diese Methoden werden für größere  $n$  sehr aufwändig, siehe Literatur.

□

**Bemerkung 5.14 Methoden zur Bestimmung einer Lösung des inhomogenen Systems.** Um die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu finden, benötigt man noch eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems. Zur Bestimmung dieser Lösung hat man folgende Möglichkeiten:

- *Die Methode der Variation der Konstanten.* Man ersetzt  $\mathbf{c}$  in (5.7) mit  $\mathbf{c}(x)$ , setzt diesen Ausdruck in (5.5) ein, erhält Bedingungen für  $\mathbf{c}'(x)$  und versucht daraus  $\mathbf{c}(x)$  zu berechnen.
- *Störgliedansätze.* Hat die rechte Seite  $\mathbf{b}(x)$  eine spezielle Gestalt, etwa Polynom, Sinus, Kosinus, Exponentialfunktion, so kann man spezielle Lösungen der inhomogenen Gleichung mit geeigneten Ansätzen finden.
- *Eliminationsmethode.* Ist die rechte Seite  $\mathbf{b}(x)$  von (5.5), wobei  $A$  konstante Koeffizienten besitzt,  $(n - 1)$ -mal stetig differenzierbar, so kann man genau wie bei der Eliminationsmethode vorgehen. Man erhält für eine Komponente von  $\mathbf{y}(x)$  eine inhomogene gewöhnliche Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, von der man eine spezielle Lösung bestimmen muss. Durch Rücksubstitution erhält man eine spezielle Lösung von (5.5).

□

## Kapitel 6

# Lineare Randwertprobleme

## 2. Ordnung

**Definition 6.1 Lineares Randwertproblem 2.Ordnung.** Ein lineares Randwertproblem 2. Ordnung besitzt die Gestalt

$$u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in I = [a, b], \quad (6.1)$$

mit gegebenen Randbedingungen an den Intervallenden  $a$  und  $b$ .

Man unterscheidet folgende Randbedingungen für ein Intervallende:

1. Dirichlet<sup>1</sup>-Randbedingung:

$$u(a) = g_D, \quad g_D \in \mathbb{R},$$

2. Neumann<sup>2</sup>-Randbedingung:

$$u'(a) = g_N, \quad g_N \in \mathbb{R},$$

3. Robin<sup>3</sup>-Randbedingung:

$$\lambda u(a) + \beta u'(a) = g_R, \quad \alpha, \beta, g_R \in \mathbb{R},$$

4. periodische Randbedingung, beispielsweise

$$u(a) = u(b).$$

□

**Beispiel 6.2** Betrachte das Randwertproblem in  $[0, 1]$

$$u''(x) = 0, \quad u(0) = g_0, \quad u(1) = g_1.$$

Diese Gleichung kann man als Modell für die stationäre Temperaturverteilung in einem dimensionslosen Stab nehmen. Dabei ist  $u(x)$  die Temperatur, die Wärme wird nur durch Molekularbewegungen verteilt und es gibt keine Wärmequellen. Die Dirichlet-Randbedingungen besagen, dass die Temperatur an den Stabenden vorgegeben wird.

Durch zweimaliges Integrieren erhält man die Lösung der Differentialgleichung

$$u(x) = \alpha x + \beta.$$

---

<sup>1</sup>Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859)

<sup>2</sup>Carl Gottfried Neumann (1832 – 1925)

<sup>3</sup>Gustave Robin (1855 – 1897)

Einsetzen der Randbedingungen liefert

$$g_0 = u(0) = \beta, \quad g_1 = u(1) = \alpha + \beta = \alpha + g_0,$$

woraus folgt, dass

$$u(x) = (g_1 - g_0)x + g_0$$

die eindeutige Lösung dieses Randwertproblems ist.

Betrachtet nun das Randwertproblem mit Neumann-Randbedingungen

$$u'(0) = \tilde{g}_0, \quad u'(1) = \tilde{g}_1.$$

Hier gibt man den Wärmefluss an den Enden des Stabes vor. Um die Randbedingungen einsetzen zu können, muss man die Lösung der Differentialgleichung differenzieren

$$u'(x) = \alpha.$$

Falls  $\tilde{g}_0 = \tilde{g}_1$  ist, setzt man  $\alpha = \tilde{g}_0$  und erhält unendlich viele Lösungen, weil  $\beta$  frei wählbar ist. Ist jedoch  $\tilde{g}_0 \neq \tilde{g}_1$ , so besitzt das Randwertproblem keine Lösung.

Dass Neumann-Randbedingung nicht unabhängig gewählt werden können, sieht man auch, indem man die Differentialgleichung integriert und dann partielle Integration anwendet

$$0 = \int_0^1 u''(x) dx = u'(1) - u'(0) - \int_0^1 u'(x)0 dx = u'(1) - u'(0).$$

Das ergibt die obige Bedingung  $\tilde{g}_0 = \tilde{g}_1$  für die Lösbarkeit des Randwertproblems.

Aus physikalischer Sicht bedeutet die Bedingung  $\tilde{g}_0 = \tilde{g}_1$ , dass genauso viel Wärme in den Stab hineinfließen muss, wie hinausfließt. Sonst kann man keinen stationären Zustand erwarten.  $\square$

**Definition 6.3 Sturm<sup>4</sup>sches Randwertproblem.** Das Randwertproblem

$$Lu := (p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = g(x), \quad x \in I = [a, b], \quad (6.2)$$

mit  $p \in C^1(I)$ ,  $q, g \in C(I)$ ,  $p(x) > 0$  in  $I$ , und den Randbedingungen

$$R_0u := \alpha_1u(a) + \alpha_2u'(a) = \eta_0, \quad R_1u := \beta_1u(b) + \beta_2u'(b) = \eta_1 \quad (6.3)$$

mit  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$  und  $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$  wird Sturmsches Randwertproblem genannt.  $\square$

**Bemerkung 6.4** Die Differentialgleichung (6.1) lässt sich durch Multiplikation mit  $p(x) = \exp(\int_0^x b(s) ds)$  immer in die Form (6.2) überführen.  $\square$

**Satz 6.5 Eindeutige Lösbarkeit des Sturmschen Randwertproblems.** *Betrachte das Sturmsche Randwertproblem (6.2), (6.3). Sei  $\{u_1(x), u_2(x)\}$  eine Fundamentallösung der homogenen Differentialgleichung. Das Sturmsche Randwertproblem ist genau dann eindeutig lösbar, wenn*

$$\det \begin{pmatrix} R_0u_1 & R_0u_2 \\ R_1u_1 & R_1u_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} R_0u_1 & R_0u_2 \\ R_1u_1 & R_1u_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

*ist. Insbesondere besitzt das zugehörige vollhomogene Problem, das heißt  $g(x) = 0$ ,  $R_0u = R_1u = 0$ , in diesem Falle nur die triviale Lösung.*

<sup>4</sup>Jacques Charles Francois Sturm (1803 – 1855)



**Beweis:** Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (6.2) lässt sich mit Hilfe des Fundamentalsystems schreiben als

$$u(x) = u_i(x) + c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x),$$

wobei  $u_i(x)$  eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist. Einsetzen der (linearen) Randbedingungen ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R_0 u \\ R_1 u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_0 u_i \\ R_1 u_i \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} R_0 u_1 \\ R_1 u_1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} R_0 u_2 \\ R_1 u_2 \end{pmatrix} \iff \\ \begin{pmatrix} R_0 u_1 & R_0 u_2 \\ R_1 u_1 & R_1 u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} R_0 u - R_0 u_i \\ R_1 u - R_1 u_i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dieses System ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante der Systemmatrix nicht verschwindet.

Sei das Sturmische Randwertproblem eindeutig lösbar mit der Lösung  $u(x)$  und sei  $v(x)$  eine nichttriviale Lösung des vollhomogenen Problems. Dann rechnet man direkt nach, dass  $u(x) + v(x) \neq u(x)$  auch eine Lösung des Sturmischen Randwertproblems ist, im Widerspruch zur eindeutigen Lösbarkeit. ■

**Beispiel 6.6** Betrachte das Randwertproblem

$$\begin{aligned} u''(x) + u(x) &= 1, \quad \text{in } (0, \pi), \\ R_0 u &:= u(0) + u'(0) = \eta_0, \\ R_1 u &:= u(\pi) = \eta_1. \end{aligned}$$

Ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung ist

$$u_1(x) = \cos x, \quad u_2(x) = \sin x.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} R_0 u_1 & R_0 u_2 \\ R_1 u_1 & R_1 u_2 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} R_0(\cos x) & R_0(\sin x) \\ R_1(\cos x) & R_1(\sin x) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \cos 0 - \sin 0 & \sin 0 + \cos 0 \\ \cos \pi & \sin \pi \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet

$$u(x) = 1 + c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Für  $\eta_0 = \eta_1 = 0$  erhält man beispielsweise das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die Lösung des Sturmischen Randwertproblems zu diesen homogenen Randwerten

$$u(x) = 1 + \cos x - 2 \sin x.$$

□

**Definition 6.7 Grundlösung.** Eine Funktion  $\gamma(x, \xi)$  wird Grundlösung der homogenen Differentialgleichung  $Lu = 0$  genannt, wenn folgendes gilt:

1.  $\gamma(x, \xi)$  ist stetig auf dem Quadrat  $Q := \{(x, \xi) : x, \xi \in [a, b]\}$ .

2. In jedem der Dreiecke

$$Q_1 := \{(x, \xi) : a \leq \xi \leq x \leq b\}, \quad Q_2 := \{(x, \xi) : a \leq x \leq \xi \leq b\}$$

existieren stetige partielle Ableitungen  $\gamma_x(x, \xi)$  und  $\gamma_{xx}(x, \xi)$ .

3. Bei festem  $\xi \in I$  ist  $\gamma(x, \xi)$  als Funktion von  $x$  eine Lösung von  $L\gamma = 0$  für  $x \neq \xi, x \in I$ .

4. Auf der Diagonalen  $x = \xi$  besitzt die erste Ableitung eine Sprung der Form

$$\gamma_x(x+0, x) - \gamma_x(x-0, x) = \frac{1}{p(x)}, \quad a < x < b.$$

□

### Bemerkung 6.8

- Identifiziert man  $\xi$  mit der  $y$ -Achse des kartesischen Koordinatensystems, so ist der Sprung in Bedingung 4 auf allen Geraden parallel zur  $x$ -Achse zu betrachten. Der Sprung ist in Richtung der Funktionswerte rechts von  $x = \xi$  nach links von  $x = \xi$ , also von  $Q_1$  nach  $Q_2$ .

- Die Grundlösung ist nicht eindeutig bestimmt. Beispielsweise ist mit  $\gamma(x, \xi)$  auch

$$\tilde{\gamma}(x, \xi) = \gamma(x, \xi) + a(\xi)u(x)$$

eine Grundlösung, falls  $a(\xi)$  stetig ist und  $u(x)$  eine Lösung von  $Lu = 0$  ist.

□

**Beispiel 6.9** Für  $Lu = u''(x) = 0$  in  $I = [a, b]$ , das heißt insbesondere  $p(x) = 1$ , ist

$$\gamma(x, \xi) = \frac{1}{2}|x - \xi| \iff \gamma(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - \xi) & (x, \xi) \in Q_1, \\ -\frac{1}{2}(x - \xi) & (x, \xi) \in Q_2, \end{cases}$$

eine Grundlösung.

1. Stetigkeit folgt aus der Stetigkeit der Betragsfunktion.
2. Für  $x \neq \xi$  ist diese Funktion differenzierbar, das heißt die zweite Eigenschaft ist erfüllt.
3. Bei festem  $\xi$  ist die Funktion linear für  $x \neq \xi$ . Das bedeutet, die zweite Ableitung verschwindet in diesem Fall und auch die dritte Eigenschaft ist erfüllt.
4. Es gilt

$$\gamma_x(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} & (x, \xi) \in Q_1, \\ -\frac{1}{2} & (x, \xi) \in Q_2. \end{cases}$$

Nach Bemerkung 6.8 ist somit

$$\gamma_x(x+0, x) - \gamma_x(x-0, x) = 1 = \frac{1}{p(x)}, \quad a < x < b.$$

□

**Satz 6.10** Sei  $\gamma(x, \xi)$  eine Grundlösung. Dann ist

$$u(x) = \int_a^b \gamma(x, \xi)g(\xi) d\xi \in C^2(I)$$

eine Lösung von  $Lu = g(x)$  mit  $g \in C(I)$ .

**Beweis:** Man spaltet das Integral in zwei Anteile auf

$$u(x) = \int_a^b \gamma(x, \xi)g(\xi) d\xi = \int_a^x \gamma(x, \xi)g(\xi) d\xi + \int_x^b \gamma(x, \xi)g(\xi) d\xi.$$

Nun differenziert man, wobei man die Differentiation nach der oberen beziehungsweise unteren Integralgrenze und die Differentiation von Funktionen mit zwei Argumenten nutzt

$$\begin{aligned} u'(x) &= \gamma(x, x)g(x) + \int_a^x \gamma_x(x, \xi)g(\xi) d\xi - \gamma(x, x)g(x) + \int_x^b \gamma_x(x, \xi)g(\xi) d\xi \\ &= \int_a^x \gamma_x(x, \xi)g(\xi) d\xi + \int_x^b \gamma_x(x, \xi)g(\xi) d\xi \\ &= \int_a^b \gamma_x(x, \xi)g(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

wegen der Stetigkeit von  $\gamma(x, \xi)$  und  $g(x)$ . Für die zweite Ableitung erhält man, indem man beachtet, dass das Integral in  $[a, x]$  in  $Q_1$  ist und das Integral in  $[x, b]$  in  $Q_2$  ist,

$$\begin{aligned} u''(x) &= \gamma_x(x+0, x)g(x) + \int_a^x \gamma_{xx}(x, \xi)g(\xi) d\xi - \gamma_x(x-0, x)g(x) + \int_x^b \gamma_{xx}(x, \xi)g(\xi) d\xi \\ &= \int_a^x \gamma_{xx}(x, \xi)g(\xi) d\xi + \int_x^b \gamma_{xx}(x, \xi)g(\xi) d\xi + g(x)(\gamma_x(x+0, x) - \gamma_x(x-0, x)) \\ &= \int_a^x \gamma_{xx}(x, \xi)g(\xi) d\xi + \int_x^b \gamma_{xx}(x, \xi)g(\xi) d\xi + \frac{g(x)}{p(x)}, \end{aligned}$$

wegen Eigenschaft 4. Mit dieser Darstellung folgt zunächst  $u'' \in C(I)$ , also  $u \in C^2(I)$ .

Einsetzen in (6.2) ergibt

$$\begin{aligned} Lu &= p(x)u''(x) + p'(x)u'(x) + q(x)u(x) \\ &= g(x) + \int_a^x (p(x)\gamma_{xx}(x, \xi) + p'(x)\gamma_x(x, \xi) + q(x)\gamma(x, \xi))g(\xi) d\xi \\ &\quad + \int_x^b (p(x)\gamma_{xx}(x, \xi) + p'(x)\gamma_x(x, \xi) + q(x)\gamma(x, \xi))g(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Wegen Eigenschaft 3 verschwindet der erste Faktor in beiden Integranden, was die zweite Behauptung zeigt. ■

Nun werden noch die Randbedingungen hinzu genommen.

**Definition 6.11 Green<sup>5</sup>sche Funktion.** Die Funktion  $\Gamma(x, \xi)$  heißt Greensche Funktion für das homogene Randwertproblem  $Lu = 0$ ,  $R_0u = R_1u = 0$ , wenn

1.  $\Gamma(x, \xi)$  ist eine Grundlösung,
2.  $R_0\Gamma = R_1\Gamma = 0$  für alle  $\xi \in (a, b)$ .

□

**Satz 6.12 Lösung des Sturmischen Randwertproblems mit Greenscher Funktion.** Unter den Voraussetzungen von Satz 6.5 existiert genau eine Greensche Funktion für das Sturmische Randwertproblem mit homogenen Randbedingungen

$$Lu = g(x), \quad R_0u = R_1u = 0.$$

Die eindeutige Lösung hat dann die Darstellung

$$u(x) = \int_a^b \Gamma(x, \xi)g(\xi) d\xi.$$

Die Greensche Funktion ist symmetrisch  $\Gamma(x, \xi) = \Gamma(\xi, x)$ .

---

<sup>5</sup>Georg Green (1793 – 1841)

**Beweis:** Skizze. Die angegebene Funktion  $u(x)$  ist nach Satz 6.10 eine Lösung von  $Lu = g(x)$ . Da man im Integral nach  $x$  differenzieren darf, kann man Integration und die Randbedingungen  $R_0, R_1$  vertauschen. Wegen der zweiten Eigenschaft der Greenschen Funktion besitzt  $u(x)$  dann homogene Randbedingungen. Für Beweise der Eindeutigkeit und der Symmetrie wird auf die Literatur verwiesen. ■

**Bemerkung 6.13** Mit Hilfe der Greenschen Funktion hat man eine analytische Darstellung der Lösung des Sturmschen Randwertproblems. Sie ist die Grundlage für viele weitere analytische Untersuchungen. Die Greensche Funktion hängt von den Randbedingungen ab, unterschiedliche Randbedingungen führen zu unterschiedlichen Greenschen Funktionen. □

**Bemerkung 6.14 Konstruktion der Greenschen Funktion aus einem Fundamentalsystem.** Sei ein Fundamentalsystem  $\{u_1(x), u_2(x)\}$  gegeben. Dann macht man den Separationsansatz

$$\Gamma(x, \xi) = \sum_{i=1}^2 (a_i(\xi) \pm b_i(\xi)) u_i(x), \quad \begin{cases} + & \text{in } Q_1, \\ - & \text{in } Q_2. \end{cases}$$

Die geforderte Stetigkeit für  $x = \xi$  ergibt die Bedingung

$$\begin{aligned} & (a_1(\xi) + b_1(\xi)) u_1(\xi) + (a_2(\xi) + b_2(\xi)) u_2(\xi) \\ &= (a_1(\xi) - b_1(\xi)) u_1(\xi) + (a_2(\xi) - b_2(\xi)) u_2(\xi) \quad \iff \\ 0 &= b_1(\xi) u_1(\xi) + b_2(\xi) u_2(\xi). \end{aligned}$$

Wegen der Sprungrelation erhält man analog

$$b_1(\xi) u_1'(\xi) + b_2(\xi) u_2'(\xi) = \frac{1}{2p(\xi)}.$$

Damit hat man ein Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u_1(\xi) & u_2(\xi) \\ u_1'(\xi) & u_2'(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(\xi) \\ b_2(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2p(\xi)} \end{pmatrix}.$$

Die Systemmatrix ist gerade die Wronski-Matrix. Das System ist damit eindeutig lösbar. Die anderen Koeffizienten bestimmt man mit Hilfe der Randbedingungen

$$R_0 \Gamma = \sum_{i=1}^2 (a_i(\xi) - b_i(\xi)) R_0 u_i = 0, \quad R_1 \Gamma = \sum_{i=1}^2 (a_i(\xi) + b_i(\xi)) R_1 u_i = 0.$$

Die Systemmatrix dieses Systems ist gerade

$$\begin{pmatrix} R_0 u_1 & R_0 u_2 \\ R_1 u_1 & R_1 u_2 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix ist unter den Voraussetzungen von Satz 6.5 regulär, womit man eindeutige Koeffizienten  $a_1(\xi), a_2(\xi)$  erhält. □

**Beispiel 6.15** Betrachte das lineare Randwertproblem

$$u''(x) = 0, \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Ein Fundamentalsystem ist  $\{1, x\}$ . Für die Koeffizienten  $b_1(\xi), b_2(\xi)$  hat man das folgende System zu lösen

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(\xi) \\ b_2(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} b_1(\xi) \\ b_2(\xi) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\xi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für die Koeffizienten  $a_1(\xi), a_2(\xi)$  hat man das System

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(\xi) \\ a_2(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(\xi) \\ b_2(\xi) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\xi \\ \xi - 1 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Man erhält

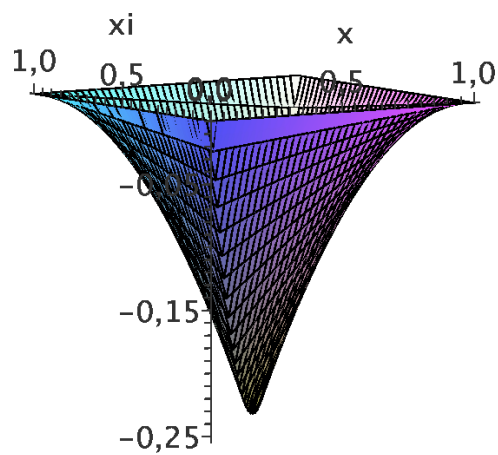
$$\begin{pmatrix} a_1(\xi) \\ a_2(\xi) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\xi \\ 2\xi - 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich als Greensche Funktion für  $Q_1 = \{(x, \xi) : 0 \leq \xi \leq x \leq 1\}$

$$\Gamma(x, \xi) = \left(-\frac{1}{2}\xi - \frac{1}{2}\xi\right) 1 + \left(\frac{1}{2}(2\xi - 1) + \frac{1}{2}\right) x = -\xi + x\xi = \xi(x - 1).$$

Analog erhält man für  $Q_2 = \{(x, \xi) : 0 \leq x \leq \xi \leq 1\}$

$$\Gamma(x, \xi) = x(\xi - 1).$$



□

## Teil II

# Numerik Gewöhnlicher Differentialgleichungen

# Kapitel 7

## Einführung

**Bemerkung 7.1 Inhalt dieses Teils.** In diesem Teil werden Verfahren vorgestellt, mit denen man die Lösung für ein explizites System gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)), \quad \mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0,$$

numerisch approximieren kann. Die Betrachtung von Systemen ist keine große Einschränkung, da man ja explizite Differentialgleichungen höherer Ordnung in solche Systeme überführen kann, siehe Satz 4.3.

Der einfacheren Darstellung wegen werden meist sogar nur Anfangswertprobleme von skalaren Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad (7.1)$$

betrachtet. Die Erweiterung der Aussagen auf Systeme ist im allgemeinen unkompliziert.  $\square$

**Bemerkung 7.2 Notwendigkeit der Nutzung numerischer Approximationen.** Im allgemeinen ist eine numerische Approximation der Lösung von (7.1) notwendig, da man nur in den wenigsten Fällen eine analytische Lösung findet. Ein Beispiel sind Riccatische Differentialgleichungen, siehe Bemerkung 2.34. Für die Riccatische Differentialgleichung

$$y'(x) = x^2 + y^2(x)$$

kann man nachweisbar keine Lösung durch elementare Funktionen und durch Integrationen angeben.  $\square$

**Beispiel 7.3 Einführendes Beispiel: das explizite Euler-Verfahren.** Dabei handelt es sich um das einfachste numerische Verfahren zur Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen. Dieses Verfahren wurde schon beim Beweis des Satzes von Peano verwendet, siehe Bemerkung 3.34. Es wird auch Vorwärts-Euler-Verfahren oder Eulersches Polygonzugverfahren genannt.

Betrachte das Anfangswertproblem (7.1) im Intervall  $[x_0, x_e]$ . Dieses Intervall wird in  $N$  gleichlange (der Einfachheit halber) Teilintervalle zerlegt. Damit erhält man ein Gitter auf  $[x_0, x_e]$  und  $h = (x_e - x_0)/N$  wird Gitterweite genannt. Die Knoten des Gitters werden durchnummeriert  $x_0, x_1, \dots, x_N = x_e$ . **Bild**

Man betrachtet die zu (7.1) äquivalente Integralgleichung, siehe Bemerkung 3.3,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Nun ist man zunächst an einer Approximation der Lösung im Gitterpunkt  $x_1$  interessiert. Es gilt

$$y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(t, y(t)) dt.$$

Der Wert des Integrals wird nun auf grobe Weise approximiert: Integrand an der unteren Integrationsgrenze mal Länge des Intervalls. Man erhält

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y(x_0))(x_1 - x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Das ist eine Näherung für  $y(x_1)$ . Die Schreibweise ist wie folgt:

- Lösung von (7.1):  $y(x_k)$ ,
- numerische Approximation:  $y_k$ .

Nun kann man, startend von  $y_1$ , eine Näherung  $y_2$  von  $y(x_2)$  auf dieselbe Art und Weise berechnen. Damit erhält man das explizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad y_0 = y(x_0). \quad (7.2)$$

□

**Bemerkung 7.4** Setzt man höhere Differenzierbarkeit für  $y(x)$  voraus, kann man das Verfahren auch über die Taylor<sup>1</sup>-Entwicklung von  $y(x)$  in  $x_{k+1}$  herleiten. *Übungsaufgabe* □

**Bemerkung 7.5 Geometrische Interpretation.** Das Verfahren lässt sich einfach geometrisch interpretieren.

**Bild**

Im Punkt  $(x_k, y_k)$  nimmt man den (ungefähren) Anstieg der Lösung

$$y'(x_k) = f(x_k, y(x_k)) \approx f(x_k, y_k).$$

Der letzte Term ist bekannt. Dann geht man auf dem Geradenstück mit diesem Anstieg bis zum Punkt mit der  $x$ -Koordinate  $x_{k+1}$ . Der Anstieg dieser Geraden lässt sich als

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{1}{h} (y_{k+1} - y_k)$$

ausdrücken. Setzt man diesen Ausdruck gleich zu  $f(x_k, y_k)$  erhält man durch Umstellen die Verfahrensvorschrift (7.2). □

**Beispiel 7.6** Betrachte die Differentialgleichung

$$y'(x) = x, \quad y(x_0 = 0) = 1, \quad x \in [0, 1].$$

Nimmt man als Stützstellen  $x_k = k/10, k = 0, \dots, 10$ , das heißt  $h = 1/10$ , so erhält man mit dem expliziten Euler-Verfahren

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0 = 1 \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = 1 + \frac{1}{10} \frac{1}{10} = 1.01 \\ &\vdots \\ y_{10} &= y_9 + hf(x_9, y_9) = 1.45. \end{aligned}$$

Die analytische Lösung  $y = x^2/2 + 1$  hat im Punkt  $x = 1$  den Wert 1.5, der Fehler ist also 0.05.

Mit dem feineren Gitter  $h = 1/100$  erhält man  $y_{100} = 1.495$ , der Fehler ist also nur noch 0.005. **Matlabdemo** □

---

<sup>1</sup>Brook Taylor (1685 – 1731)



**Bemerkung 7.7** Die Numerische Mathematik gewöhnlicher Differentialgleichungen beschäftigt sich mit folgenden Aufgaben und Fragestellungen:

- Konstruktion von Verfahren zur numerischen Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen.
- Welche Bedingungen muss die rechte Seite  $f(x, y(x))$  in (7.1) erfüllen, damit ein Verfahren funktioniert?
- Welchen Einfluss hat eine Veränderung der Gitterweite  $h$  auf die Genauigkeit von Verfahren?
- Wie kann man sinnvoll nichtkonstante Gitterweiten wählen?
- ...

□

Die folgende Definition formuliert eine Eigenschaft, die in diesem Kapitel an das stetige Problem (7.1) gestellt wird.

**Definition 7.8 Ljapunov<sup>2</sup>-Stabilität.** Sei  $I$  eine beschränkte Menge. Betrachte das gestörte Problem

$$z'(x) = f(x, z(x)) + \delta(x), \quad x \in I, \quad z(x_0) = y_0 + \delta_0.$$

Das Problem (7.1) heißt stabil im Sinne von Ljapunov auf  $I$ , falls für alle Störungen mit

$$|\delta_0| < \varepsilon, \quad |\delta(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in I,$$

und  $\varepsilon > 0$  hinreichend klein, so dass das gestörte Problem eine eindeutige Lösung besitzt, ein  $C > 0$  existiert, welches unabhängig von  $\varepsilon$  ist, so dass

$$|y(x) - z(x)| \leq C\varepsilon \quad \forall x \in I.$$

Ist  $I$  nicht nach oben beschränkt, nennt man (7.1) asymptotisch stabil, falls (7.1) Ljapunov-stabil in jedem beschränkten Teilintervall ist und außerdem gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |y(x) - z(x)| = 0.$$

□

Ein wichtiges Lemma zur Untersuchung gewöhnlicher Differentialgleichungen ist das folgende.

**Lemma 7.9 Lemma von Gronwall<sup>3</sup>.** Sei  $p(x)$  eine integrierbare Funktion, die im Intervall  $(x_0, x_0 + X)$  nichtnegativ ist. Weiter seien  $g(x)$  und  $\phi(x)$  zwei stetige Funktionen auf  $[x_0, x_0 + X]$ , wobei  $g(x)$  nicht fällt. Falls die Ungleichung

$$\phi(x) \leq g(x) + \int_{x_0}^x p(s)\phi(s) \, ds, \quad \forall x \in [x_0, x_0 + X]$$

erfüllt ist, dann gilt

$$\phi(x) \leq g(x) \exp\left(\int_{x_0}^x p(s) \, ds\right) \quad \forall x \in [x_0, x_0 + X].$$

**Beweis:** Literatur, Übungsaufgabe ?

■

**Satz 7.10** Betrachte das Anfangswertproblem (7.1), wobei die rechte Seite gleichmäßig Lipschitz-stetig bezüglich  $y$  ist mit einer Lipschitz-Konstante  $L \geq 0$ . Dann ist (7.1) Ljapunov-stabil.

<sup>2</sup>Alexander Michailowitsch Ljapunov (1857 – 1918)

<sup>3</sup>Thomas Hakon Gronwall (1877 – 1932)

**Beweis:** Sei  $w(x) = z(x) - y(x)$ . Diese Funktion erfüllt die Differentialgleichung

$$w'(x) = z'(x) - y'(x) = f(x, z(x)) - f(x, y(x)) + \delta(x).$$

Integration in  $[x_0, x]$  ergibt

$$\begin{aligned} w(x) &= w(x_0) + \int_{x_0}^x \left( f(s, z(s)) - f(s, y(s)) \right) ds + \int_{x_0}^x \delta(s) ds \\ &= \delta_0 + \int_{x_0}^x \left( f(s, z(s)) - f(s, y(s)) \right) ds + \int_{x_0}^x \delta(s) ds. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |w(x)| &\leq |\delta_0| + \int_{x_0}^x |f(s, z(s)) - f(s, y(s))| ds + \int_{x_0}^x |\delta(s)| ds \\ &\leq \varepsilon + \int_{x_0}^x L |z(s) - y(s)| ds + \int_{x_0}^x \varepsilon ds \\ &= (1 + |x - x_0|) \varepsilon + L \int_{x_0}^x |w(s)| ds. \end{aligned}$$

Mit dem Gronwall-Lemma folgt

$$|w(x)| \leq (1 + |x - x_0|) \varepsilon \exp \left( L \int_{x_0}^x ds \right) = (1 + |x - x_0|) \varepsilon e^{L|x-x_0|}.$$

Damit ist die Ungleichung der Ljapunov-Stabilität mit  $C = (1 + |x - x_0|) e^{L|x-x_0|}$  gezeigt. ■

**Bemerkung 7.11** Offenbar gilt bei der eben bewiesenen Ljapunov-Stabilität nicht  $\lim_{x \rightarrow \infty} |w(x)| = 0$ , so dass keine asymptotische Stabilität vorliegt. Die Konstante der Ljapunov-Stabilität kann wegen des exponentiellen Faktors schon für kleine Werte  $|x - x_0|$  sehr groß sein. □

# Kapitel 8

## Einschrittverfahren

### 8.1 Allgemeines

**Definition 8.1 Gitter, Schrittweite.** Eine Zerlegung  $I_h$  des Interval  $I = [x_0, x_e]$

$$I_h = \{x_0, x_1, \dots, x_N = x_e\}$$

mit  $x_0 < x_1 < \dots < x_N$  wird Gitter genannt. Dabei sind  $h_k = x_{k+1} - x_k$  die Schrittweiten.  $\square$

**Definition 8.2 Explizites und implizites Verfahren.** Ein numerisches Verfahren zur Lösung von (7.1) auf einem Gitter  $I_h$  wird explizit genannt, falls die Näherung  $y_{k+1}$  in  $x_{k+1}$  sich direkt durch bereits berechnete Werte  $y_i$ ,  $i < k$ , berechnen lässt. Anderenfalls heißt das Verfahren implizit. Implizite Verfahren benötigen in jedem Schritt die Lösung einer im allgemeinen nichtlinearen Gleichung zur Berechnung von  $y_{k+1}$ .  $\square$

**Definition 8.3 Einschrittverfahren, Verfahrensfunktion.** Ein Einschrittverfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung  $y_{k+1}$  von (7.1) auf einem Gitter  $I_h$  hat die Gestalt

$$y_{k+1} = y_k + h_k \Phi(x, y, h), \quad k = 0, 1, \dots, \quad y_0 = y(x_0). \quad (8.1)$$

Hierbei wird  $\Phi(\cdot, \cdot, \cdot)$  die Verfahrensfunktion oder die Zuwachsfunktion des Einschrittverfahrens genannt.  $\square$

**Beispiel 8.4** Das explizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(x_k, y_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad y_0 = y(x_0),$$

ist ein explizites Einschrittverfahren mit der Verfahrensfunktion

$$\Phi(x, y, h) = f(x_k, y_k).$$

Das implizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + h_k f(x_{k+1}, y_{k+1}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad y_0 = y(x_0),$$

ist ein implizites Einschrittverfahren mit der Verfahrensfunktion

$$\Phi(x, y, h) = f(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

Zur Berechnung von  $y_{k+1}$  muss man bei diesem Verfahren eine Gleichung lösen. Wie kompliziert das ist, hängt von der Funktion  $f(x, y)$  ab.  $\square$

## 8.2 Konsistenz und Konvergenz expliziter Einschrittverfahren

**Bemerkung 8.5** Explizite Einschrittverfahren besitzen eine Verfahrensfunktion der Gestalt  $\Phi(x_k, y_k, h_k)$ . Für die Betrachtungen dieses Kapitels kann man sich auf den Standpunkt stellen, dass auch implizite Einschrittverfahren als explizite Einschrittverfahren geschrieben werden können, bei denen man jedoch im allgemeinen die Verfahrensfunktion nicht kennt.  $\square$

**Definition 8.6 Lokaler Fehler.** Sei  $\hat{y}_{k+1}$  das Resultat eines Schrittes mit dem expliziten Einschrittverfahren (8.1) mit dem Startwert auf der Lösung  $y(x)$ , das heißt

$$\hat{y}_{k+1} = y(x_k) + h_k \Phi(x_k, y(x_k), h_k).$$

Dann heißt

$$\text{le}(x_{k+1}) = \text{le}_{k+1} = y(x_{k+1}) - \hat{y}_{k+1}$$

lokaler Fehler (local error). **Bild**  $\square$

**Bemerkung 8.7** In der Literatur wird zum Teil auch

$$\frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h_k} - \Phi(x_k, y(x_k), h_k)$$

als lokaler Fehler bezeichnet.  $\square$

Für ein brauchbares Verfahren wird man fordern, dass der lokale Fehler in einem geeigneten Sinne klein ist.

**Definition 8.8 Konsistentes Verfahren.** Seien  $y(x)$  die Lösung des Anfangswertproblems (7.1),  $h_{\max} = \max_k h_k$  und

$$S := \{(x, y) : x \in [x_0, x_e], y \in \mathbb{R}\}.$$

Dann heißt das Einschrittverfahren (8.1) konsistent, wenn für alle  $f \in C(S)$ , die in  $S$  einer Lipschitz-Bedingung bezüglich  $y$  genügen, gilt

$$\lim_{h_{\max} \rightarrow 0} \left( \max_{x_k \in I_h} \frac{|\text{le}(x_{k+1})|}{h_k} \right) = 0$$

oder

$$\lim_{h_{\max} \rightarrow 0} \left( \max_{x_k \in I_h} |f(x_k, y(x_k)) - \Phi(x_k, y(x_k), h_k)| \right) = 0.$$

Beide Bedingungen sind äquivalent. *Übungsaufgabe*  $\square$

**Bemerkung 8.9** Dass der lokale Fehler für  $h_{\max} \rightarrow 0$  gegen Null konvergiert ist für jede beschränkte Verfahrensfunktion klar, da in diesem Fall  $h_k \rightarrow 0$  und  $\hat{y}_{k+1} \rightarrow y(x_k)$ . Konsistenz verlangt mehr, nämlich dass die Verfahrensfunktion die Ableitung hinreichend gut approximiert

$$\frac{\text{le}(x_{k+1})}{h_k} = \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h_k} - \Phi(x_k, y(x_k), h_k) \approx y'(x_k) - \Phi(x_k, y(x_k), h_k).$$

$\square$

**Beispiel 8.10** Im expliziten Euler-Verfahren gilt  $\Phi(x_k, y(x_k), h_k) = f(x_k, y(x_k))$ . Damit ist die zweite Bedingung aus Definition 8.8 offensichtlich erfüllt und das Verfahren ist konsistent.  $\square$

Für praktische Belange ist nicht nur die Konsistenz, sondern auch die Güte der Approximation der Ableitung durch die Verfahrensfunktion wesentlich. Dies gestattet den Vergleich verschiedener Einschrittverfahren. Der einfacheren Darstellung halber sei nun  $h_k = h$  für alle  $k$ .

**Definition 8.11 Konsistenzordnung.** Ein explizites Einschrittverfahren (8.1) besitzt die Konsistenzordnung  $p \in \mathbb{N}$ , wenn  $p$  die größte natürliche Zahl ist, so dass für jede Funktion  $f \in C(S)$ , die bezüglich  $y$  einer Lipschitz-Bedingung genügt, gilt

$$|\text{le}(x_k + h)| \leq ch^{p+1}$$

für alle  $x_k \in I_h$ , für alle  $I_h$  mit  $h \in (0, H]$ , mit einer von  $h$  unabhängigen Konstante  $c > 0$ .  $\square$

**Bemerkung 8.12** Die Konstante  $c$  in der Definition der Konsistenzordnung kann von Ableitungen der Funktion  $y(x)$ , von  $f(x, y)$  und von partiellen Ableitungen von  $f(x, y)$  abhängen.  $\square$

**Beispiel 8.13** Betrachte wieder das explizite Euler-Verfahren und nehme an, dass die Funktion  $y(x)$  zweimal stetig differenzierbar ist. Dann folgt mit Hilfe der Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} |\text{le}(x_k + h)| &= y(x_k + h) - \hat{y}_{k+1} \\ &= y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2}y''(x_k + \theta h) - y(x_k) - h \underbrace{f(x_k, y_k)}_{=y'(x_k)} \\ &= \frac{h^2}{2}y''(x_k + \theta h) \leq \frac{h^2}{2} \|y''\|_{C^2([x_0, x_e])}, \end{aligned}$$

mit  $\theta \in (0, 1)$ . Das Verfahren hat damit die Konsistenzordnung 1.  $\square$

**Bemerkung 8.14** Die Konsistenz ist eine lokale Eigenschaft eines Einschrittverfahrens. Für praktische Belange ist jedoch die Frage wichtig, ob die numerisch berechnete Lösung gegen die analytische Lösung der Differentialgleichung konvergiert, wenn man das Gitter immer mehr verfeinert. Die Geschwindigkeit der Konvergenz ist natürlich ebenso wichtig.  $\square$

**Definition 8.15 Konvergentes Verfahren, Konvergenzordnung.** Ein Einschrittverfahren (8.1) heißt konvergent für das Anfangswertproblem (7.1) auf dem Intervall  $I = [x_0, x_e]$ , wenn für jede Folge von Gittern  $\{I_h\}$  mit  $h_{\max} = \max_{h_k \in I_h} h_k \rightarrow 0$  für den globalen Fehler

$$e(x_k, h) = y(x_k) - y_k, \quad x_k \in I_h,$$

gilt

$$\max_{x_k \in I_h} |e(x_k, h)| \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad h_{\max} \rightarrow 0.$$

Das Einschrittverfahren besitzt die Konvergenzordnung  $p^*$ , wenn  $p^*$  die größte natürliche Zahl ist, so dass für alle Schrittweiten  $h_{\max} \in (0, H]$  gilt

$$|e(x_k, h)| \leq ch_{\max}^{p^*} \quad \forall x_k \in I_h,$$

wobei  $c > 0$  unabhängig von  $h_{\max}$  ist.  $\square$

Es zeigt sich, dass unter bestimmten Bedingungen aus der Konsistenz eines Einschrittverfahrens dessen Konvergenz folgt. Dabei ist die Konvergenzordnung gleich der Konsistenzordnung. Zum Beweis dieses Sachverhaltes wird zunächst das folgende Lemma bereit gestellt.

**Lemma 8.16** Gelten für reelle Zahlen  $x_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , die Ungleichungen

$$|x_{n+1}| \leq (1 + \delta) |x_n| + \beta$$

mit Konstanten  $\delta > 0$ ,  $\beta \geq 0$ , so gilt

$$|x_n| \leq e^{n\delta} |x_0| + \frac{e^{n\delta} - 1}{\delta} \beta, \quad n = 0, 1, \dots$$

**Beweis:** Mit vollständiger Induktion, Übungsaufgabe. ■

**Satz 8.17 Zusammenhang Konsistenz und Konvergenz.** Sei  $y(x)$  die Lösung des Anfangswertproblems (7.1) mit  $f \in C(S)$ . Desweiteren genüge die Verfahrensfunktion in der zweiten Komponente einer Lipschitzbedingung

$$|\Phi(x, y_1, h) - \Phi(x, y_2, h)| \leq M |y_1 - y_2| \quad \forall (x, y) \in S, h \in (0, H].$$

Ferner gelte für den lokalen Fehler die Abschätzung

$$|le(x_k + h)| \leq ch^{p+1} \quad \forall x \in I_h, h \in (0, H]$$

und es sei  $y_0 = y(x_0)$ .

Dann gilt für den globalen Fehler

$$|e(x_{k+1}, h)| \leq c \frac{e^{M(x_{k+1}-x_0)} - 1}{M} h^p,$$

wobei  $c$  unabhängig von  $h$  ist.

**Beweis:** Es gelten

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\Phi(x_k, y_k, h), \\ y(x_{k+1}) &= y(x_k) + h\Phi(x_k, y(x_k), h) + le(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} |e(x_{k+1}, h)| &= |y(x_{k+1}) - y_{k+1}| \\ &= |y(x_k) - y_k + le(x_{k+1}) + h(\Phi(x_k, y(x_k), h) - \Phi(x_k, y_k, h))| \\ &= |e(x_k, h) + le(x_{k+1}) + h(\Phi(x_k, y(x_k), h) - \Phi(x_k, y_k, h))| \\ &\leq |e(x_k, h)| + |le(x_{k+1})| + h|\Phi(x_k, y(x_k), h) - \Phi(x_k, y_k, h)| \\ &\leq |e(x_k, h)| + ch^{p+1} + hM|y(x_k) - y_k| \\ &= (1 + hM)|e(x_k, h)| + ch^{p+1}. \end{aligned}$$

Damit hat man eine Ungleichungskette der Form, wie sie in Lemma 8.16 betrachtet wurde. Man erhält

$$|e(x_{k+1}, h)| \leq e^{(k+1)hM} |e(x_0)| + c \frac{e^{(k+1)hM} - 1}{hM} h^{p+1} = c \frac{e^{M(x_{k+1}-x_0)} - 1}{M} h^p. \quad \blacksquare$$

**Bemerkung 8.18**

- Die Betrachtung einer konstanten Schrittweite war nur der Einfachheit halber. Die Aussage des Satzes lässt sich auf nicht-konstante Schrittweiten ausdehnen. Dann setzt man  $h = \max_k h_k$ .
- Das Einschrittverfahren liefert eine Näherung  $y_k$  für die Lösung in den Gitterpunkten  $x_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, N$ . Damit man besser mit der analytischen Lösung vergleichen kann, verbindet man diese Punkte mit Geradenstücken von  $(x_k, y_k)$  nach  $(x_{k+1}, y_{k+1})$ . Damit erhält man eine stückweise lineare Näherung der Lösung, die auf  $[x_0, x_e]$  definiert ist. Diese Funktion wird  $y^h(x)$  genannt. Die obigen Betrachtungen lassen sich auf diese Funktion  $y^h(x)$  ausdehnen. □

### 8.3 Runge–Kutta–Verfahren

**Bemerkung 8.19 Grundidee.** Die Euler–Verfahren sind nur Verfahren erster Ordnung. Die Grundidee von Runge<sup>1</sup>–Kutta<sup>2</sup>–Verfahren besteht darin, die Verfahrensfunktion  $\Phi(x, y, h)$  durch eine Linearkombination von Werten von  $f(x, y)$  in diskreten Punkten anzusetzen. Man erhält dadurch Verfahren höherer Ordnung für den Preis, dass man mehr Funktionswerte berechnen muss.

Das kann man gut an der zum Anfangswertproblem (7.1) äquivalenten Integralgleichung illustrieren. Hänge der Einfachheit halber die rechte Seite von (7.1) nur von  $x$  ab, dann hat die zu (7.1) gehörende Integralgleichung die Gestalt

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt. \quad (8.2)$$

Die Idee der Runge–Kutta–Verfahren besteht nun darin, das Integral auf der rechten Seite durch eine Quadraturformel zu approximieren, etwa im Intervall  $[x_k, x_{k+1}]$  durch

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt \approx h_k \sum_{j=1}^s b_j f(x_k + c_j h_k)$$

mit den Gewichten  $b_j$  und den Knoten  $x_k + c_j h$ .

Im weiteren wird der Einfachheit halber  $h_k = h$  für alle  $k$  betrachtet.  $\square$

**Definition 8.20 Runge–Kutta–Verfahren, Steigungen, Stufen.** Ein Runge–Kutta–Verfahren hat die Gestalt

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(x, y, h), \quad k = 0, 1, \dots, \quad y_0 = y(x_0),$$

wobei die Verfahrensfunktion mit Hilfe der Größen

$$K_i(x, y) = f\left(x + c_i h, y + h \sum_{j=1}^s a_{ij} K_j(x, y)\right)$$

durch

$$\Phi(x, y, h) = \sum_{i=1}^s b_i K_i(x, y)$$

definiert ist, mit  $c_1, \dots, c_s, b_1, \dots, b_s, a_{ij} \in \mathbb{R}$ ,  $i, j = 1, \dots, s$ . Die Größen  $K_i(x, y)$ ,  $i = 1, \dots, s$ , werden Steigungen genannt. Die Zahl  $s \in \mathbb{N}$  ist die Anzahl der Stufen des Verfahrens.  $\square$

**Bemerkung 8.21 Butcher<sup>3</sup>–Schema.** Der besseren Übersichtlichkeit halber schreibt man Runge–Kutta–Verfahren im allgemeinen in einem Parameterschema, dem sogenannten Butcher–Schema

$$\begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array} \implies \begin{array}{c|c} \mathbf{c} & A \\ \hline & \mathbf{b}^T \end{array}. \quad (8.3)$$

Dabei werden  $\mathbf{c}$  Knotenvektor,  $A$  Verfahrensmatrix und  $\mathbf{b}$  Gewichtsvektor genannt.  $\square$

<sup>1</sup>Carle David Tolmé Runge (1856 – 1927)

<sup>2</sup>Martin Kutta (1867 – 1944)

<sup>3</sup>John C. Butcher, geb. 1933

### 8.3.1 Explizite Runge–Kutta–Verfahren

**Bemerkung 8.22** Bei expliziten Runge–Kutta–Verfahren können die Steigungen nacheinander berechnet werden

$$\begin{aligned} K_1(x, y) &= f(x_k, y_k), \\ K_2(x, y) &= f(x_k + c_2 h, y_k + h a_{21} K_1(x, y)), \\ &\vdots \\ K_s(x, y) &= f\left(x_k + c_s h, y_k + h \sum_{j=1}^{s-1} a_{sj} K_j(x, y)\right). \end{aligned}$$

Das Butcher–Schema besitzt die Gestalt

$$\begin{array}{c|cccccc} 0 & & & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{s,s-1} & & \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s & \end{array}$$

□

**Beispiel 8.23** Das explizite Euler–Verfahren ist ein explizites Runge–Kutta–Verfahren mit dem Butcher–Schema

$$\begin{array}{c|c} 0 & \\ \hline & 1 \end{array}$$

In der Integralgleichung wird die Approximation

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t, y(t)) dt \approx h f(x_k, y_k(x_k))$$

verwendet, siehe auch Beweis des Satzes von Peano, Satz 3.32. □

**Satz 8.24 Konsistenz expliziter Runge–Kutta–Verfahren.** Sei  $f \in C(S)$ , siehe Definition 8.8. Ein explizites Runge–Kutta–Verfahren ist genau dann konsistent, wenn

$$\sum_{i=1}^s b_i = 1.$$

**Beweis:** Wegen der Stetigkeit von  $f(x, y)$  gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} K_i(x, y) = f(x_k, y(x_k)), \quad \forall (x, y) \in S, \quad i = 1, \dots, s,$$

für den Fall, dass man einen exakten Startwert  $y_k = y(x_k)$  hat. Damit folgt wegen der Stetigkeit des Betrages

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} |f(x_k, y(x_k)) - \Phi(x_k, y(x_k), h_k)| &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| f(x_k, y(x_k)) - \sum_{i=1}^s b_i K_i(x, y) \right| \\ &= \left| f(x_k, y(x_k)) - \sum_{i=1}^s b_i \lim_{h \rightarrow 0} K_i(x, y) \right| \\ &= \left| f(x_k, y(x_k)) \left( 1 - \sum_{i=1}^s b_i \right) \right| = 0 \end{aligned}$$

genau dann, wenn  $\sum_{i=1}^s b_i = 1$ . Somit ist die zweite Bedingung von Definition 8.8 erfüllt. ■



**Satz 8.25 Interpretation der Steigungen.** Gelte  $y \in C^2([x_0, x_e])$  für die Lösung von (7.1) und sei  $f \in C(S)$  sowie in der zweiten Komponente Lipschitz-stetig. Gilt

$$c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}, \quad i \geq 2,$$

so ist  $K_i(x, y)$  eine Approximation von mindestens 1. Ordnung an  $y'(x + c_i h)$ , das heißt

$$y'(x_k + c_i h) - K_i(x, y) = \mathcal{O}(h^2).$$

**Beweis:** Der Beweis erfolgt induktiv.

$i = 2$ . Für  $i = 2$  folgt mit Hilfe von (7.1), der Lipschitz-Stetigkeit und der Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned} & |y'(x_k + c_2 h) - K_2(x, y)| \\ &= |f(x_k + c_2 h, y(x_k + c_2 h)) - f(x_k + c_2 h, y(x_k) + h a_{21} f(x_k, y(x_k)))| \\ &\leq L |y(x_k + c_2 h) - y(x_k) - h a_{21} f(x_k, y(x_k))| \\ &= L |y(x_k) + c_2 h y'(x_k) + \mathcal{O}(h^2) - y(x_k) - h a_{21} y'(x_k)| \\ &= L |(c_2 - a_{21}) h y'(x_k) + \mathcal{O}(h^2)|. \end{aligned}$$

Für  $c_2 = a_{21}$  ist der Fehler von Ordnung  $\mathcal{O}(h^2)$ .

$i > 2$ . Seien die Fehlerordnungen für alle Indizes  $2, \dots, i-1$  bewiesen. Dann gilt

$$\begin{aligned} & |y'(x_k + c_i h) - K_i(x, y)| \\ &= \left| f(x_k + c_i h, y(x_k + c_i h)) - f\left(x_k + c_i h, y(x_k) + h \sum_{j=i}^{i-1} a_{ij} K_j(x, y)\right) \right| \\ &\leq L \left| y(x_k + c_i h) - y(x_k) - h \sum_{j=i}^{i-1} a_{ij} K_j(x, y) \right| \\ &= L \left| y(x_k) + c_i h y'(x_k) + \mathcal{O}(h^2) - y(x_k) - h \sum_{j=i}^{i-1} (a_{ij} (y'(x_k + c_j h) + \mathcal{O}(h^2))) \right| \\ &= L \left| c_i h y'(x_k) + \mathcal{O}(h^2) - h \sum_{j=i}^{i-1} (a_{ij} (y'(x_k) + \mathcal{O}(h))) \right| \\ &= L \left| h \left( c_i - \sum_{j=i}^{i-1} a_{ij} \right) y'(x_k) + \mathcal{O}(h^2) \right|. \end{aligned}$$

Die Ordnung  $\mathcal{O}(h^2)$  erhält man, wenn  $c_i = \sum_{j=i}^{i-1} a_{ij}$  gilt. ■

**Bemerkung 8.26** Für viele explizite Runge-Kutta-Verfahren sind die Bedingungen aus den Sätzen 8.24 und 8.25 erfüllt. Das Ziel besteht nun darin, die Koeffizienten  $b_1, \dots, b_s$  und  $a_{ij}$  so zu bestimmen, dass das Runge-Kutta-Verfahren eine möglichst hohe Konsistenzordnung besitzt. Die Konsistenzordnung eines  $s$ -stufigen Runge-Kutta-Verfahrens kann aus der Taylor-Entwicklung des lokalen Fehlers hergeleitet werden. Man findet beispielsweise:

- Ein Runge-Kutta-Verfahren mit den Parametern  $(A, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  hat dann mindestens die Konsistenzordnung  $p = 2$ , wenn

$$\sum_{j=1}^s b_j c_j = \frac{1}{2}.$$

◦ Gelten außerdem

$$\sum_{j=1}^s b_j c_j^2 = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^s b_j \sum_{k=1}^s a_{jk} c_k = \frac{1}{6},$$

so hat es die Konsistenzordnung  $p = 3$ .

Die Beweise dieser Aussagen findet man in der Literatur.  $\square$

**Beispiel 8.27 Zweistufige Runge–Kutta–Verfahren.** Zur Untersuchung zweistufiger Runge–Kutta–Verfahren betrachten wir der Einfachheit halber das sogenannte autonome Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(y(x)), \quad y(x_0) = y_0.$$

Für die Steigungen gilt

$$\begin{aligned} K_1(y) &= f(y_k), \\ K_2(y) &= f(y_k + ha_{21}K_1(y_k)) = f(y_k + ha_{21}f(y_k)) \\ &= f(y_k) + ha_{21}f(y_k)f_y(y_k) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Damit gelten für die Verfahrensfunktion im Falle eines exakten Startwertes

$$\Phi(y(x_k)) = b_1 K_1(y) + b_2 K_2(y) = (b_1 + b_2)f(y(x_k)) + hb_2 a_{21}f(y(x_k))f_y(y(x_k)) + \mathcal{O}(h^2)$$

und die Lösung

$$y(x_k + h) = y(x_k) + h \underbrace{y'(x_k)}_{=f(y(x_k))} + \frac{h^2}{2}y''(x_k) + \mathcal{O}(h^3).$$

Mit Kettenregel erhält man

$$y''(x) = \frac{d}{dx}y'(x) = \frac{d}{dx}f(y(x)) = f_y(y)y'(x) = f_y(y)f(y(x)).$$

Damit folgt für den lokalen Fehler

$$\begin{aligned} \text{le}(x_k + h) &= y(x_k + h) - y(x_k) - h\Phi(y(x_k)) \\ &= y(x_k) + hf(y(x_k)) + \frac{h^2}{2}(f_y(y(x_k))f(y(x_k))) + \mathcal{O}(h^3) - y(x_k) \\ &\quad - h\left((b_1 + b_2)f(y(x_k)) + hb_2 a_{21}f(y(x_k))f_y(y(x_k)) + \mathcal{O}(h^2)\right) \\ &= h(1 - (b_1 + b_2))f(y(x_k)) + h^2\left(\frac{1}{2} - b_2 a_{21}\right)f(y(x_k))f_y(y(x_k)) \\ &\quad + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Für eine möglichst hohe Konsistenzordnung müssen die ersten beiden Terme verschwinden. Man erhält mit der Bedingung  $c_2 = a_{21}$

$$b_1 + b_2 = 1, \quad b_2 a_{21} = \frac{1}{2} \iff b_2 c_2 = \frac{1}{2}.$$

Die erste Bedingung ist die allgemeine Konsistenzbedingung. Mit diesen beiden Bedingungen sind alle 2–stufigen expliziten Runge–Kutta–Verfahren charakterisiert, welche die Konsistenz– und Konvergenzordnung 2 besitzen

$$\frac{c_2}{\left| \begin{array}{c|c} c_2 & c_2 \\ \hline 1 - \frac{1}{2c_2} & \frac{1}{2c_2} \end{array} \right|}, \quad \text{mit } c_2 \neq 0.$$

Für  $c_2 = 1/2$  erhält man die Methode von Runge (1895)

$$\frac{1/2 \mid 1/2}{\mid 0 \quad 1}.$$

Bezüglich der Approximation des Integrals in (8.2) entspricht das der Nutzung der Mittelpunkregel.

Für  $c_2 = 1$  erhält man die Methode von Heun<sup>4</sup> (1900)

$$\frac{1 \mid 1}{\mid 1/2 \quad 1/2},$$

was der Nutzung der Trapezregel zur numerischen Quadratur in (8.2) entspricht.  $\square$

**Bemerkung 8.28 Zu autonomen Differentialgleichungen.** Jede explizite Differentialgleichung erster Ordnung

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$$

kann durch die Einführung der Funktionen

$$\bar{\mathbf{y}}(x) := x \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{y}}(x) := \begin{pmatrix} \mathbf{y}(x) \\ \bar{\mathbf{y}}(x) \end{pmatrix}$$

in die autonome Form

$$\tilde{\mathbf{y}}'(x) = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{y}}(x)) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) \\ 1 \end{pmatrix}$$

gebracht werden.  $\square$

**Satz 8.29 Konsistenz und Konvergenz expliziter Runge–Kutta–Verfahren.** Sei  $y(x)$  die Lösung des Anfangswertproblems (7.1) mit  $f \in C(S)$  und genüge  $f(x, y)$  in der zweiten Komponente einer Lipschitzbedingung. Dann ist ein explizites Runge–Kutta–Verfahren, welches von Ordnung  $p$  konsistent ist auch von Ordnung  $p$  konvergent.

**Beweis:** Die Verfahrensfunktion bei expliziten Runge–Kutta–Verfahren ist eine Linearkombination von Funktionswerten der rechten Seite  $f(x, y)$ . Damit folgt die Aussage direkt aus Satz 8.17, da die dort geforderte Lipschitz–Bedingung an die Verfahrensfunktion bei Runge–Kutta–Verfahren gerade die Lipschitz–Bedingung an die rechte Seite der Differentialgleichung ist.  $\blacksquare$

**Bemerkung 8.30 Runge–Kutta–Verfahren höherer Ordnung.** Analog zu 2–stufigen Verfahren kann man Bedingungen an die Koeffizienten eines expliziten Runge–Kutta–Verfahrens finden, um höhere Ordnungen zu erreichen. Es bleibt noch die Frage, was die Mindestanzahl von Stufen eines expliziten Runge–Kutta–Verfahrens ist, um eine gewisse Ordnung erreichen zu können. Antworten gab Butcher (1963, 1965, 1985)

$$\frac{p \mid 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8}{\min s \mid 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad 7 \quad 9 \quad 11}.$$

$\square$

---

<sup>4</sup>Karl Heun (1859 – 1929)

**Beispiel 8.31 Klassisches Runge–Kutta–Verfahren (1901).** Das sogenannte klassische Runge–Kutta–Verfahren ist ein vierstufiges Verfahren mit dem Butcher–Schema

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}.$$

Es basiert auf der Simpson<sup>5</sup>–Formel. Der mittlere Knoten der Simpson–Formel wird zweimal betrachtet,  $c_2 = c_3$ , jedoch mit anderen zweiten Argumenten in der Berechnung der Steigungen. Dieses Verfahren ist von vierter Ordnung.  $\square$

### 8.3.2 Implizite Runge–Kutta–Verfahren

**Bemerkung 8.32 Herleitung von impliziten Runge–Kutta–Verfahren.** Implizite Runge–Kutta–Verfahren werden aus der Integraldarstellung (8.2) des Anfangswertproblems hergeleitet. Man kann zeigen, dass für jedes implizite Runge–Kutta–Verfahren mit Gewichten  $b_j$  und Knoten  $x_k + c_j h$  eine entsprechende Quadraturformel mit den gleichen Gewichten und Knoten existiert, siehe Praktische Mathematik zu Gauß<sup>6</sup>schen Quadraturformeln.  $\square$

**Beispiel 8.33** Betrachte das Intervall  $[x_k, x_k + h] = [x_k, x_{k+1}]$ . Seien  $c_1, \dots, c_s$  die Nullstellen des Legendre<sup>7</sup>–Polynoms  $P_s(t)$  in der Variablen *Übungsaufgabe*

$$t = \frac{2}{h}(x - x_k) - 1 \implies t \in [-1, 1].$$

Es gibt  $s$  verschiedene reelle Nullstellen in  $(-1, 1)$ . Hat man  $c_1, \dots, c_s$  berechnet, kann man die Koeffizienten  $a_{ij}, b_j$  so bestimmen, dass man ein Verfahren der Ordnung  $2s$  erhält. Dazu muss man die linearen Systeme

$$\sum_{j=1}^s c_j^{k-1} a_{ij} = \frac{c_i^k}{k}, \quad \sum_{j=1}^s c_j^{k-1} b_j = \frac{1}{k}, \quad k = 1, \dots, s,$$

lösen. Zur Herleitung dieser Bedingungen siehe Literatur.  $\square$

**Beispiel 8.34 Klassen von impliziten Runge–Kutta–Verfahren.**

- *Gauß–Legendre–Verfahren.* Es werden die Gauß–Legendre–Quadraturknoten genutzt. Ein  $s$ –stufiges Verfahren besitzt die (maximal mögliche !) Ordnung  $2s$ .

Beispiel: Implizite Mittelpunkregel

$$\frac{1/2 \mid 1/2}{\mid 1}.$$

- *Gauß–Radau<sup>8</sup>–Verfahren.* Diese Verfahren sind dadurch charakterisiert, dass einer der beiden Endpunkte des Intervalls  $[x_k, x_{k+1}]$  zu den Quadraturpunkten gehört. Ein  $s$ –stufiges Verfahren dieser Klasse kann maximal von Ordnung  $2s - 1$  sein.

<sup>5</sup>Thomas Simpson (1710 – 1761)

<sup>6</sup>Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

<sup>7</sup>Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833)

<sup>8</sup>Rodolphe Radau (1835 – 1911)

Beispiele:

- $\begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \quad s = 1, p = 1,$
- $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \quad s = 1, p = 1, \text{ implizites Euler-Verfahren.}$

- *Gauß-Lobatto*<sup>9</sup>-Verfahren. In diesen Verfahren sind beide Endpunkte des Intervalls  $[x_k, x_{k+1}]$  Quadraturpunkte. Ein  $s$ -stufiges Verfahren dieser Art kann maximal von Ordnung  $2s - 2$  sein.

Beispiele:

- Trapezregel, Crank<sup>10</sup>-Nicolson<sup>11</sup>-Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Man hat bei diesem Verfahren *Übungsaufgabe*

$$\begin{aligned} K_1(x, y) &= f(x_k, y_k), \\ K_2(x, y) &= f\left(x_k + h, y_k + \frac{h}{2}K_1(x, y) + \frac{h}{2}K_2(x, y)\right), \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2}K_1(x, y) + \frac{h}{2}K_2(x, y) \\ &= y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k) + \frac{h}{2}f(x_{k+1}, y_{k+1}). \end{aligned}$$

- anderes Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array} \quad s = 2, p = 2.$$

□

**Bemerkung 8.35 Diagonal-implizite Runge-Kutta-Verfahren (DIRK-Verfahren).** Bei einem  $s$ -stufigen Runge-Kutta-Verfahren hat man ein gekoppeltes, nichtlineares System für  $K_1(x, y), \dots, K_s(x, y)$  zu lösen. Für größere  $s$  ist das teuer. Ein Kompromiss besteht darin, sogenannte diagonal-implizite Runge-Kutta-Verfahren (DIRK-Verfahren) zu nutzen:

$$\begin{array}{c|cccccc} c_1 & a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s \end{array}.$$

In DIRK-Verfahren hat man  $s$  unabhängige nichtlineare Gleichungen für die Steigungen zu lösen. In der Gleichung für  $K_i(x, y)$  kommen nur  $K_1(x, y), \dots, K_i(x, y)$  vor, wobei man  $K_1(x, y), \dots, K_{i-1}(x, y)$  bereits berechnet hat. □

<sup>9</sup>Rehuel Lobatto (1797 – 1866)

<sup>10</sup>John Crank (1916 – 2006)

<sup>11</sup>P. Nicolson

### 8.3.3 Lineare Stabilitätstheorie

**Bemerkung 8.36** In der linearen Stabilitätstheorie wird das Verhalten von numerischen Verfahren bei der Lösung des linearen Anfangswertproblems

$$y'(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = 1, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (8.4)$$

untersucht. Die Lösung von (8.4) lautet

$$y(x) = e^{\lambda x}.$$

Wird die Anfangsbedingung leicht gestört, auf den Wert  $1 + \delta_0$ , dann ist die Lösung des gestörten Anfangswertproblems

$$\tilde{y}(x) = (1 + \delta_0)e^{\lambda x} = e^{\lambda x} + \delta_0 e^{\lambda x}.$$

Falls  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$  ist, wird die Differenz

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| = |\delta_0 e^{\lambda x}|$$

für jedes  $\delta_0 \neq 0$  beliebig groß, falls nur  $x$  hinreichend groß ist. Damit ist das Anfangswertproblem (8.4) in diesem Fall nicht asymptotisch stabil.

Ist  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ , dann wird die Differenz  $|y(x) - \tilde{y}(x)|$  für  $x \rightarrow \infty$  beliebig klein und das Anfangswertproblem ist asymptotisch stabil. Dies ist der Fall, der in der linearen Stabilitätstheorie für Einschrittverfahren interessiert.

Es werden Einschrittverfahren auf einem äquidistanten Gitter mit Schrittweite  $h$  betrachtet. Die Lösung von (8.4) im Gitterpunkt  $x_{k+1}$  ist

$$y(x_{k+1}) = e^{\lambda x_{k+1}} = e^{\lambda(x_k+h)} = e^{\lambda h} e^{\lambda x_k} = e^{\lambda h} y(x_k) =: e^z y(x_k),$$

mit  $z := \lambda h \in \mathbb{C}$ ,  $\Re(z) \leq 0$ . Es wird nun untersucht, wie der Schritt von  $x_k$  nach  $x_{k+1}$  für verschiedene Einschrittverfahren aussieht.  $\square$

#### Beispiel 8.37

1. *Explizites Euler-Verfahren.* Die allgemeine Gestalt dieses Verfahrens ist

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k).$$

Speziell für (8.4) erhält man

$$y_{k+1} = y_k + h\lambda y_k = (1 + z)y_k =: R(z)y_k.$$

Es gilt unabhängig von  $\operatorname{Re}(z)$ , dass  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |R(z)| = \infty$ .

2. *Implizites Euler-Verfahren.* Die allgemeine Gestalt dieses Verfahrens ist

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

Für (8.4) kann man dieses Verfahren wie folgt umformen

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h\lambda y_{k+1} && \iff \\ (1-z)y_{k+1} &= y_k && \iff \\ y_{k+1} &= \frac{1}{1-z} y_k = \left(1 + \frac{z}{1-z}\right) y_k =: R(z)y_k. \end{aligned}$$

In diesem Fall gilt unabhängig von  $\operatorname{Re}(z)$ , dass  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |R(z)| = 0$ .

3. *Trapezregel.* Die allgemeine Gestalt dieses Verfahrens ist

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} (f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})),$$

siehe Beispiel 8.34. Für die lineare Differentialgleichung (8.4) erhält man

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2} (\lambda y_k + \lambda y_{k+1}) && \iff \\ \left(1 - \frac{z}{2}\right) y_{k+1} &= \left(1 + \frac{z}{2}\right) y_k && \iff \\ y_{k+1} &= \frac{1+z/2}{1-z/2} y_k = \left(1 + \frac{z}{1-z/2}\right) y_k =: R(z) y_k. \end{aligned}$$

Für die Trapezregel gilt unabhängig von  $Re(z)$ , dass  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |R(z)| = 1$  ist. Die Funktion  $R(z)$  beschreibt für jedes Verfahren den Schritt von  $x_k$  nach  $x_{k+1}$ . Sie ist damit eine Approximation an  $e^z$ , die für unterschiedliche Verfahren unterschiedliche Eigenschaften besitzt, zum Beispiel für den Grenzwert für  $|z| \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Definition 8.38 Stabilitätsfunktion.** Seien  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^s$  und  $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ . Die zu einem  $s$ -stufigen Runge–Kutta–Verfahren mit den Parametern  $(A, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  gehörende Funktion

$$R : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}, \quad z \mapsto 1 + z \mathbf{b}^T (I - zA)^{-1} \mathbf{1}$$

heißt Stabilitätsfunktion des Runge–Kutta–Verfahrens.  $\square$

**Bemerkung 8.39** Alle Stabilitätsfunktionen aus Beispiel 8.37 lassen sich in der Form schreiben, die in der Definition angegeben ist. Beispielsweise gilt für die Trapezregel

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad I - zA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -z/2 & 1 - z/2 \end{pmatrix}, \quad (I - zA)^{-1} = \frac{1}{1 - z/2} \begin{pmatrix} 1 - z/2 & 0 \\ z/2 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$1 + z \mathbf{b}^T (I - zA)^{-1} \mathbf{1} = 1 + \frac{z}{1 - z/2} \left( \frac{1}{2} - \frac{z}{4} + \frac{z}{4} + \frac{1}{2} \right) = 1 + \frac{z}{1 - z/2}.$$

$\square$

**Satz 8.40 Stabilitätsfunktion eines Runge–Kutta–Verfahrens.** Für ein  $s$ -stufiges Runge–Kutta–Verfahren mit den Parametern  $(A, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  ist die Stabilitätsfunktion  $R(z)$  eine rationale Funktion über  $\hat{\mathbb{C}}$ , deren Zähler- und Nennergrad höchstens  $s$  ist. Diese Funktion besitzt höchstens in den Kehrwerten der Eigenwerte von  $A$  Polstellen. Bei einem expliziten Runge–Kutta–Verfahren ist  $R(z)$  ein Polynom.

**Beweis:** Betrachte zunächst ein explizites Runge–Kutta–Verfahren. Dann ist die Matrix  $A$  eine strikte untere Dreiecksmatrix. Somit ist  $I - zA$  eine Dreiecksmatrix mit Einsen in der Hauptdiagonalen. Diese Matrix ist invertierbar und es gilt

$$(I - zA)^{-1} = I + zA + \dots + z^{s-1} A^{s-1},$$

was man durch Multiplikation mit  $(I - zA)$  leicht überprüft. Folglich ist  $R(z)$  ein Polynom vom Grad  $s$ .

Betrachte nun den allgemeinen Fall. Der Ausdruck  $(I - zA)^{-1} \mathbf{1}$  lässt sich interpretieren als die Lösung des Gleichungssystem  $(I - zA)\zeta = \mathbf{1}$ . Nach Cramerscher Regel hat die  $i$ -te Komponente der Lösung die Gestalt

$$\zeta_i = \frac{\det A_i}{\det(I - zA)},$$

wobei  $A_i$  die Matrix ist, die man erhält indem man die  $i$ -te Spalte von  $(I - zA)$  durch die rechte Seite, also durch  $\mathbf{1}$  ersetzt. Der Zähler in  $\zeta_i$  ist ein Polynom höchstens  $(s - 1)$ -ten Grades in  $z$  (in einer Spalte steht kein  $z$  mehr), der Nenner ein Polynom höchstens vom Grad  $s$ . Multiplikation von links mit  $z\mathbf{b}^T$  ergibt gerade eine rationale Funktion mit Polynomen von höchstens Grad  $s$  in Zähler und Nenner.

Dieses Vorgehen kann höchstens dann nicht funktionieren, wenn

$$\det(I - zA) = \det(z(I/z - A)) = z^s \det(I/z - A) = 0,$$

das heißt wenn  $1/z$  ein Eigenwert von  $A$  ist. ■

**Satz 8.41 Lösung des linearen Anfangswertproblems mit Runge–Kutta–Verfahren.** *Betrachte ein  $s$ -stufiges Runge–Kutta–Verfahren mit den Parametern  $(A, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ . Sofern  $z^{-1} = (\lambda h)^{-1}$  kein Eigenwert von  $A$  ist, ist das Runge–Kutta–Verfahren für die Gleichung (8.4) wohldefiniert. In diesem Fall gilt*

$$y_k = (R(h\lambda))^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Beweis:** Die Aussage erhält man, indem man sich das Runge–Kutta–Verfahren für (8.4) aufschreibt, Übungsaufgabe.

Es ist

$$K_i = \lambda \left( y_k + h \sum_{j=1}^s a_{ij} K_j \right)$$

oder in Vektorschreibweise

$$\mathbf{K} = \lambda y_k \mathbf{1} + \lambda h A \mathbf{K}.$$

Umstellen ergibt

$$\mathbf{K} = \lambda y_k (I - \lambda h A)^{-1} \mathbf{1}.$$

Einsetzen in das Runge–Kutta–Verfahren ergibt

$$y_{k+1} = y_k + h \mathbf{b}^T \mathbf{K} = y_k \left( 1 + \lambda h \mathbf{b}^T (I - \lambda h A)^{-1} \mathbf{1} \right) = y_k R(\lambda h).$$

Die Aussage des Satzes ergibt sich schließlich durch Induktion aus dieser Gleichung. ■

**Definition 8.42 Stabilitätsgebiet** Das Stabilitätsgebiet eines Einschrittverfahrens ist die Menge

$$S := \{z \in \hat{\mathbb{C}} : |R(z)| \leq 1\}.$$

□

**Bemerkung 8.43** Das Stabilitätsgebiet des linearen Anfangswertproblems (8.4) ist nach Bemerkung 8.36

$$S_{\text{anal}} = \mathbb{C}_0^- := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \leq 0\},$$

da  $R(z) = e^z$ . In diesem Gebiet fällt die Lösung (für  $\operatorname{Re}(z) < 0$ ) oder sie ist dem Betrage nach konstant (für  $\operatorname{Re}(z) = 0$ ). Von einem allgemein einsetzbaren numerischen Verfahren sollte man fordern, dass  $\mathbb{C}_0^- \subseteq S$  ist. □

**Definition 8.44 A–stabiles Verfahren.** Gilt für ein Einschrittverfahren mit Stabilitätsgebiet  $S$ , dass  $\mathbb{C}_0^- \subseteq S$ , so wird dieses Einschrittverfahren A–stabil genannt. □

Von besonderem Interesse ist das Verhalten der Stabilitätsfunktion für  $|z| \rightarrow \infty$ ,  $z \in \mathbb{C}_0^-$ . Damit wird beschrieben, wie grob man das Gitter bei gegebenem  $\lambda$  wählen darf, damit das Verfahren noch stabil ist.



**Lemma 8.45** Für ein  $A$ -stabiles Einschrittverfahren gilt  $|R(\infty)| \leq 1$ .

**Beweis:** Die Aussage folgt direkt aus  $\mathbb{C}_0^- \subseteq S$  und  $|R(z)| \leq 1$  für alle  $z \in S$ . ■

Mit der Eigenschaft  $|R(\infty)| \leq 1$  ist jedoch noch nicht gesichert, dass das Gitter beliebig grob werden darf, ohne dass das Verfahren die Stabilität verliert.

**Definition 8.46 Stark A-stabiles Verfahren, L-stabiles Verfahren.** Ein  $A$ -stabiles Einschrittverfahren heißt stark  $A$ -stabil, wenn zusätzlich  $|R(\infty)| < 1$  gilt. Es heißt  $L$ -stabil (left stable), wenn sogar  $|R(\infty)| = 0$  gilt. □

Diese Stabilitätsbegriffe sind von großer Bedeutung für die Qualität eines numerischen Verfahrens.

**Beispiel 8.47 Stabilität einiger Einschrittverfahren.** Demos

1. *Explizites Euler-Verfahren.* Es gilt  $R(z) = 1 + z$ . Das Stabilitätsgebiet ist der abgeschlossene Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt  $(-1, 0)$ .

**Bild** Das Verfahren ist nicht  $A$ -stabil. Man muss sehr kleine Schrittweiten wählen, um stabile Simulationen zu erhalten.

Darin liegt das Grundproblem aller expliziten Verfahren, nämlich dass man aus Stabilitätsgründen oft sehr kleine Schrittweiten wählen muss.

2. *Implizites Euler-Verfahren.* Für dieses Verfahren ist  $R(z) = 1/(1 - z)$ . Das Stabilitätsgebiet ist die gesamte komplexe Ebene außer dem offenen Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt  $(1, 0)$ . Damit ist das Verfahren  $A$ -stabil. Aus Beispiel 8.37 ist bereits bekannt, dass  $|R(\infty)| = 0$  gilt. Somit ist das Verfahren sogar  $L$ -stabil. Eine Kleinheitsbedingung an die Schrittweite gibt es bei diesem Verfahren nicht.

Allerdings muss man, wie bei jedem impliziten Verfahren, in jedem Knoten eine Gleichung lösen. Damit ist der Aufwand pro Zeitschritt höher als bei expliziten Verfahren.

3. *Trapezregel.* Für die Trapezregel ist mit  $z = a + ib$

$$|R(z)|^2 = \left| \frac{1 + z/2}{1 - z/2} \right|^2 = \left| \frac{1 + a/2 + ib/2}{1 - a/2 - ib/2} \right|^2 = \frac{(2 + a)^2 + b^2}{(2 - a)^2 + b^2}.$$

Es folgt

$$R(z) = \begin{cases} < 1 & \text{für } a < 0 \iff \operatorname{Re}(z) < 0, \\ = 1 & \text{für } a = 0 \iff \operatorname{Re}(z) = 0, \\ = 1 & z = \infty. \end{cases}$$

Es ist  $S = \mathbb{C}_0^-$ . Das Verfahren ist stark  $A$ -stabil, aber nicht  $L$ -stabil.

Im Gegensatz zum impliziten Euler-Verfahren, welches ein Verfahren 1. Ordnung ist, ist die Trapezregel jedoch ein Verfahren 2. Ordnung. □

### 8.3.4 Schrittweitensteuerung

**Bemerkung 8.48 Motivation.** Die bisherigen Untersuchungen haben noch keinen Weg zur Schätzung einer günstigen Schrittweite aufgezeigt, um ein gegebenes Anfangswertproblem mit vorgegebener Genauigkeit mit möglichst wenig Aufwand numerisch zu lösen. Eine günstige Schrittweite wird dabei vom konkreten Problem abhängen und sie wird nicht im gesamten Intervall konstant sein. Deshalb muss die Schrittweite während der numerischen Lösung des Anfangswertproblems gesteuert werden. Eine typische Herangehensweise besteht darin, dass man mit unterschiedlichen Methoden zwei Näherungen in einem Gitterpunkt berechnet und aus der

Differenz dieser Näherungen Schlüsse über die Größe des lokalen Diskretisierungsfehlers zieht. Besser wäre sicherlich der globale Fehler. Satz 8.17 zeigt jedoch, dass einerseits beim globalen Fehler Terme auftreten, die problemabhängig sind, wie die Länge des Intervalls oder die Lipschitz-Konstante. Andererseits kann der globale Fehler nur klein sein, wenn die lokalen Fehler klein sind.  $\square$

### Die Richardson-Methode

#### Bemerkung 8.49 Idee.

1. Von einem Punkt  $(x_0, y_0)$  ausgehend wird mit einem Verfahren und einer, zunächst beliebigen Schrittweite  $2h$  eine Näherung  $y_{2h}$  an der Stelle  $x_0 + 2h$  berechnet.
2. Mit dem gleichem Verfahren werden mit der Schrittweite  $h$  zwei Näherungen  $y_h$  und  $y_{2 \times h}$  in  $x_0 + h$  und  $x_0 + 2h$  berechnet.
3. Mit Hilfe des Vergleiches von  $y_{2h}$  und  $y_{2 \times h}$  steuert man die Schrittweite.

Die genauere der beiden berechneten Lösungen ist im allgemeinen  $y_{2 \times h}$ . Es stellt sich heraus, dass man bei der Richardson<sup>12</sup>-Methode außerdem noch die Genauigkeit von  $y_{2 \times h}$  verbessern kann.  $\square$

**Beispiel 8.50** Betrachtet man als Verfahren ein zweistufiges explizites Runge-Kutta-Verfahren, so erhält man für den ersten Schritt der Richardson-Methode

$$\begin{aligned} y_{2h}^{(1)} &= y_0, \\ y_{2h}^{(2)} &= y_0 + 2ha_{21}f(x_0, y_0), \\ y_{2h} &= y_0 + 2h [b_1K_1(x, y) + b_2K_2(x, y)] \\ &= y_0 + 2h \left[ b_1f(x_0, y_{2h}^{(1)}) + b_2f(x_0 + 2c_2h, y_{2h}^{(2)}) \right], \end{aligned}$$

oder mit Butcher-Schema

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \hline 2c_2 & 2a_{21} & \\ \hline & 2b_1 & 2b_2 \end{array}.$$

Im zweiten Schritt der Richardson-Methode erhält man

$$\begin{aligned} y_{2 \times h}^{(1)} &= y_0, \\ y_{2 \times h}^{(2)} &= y_0 + ha_{21}f(x_0, y_0), \\ y_h &= y_0 + h \left[ b_1f(x_0, y_{2 \times h}^{(1)}) + b_2f(x_0 + c_2h, y_{2 \times h}^{(2)}) \right], \\ y_{2 \times h}^{(4)} &= y_h + ha_{21}f(x_0 + h, y_h), \\ y_{2 \times h} &= y_h + h \left[ b_1f(x_0 + h, y_h) + b_2f(x_0 + h + c_2h, y_{2 \times h}^{(4)}) \right]. \end{aligned}$$

Das Butcher-Schema dieses Verfahrens ist

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ 1 & b_1 & b_2 & \\ \hline 1 + c_2 & b_1 & b_2 & a_{21} \\ \hline & b_1 & b_2 & b_1 & b_2 \end{array}.$$

Das heißt, die Berechnung von  $y_{2 \times h}$  ist äquivalent der Berechnung eines Näherungswertes mit einem vierstufigen Runge-Kutta-Verfahren.

Insgesamt werden 5 Funktionsauswertungen benötigt. Bei einem  $s$ -stufigen Runge-Kutta-Verfahren sind es  $3s - 1$  Funktionsaufrufe. Das ist ein recht hoher Aufwand pro Zeitschritt und ein entscheidender Nachteil dieser Methode.  $\square$

<sup>12</sup>Lewis Fry Richardson (1881 – 1953)

**Bemerkung 8.51 Vergleich der beiden Näherungen.** Betrachte ein Einschrittverfahren

$$y_{k+1} = y_k + h\Phi(x_k, y_k, h)$$

der Ordnung  $p$ . Sei der Startwert in  $x_0$  exakt, dann gilt für den lokalen Fehler in  $x_0 + 2h$

$$y(x_0 + 2h) - y_{2h} = c(x_0)(2h)^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}). \quad (8.5)$$

Zur Abschätzung des lokalen Fehlers von  $y_{2 \times h}$  wird vorausgesetzt, dass die Verfahrensfunktion  $\Phi(x, y, h)$  Lipschitz-stetig in der zweiten Komponente ist. Das ist bei expliziten Runge-Kutta-Verfahren immer gegeben falls  $f(x, y)$  diese Eigenschaft besitzt, siehe Beweis von Satz 8.29. Es ist

$$y_{2 \times h} = y_h + h\Phi(x + h, y_h, h)$$

und es sei

$$\hat{y}_{2 \times h} = y(x_0 + h) + h\Phi(x + h, y(x_0 + h), h)$$

diejenige Iterierte, die man mit dem exakten Anfangswert berechnet. Dann erhält man unter Ausnutzung der Definition der Konsistenzordnung

$$\begin{aligned} y(x_0 + 2h) - y_{2 \times h} &= (y(x_0 + 2h) - \hat{y}_{2 \times h}) + (\hat{y}_{2 \times h} - y_{2 \times h}) \\ &= c(x_0 + h)h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}) + y(x_0 + h) + h\Phi(x + h, y(x_0 + h), h) \\ &\quad - y_h - h\Phi(x + h, y_h, h). \end{aligned}$$

Für die Terme mit der Verfahrensfunktion erhält man mit der Lipschitz-Stetigkeit und der Konsistenzordnung

$$|h\Phi(x + h, y(x_0 + h), h) - h\Phi(x + h, y_h, h)| \leq hL |y(x_0 + h) - y_h| = \mathcal{O}(h^{p+2}).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} y(x_0 + 2h) - y_{2 \times h} &= c(x_0 + h)h^{p+1} + y(x_0 + h) - y_h + \mathcal{O}(h^{p+2}) \\ &= c(x_0 + h)h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}) + c(x_0)h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}) + \mathcal{O}(h^{p+2}) \\ &= 2c(x_0)h^{p+1} + \mathcal{O}(h^{p+2}), \end{aligned} \quad (8.6)$$

wobei man annimmt, dass  $c(x_0 + h) = c(x_0) + \mathcal{O}(h)$  ist, dass sich die Konstanten also nicht allzu schnell ändern.

Vernachlässigt man in (8.5) und (8.6) die Glieder höherer Ordnung, kann man die Konstante eliminieren. Man erhält

$$c(x_0) = \frac{1}{2} \left( \frac{y_{2 \times h} - y_{2h}}{2^p - 1} \right) \frac{1}{h^{p+1}}.$$

Damit erhält man für den Fehler des genaueren Verfahrens

$$y(x_0 + 2h) - y_{2 \times h} = \frac{y_{2 \times h} - y_{2h}}{2^p - 1} + \mathcal{O}(h^{p+2}). \quad (8.7)$$

□

**Bemerkung 8.52 Erhöhung der Genauigkeit.** Umstellen von (8.7) liefert

$$y(x_0 + 2h) - \left( y_{2 \times h} + \frac{y_{2 \times h} - y_{2h}}{2^p - 1} \right) = \mathcal{O}(h^{p+2}).$$

Damit ist

$$\bar{y}_{2 \times h} = y_{2 \times h} + \frac{y_{2 \times h} - y_{2h}}{2^p - 1}$$

eine Approximation der Lösung von Ordnung  $p + 1$ .

□

**Bemerkung 8.53 Automatische Schrittweitensteuerung.** Nach (8.7) ist

$$\text{err} := \frac{|y_{2 \times h} - y_{2h}|}{2^p - 1} \approx 2c(x_0)h^{p+1}$$

eine berechenbare Näherung für den Fehler. Dieser Fehler wird mit einer vorgegebenen Toleranz  $\text{tol}$  verglichen.

- $\text{err} \leq \text{tol}$ . Dann wird der durchgeführte Schritt akzeptiert. Man geht mit der Näherungslösung  $y_{2 \times h}$  oder  $\bar{y}_{2 \times h}$  zum nächsten Integrations-schritt. Im letzteren Fall spricht man von lokaler Richardson–Extrapolation.

Eine wichtige Frage ist, wie groß die Schrittweite im nächsten Integrations-schritt,  $h_{\text{neu}}$ , gewählt werden soll. Nach (8.6) soll gelten

$$\begin{aligned} 2c(x_0 + 2h_{\text{neu}})h_{\text{neu}}^{p+1} &\approx 2c(x_0)h_{\text{neu}}^{p+1} = 2c(x_0)h^{p+1} \left(\frac{h_{\text{neu}}}{h}\right)^{p+1} \\ &\approx \text{err} \left(\frac{h_{\text{neu}}}{h}\right)^{p+1} \leq \text{tol}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$h_{\text{neu}} \lesssim \left(\frac{\text{tol}}{\text{err}}\right)^{1/(p+1)} h.$$

In der Praxis verwendet man

$$h_{\text{neu}} = \alpha \left(\frac{\text{tol}}{\text{err}}\right)^{1/(p+1)} h,$$

mit einem Sicherheitsfaktor  $\alpha \in (0, 1)$ , oft  $\alpha \in [0.8, 0.9]$ .

- $\text{err} > \text{tol}$ . Dann wird der Schritt abgelehnt. Man wiederholt beide Schritte von  $(x_0, y_0)$  mit  $h_{\text{neu}} < h$ .

Im Anfangsschritt ist man auf eine Schätzung von  $h$  angewiesen, die im allgemeinen korrigiert werden muss.  $\square$

### Eingebettete Runge–Kutta–Verfahren

Man kann eine Schrittweitensteuerung konstruieren, die mit weniger Auswertungen der Verfahrensfunktion auskommt.

**Bemerkung 8.54 Idee.** Die Idee bei eingebetteten Runge–Kutta–Verfahren besteht darin, dass man zwei Einschnittverfahren unterschiedlicher Ordnung nimmt und mit beiden einen Schritt mit derselben Schrittweite ausführt. Die Verfahren seien so gewählt, dass man gewisse Auswertungen der Verfahrensfunktion für beide Verfahren verwenden kann. Man sucht also Runge–Kutta–Verfahren der Gestalt

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ c_2 & a_{21} & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{s,s-1} & \\ \hline & b_1 & \cdots & b_{s-1} & b_s \\ & \tilde{b}_1 & \cdots & \tilde{b}_{s-1} & \tilde{b}_s \end{array},$$

so dass

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^s b_i K_i(x, y)$$

von Ordnung  $p$  ist und

$$\tilde{y}_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^s \tilde{b}_i K_i(x, y)$$

von Ordnung  $q$  ist. Im allgemeinen ist  $q = p - 1$  oder  $q = p + 1$ .  $\square$

**Beispiel 8.55** Betrachte dreistufige explizite Runge–Kutta–Verfahren

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ c_2 & a_{21} & & \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \hline & b_1 & b_2 & b_3 & p = 2 \\ & \tilde{b}_1 & \tilde{b}_2 & \tilde{b}_3 & q = 3 \end{array}.$$

Eines dieser Verfahren soll von zweiter Ordnung sein, das andere von dritter Ordnung. Man hat 11 zu bestimmende Parameter. Nach den Sätzen 8.24 und 8.25 und Bemerkung 8.26 hat man 8 Gleichungen, die erfüllt werden müssen

$$\begin{aligned} c_2 &= a_{21}, \\ c_3 &= a_{31} + a_{32}, \\ b_1 + b_2 + b_3 &= 1, \\ b_2 c_2 + b_3 c_3 &= \frac{1}{2}, \\ \tilde{b}_1 + \tilde{b}_2 + \tilde{b}_3 &= 1, \\ \tilde{b}_2 c_2 + \tilde{b}_3 c_3 &= \frac{1}{2}, \\ \tilde{b}_2 c_2^2 + \tilde{b}_3 c_3^2 &= \frac{1}{3}, \\ \tilde{b}_3 a_{32} c_2 &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Man muss drei Parameter setzen. Zunächst kann man  $c_2 = 1$ ,  $b_3 = 0$  wählen. Dann folgt aus der ersten Gleichung  $a_{21} = 1$ , aus der vierten Gleichung  $b_2 = 1/2$  und aus der dritten Gleichung  $b_1 = 1/2$ . Nun wählt man noch  $c_3 = 1/2$ . Aus der sechsten und siebenten Gleichung folgt  $\tilde{b}_2 = 1/6$  und  $\tilde{b}_3 = 4/6$ . Damit folgt aus der fünften Gleichung  $\tilde{b}_1 = 1/6$  und aus der achten Gleichung  $a_{32} = 1/4$ . Aus der zweiten Gleichung ergibt sich schließlich  $a_{31} = 1/4$ .

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 & \\ \hline & 1/2 & 1/2 & 0 & p = 2 \\ & 1/6 & 1/6 & 4/6 & q = 3 \end{array}.$$

Das Verfahren mit Ordnung  $q = 3$  wird Simpson–Regel genannt. Das gesammte Verfahren nennt man Runge–Kutta–Fehlberg<sup>13</sup> 2(3) (RKF 2(3)).  $\square$

**Bemerkung 8.56 Fehlerschätzung und Schrittweitensteuerung.** Für das eingebettete Verfahren gelten

$$y_1 = y(x_0 + h) + \mathcal{O}(h^{p+1}), \quad \tilde{y}_1 = y(x_0 + h) + \mathcal{O}(h^{q+1}).$$

Damit folgt für den Fehler des ersten Verfahrens

$$y(x_0 + h) - y_1 = \tilde{y}_1 - y_1 + \mathcal{O}(h^{q+1}) + \mathcal{O}(h^{p+1}).$$

<sup>13</sup>Erwin Fehlberg (1911 – 1972)

Eine analoge Beziehung gilt auch für den Fehler des zweiten Verfahrens. Man kann jeweils den asymptotischen Term höherer Ordnung in demjenigen niedrigerer Ordnung absorbieren. Demzufolge stellt

$$\begin{aligned} \text{err} &:= |\tilde{y}_1 - y_1| = |y(x_0 + h) + \mathcal{O}(h^{p+1}) - y(x_0 + h) + \mathcal{O}(h^{q+1})| \\ &= |\mathcal{O}(h^{p+1}) + \mathcal{O}(h^{q+1})| \end{aligned}$$

eine Schätzung des Hauptfehlerterms im Runge–Kutta–Verfahren der Ordnung  $q^* = \min\{p, q\}$  dar. Das bedeutet, es wird lediglich der Fehler des Verfahrens mit der niedrigen Ordnung geschätzt.

Die Schrittweitensteuerung erfolgt wie beim Richardson–Verfahren mit

$$h_{\text{neu}} = \alpha \left( \frac{\text{tol}}{\text{err}} \right)^{1/(q^*+1)} h.$$

□

**Bemerkung 8.57** In der Praxis verwendet man unter anderem:

- RKF 4(5)–Verfahren,  $s = 6$ , Fehlberg 1964,
- RKF 7(8)–Verfahren,  $s = 13$ , Fehlberg 1968,
- DOPRI 4(5)–Verfahren (oder DOPRI 5(4) oder DOPRI5),  $s = 6$ , Dormand<sup>14</sup>, Prince<sup>15</sup> 1980,
- DOPRI 7(8)–Verfahren,  $s = 13$ , Dormand, Prince 1980.

Die Standardroutine `ode45` aus MATLAB verwendet DOPRI 4(5). □

**Bemerkung 8.58 Fehlberg–Trick.** Beim Fehlberg–Trick wird

$$K_s = f \left( x_k + c_s h, y_k + h \sum_{i=1}^{s-1} a_{si} K_i \right) \stackrel{!}{=} f \left( x_k + h, y_k + h \sum_{i=1}^s b_i K_i \right)$$

gefordert, das heißt, der letzte Funktionsaufruf des alten Schrittes kann als erster Funktionsaufruf des nächsten Integrationsschrittes verwendet werden. Die Bedingungen dafür sind

$$a_{si} = b_i, \quad i = 1, \dots, s-1, \quad b_s = 0, \quad c_s = 1.$$

Dieser Trick funktioniert nur, wenn  $h_{\text{alt}} \approx h_{\text{neu}}$  ist. Er ist in DOPRI 4(5) verwirklicht. □

---

<sup>14</sup>John R. Dormand

<sup>15</sup>P. J. Prince

# Kapitel 9

## Mehrschrittverfahren

### 9.1 Allgemeines

**Bemerkung 9.1 Motivation.** Einschrittverfahren sind dadurch charakterisiert, dass man zur Berechnung von  $y_{k+1}$  nur die Kenntnis der vorherigen Näherung  $y_k$  benötigt. Nun liegt es nahe, Verfahren zu konstruieren, welche zur Berechnung von  $y_{k+1}$  mehrere vorhergehende Näherungen  $y_k, y_{k-1}, \dots$  verwenden. Verfahren dieser Art werden Mehrschrittverfahren genannt.  $\square$

**Definition 9.2  $q$ -Schrittverfahren, lineares  $q$ -Schrittverfahren.** Ein  $q$ -Schrittverfahren,  $q \geq 1$ , ist ein numerisches Verfahren zur approximativen Lösung von

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0, \quad (9.1)$$

bei welchem  $y_{k+1}$  von  $y_{k+1-q}$  abhängt, aber nicht von  $y_i$  mit  $i < k + 1 - q$ .

Ein  $q$ -Schrittverfahren heißt linear, wenn es die Form

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{q-1} a_j y_{k-j} + h \sum_{j=0}^{q-1} b_j f(x_{k-j}, y_{k-j}) + h b_{-1} f(x_{k+1}, y_{k+1}), \quad k = q, q+1, \dots, \quad (9.2)$$

mit  $q \geq 1$ ,  $a_0, \dots, a_{q-1}, b_{-1}, \dots, b_{q-1} \in \mathbb{R}$ ,  $a_{q-1} \neq 0$  oder  $b_{q-1} \neq 0$ , besitzt. Für  $q = 1$  hat man ein Einschrittverfahren. Ist  $b_{-1} \neq 0$ , dann ist das lineare  $q$ -Schrittverfahren implizit, sonst explizit.  $\square$

**Bemerkung 9.3 Anfangswerte für ein  $q$ -Schrittverfahren.** Ein  $q$ -Schrittverfahren benötigt  $q$  Anfangswerte, damit man es starten kann. Im Anfangswertproblem (9.1) ist nur ein Anfangswert  $y_0$  gegeben. Den zweiten Anfangswert  $y_1$  kann man sich mit Hilfe eines Einschrittverfahrens berechnen, den nächsten Anfangswert  $y_2$  mit Hilfe eines Zweischrittverfahrens oder eines Einschrittverfahrens und so weiter. Alle Anfangswerte  $y_i$ ,  $i > 0$ , sind bereits numerische Approximationen. Diesen Umstand muss man bei der Fehleranalyse von Mehrschrittverfahren beachten, siehe Bemerkung 9.21.  $\square$

### 9.2 Prediktor–Korrektor–Verfahren

**Bemerkung 9.4 Konstruktion.** Ausgangspunkt zur Konstruktion von Prediktor–Korrektor–Verfahren ist die äquivalente Integralform des Anfangswertproblems (9.1)

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Sei die Lösung im Punkt  $\underline{x}$  bekannt,  $y(\underline{x})$ , so gilt insbesondere

$$y(x) = y(\underline{x}) + \int_{\underline{x}}^x f(t, y(t)) dt.$$

Die Idee von Prediktor–Korrektor–Verfahren besteht nun darin, das Integral auf der rechten Seite in geeigneter Weise zu approximieren, um eine Näherung für  $y(x)$  zu erhalten. Hierbei treten zwei Schwierigkeiten auf:

- Man kennt die Abhängigkeit des Integranden von  $t$  nicht, da die Funktion  $y(t)$  nicht bekannt ist.
- Selbst bei bekannter Abhängigkeit des Integranden von  $t$  lässt sich das Integral in den meisten Fällen nicht analytisch berechnen.

Betrachte zur Herleitung der Verfahren den Fall, dass das Integral bei bekanntem Integranden approximiert werden soll. Zur Lösung dieses Problems wird ähnlich wie bei der Herleitung der Newton<sup>1</sup>–Cotes<sup>2</sup>–Formeln vorgegangen. Dabei wird der Integrand durch ein geeignetes Interpolationspolynom ersetzt und dieses wird integriert. Zur Konstruktion des Interpolationspolynoms wählt man äquidistante Stützstellen

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots$$

Die Integrationsgrenzen seien Stützstellen

$$\underline{x} = x_{p-j}, \quad x = x_{p+m},$$

mit noch zu bestimmenden Parametern  $j, m \in \mathbb{N}_0$ . Das gesuchte Interpolationspolynom  $p_r(x)$  erfülle folgende Bedingungen:

- der Grad von  $p_r(x)$  sei kleiner oder gleich  $r$ ,
- $p_r(x_i) = f(x_i, y(x_i))$  für  $i = p, p-1, \dots, p-r$ .

Die Lösung dieses Interpolationsproblems ist durch das Lagrange<sup>3</sup>–Interpolationspolynom gegeben

$$p_r(x) = \sum_{i=0}^r f(x_{p-i}, y(x_{p-i})) L_i(x)$$

mit

$$L_i(x) = \prod_{l=0, l \neq i}^r \frac{x - x_{p-l}}{x_{p-i} - x_{p-l}}, \quad i = 0, 1, \dots, r.$$

Damit folgt

$$y_{p+m} \approx y_{p-j} + \sum_{i=0}^r f(x_{p-i}, y(x_{p-i})) \int_{\underline{x}}^x L_i(t) dt = y_{p-j} + h \sum_{i=0}^r \beta_i f(x_{p-i}, y(x_{p-i}))$$

mit

$$\beta_i = \frac{1}{h} \int_{\underline{x}}^x L_i(t) dt = \frac{1}{h} \int_{\underline{x}}^x \left( \prod_{l=0, l \neq i}^r \frac{t - x_{p-l}}{x_{p-i} - x_{p-l}} \right) dt.$$

Insbesondere ist das konstruierte Verfahren linear. Durch die Substitution, beachte die Nutzung eines äquidistanten Gitters,

$$t = x_p + sh = x_0 + (p + s)h,$$

erhält man

$$\beta_i = \int_{-j}^m \prod_{l=0, l \neq i}^r \frac{s+l}{-i+l} ds.$$

Je nach Wahl von  $m, j$  und  $r$  erhält man nun verschiedene Verfahren. □

<sup>1</sup>Isaac Newton (1642 – 1727)

<sup>2</sup>Roger Cotes (1682 – 1716)

<sup>3</sup>Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813)



Im folgenden werden die vier wichtigsten Verfahrensklassen vorgestellt.

**Beispiel 9.5 Adams<sup>4</sup>–Bashforth<sup>5</sup>–Verfahren.** Bei Adams–Bashforth–Verfahren verwendet man  $m = 1$ ,  $j = 0$  und  $r = q - 1$ . Das bedeutet, beim  $q$ -Schritt Adams–Bashforth–Verfahren hat man die Stützstellen  $x_{k+1-q}, \dots, x_k$  zur Berechnung des Lagrangeschen Interpolationspolynoms. Das sind  $q$  Stützstellen und  $p_q(x)$  hat damit höchstens den Grad  $q - 1$ . Adams–Bashforth–Verfahren sind explizit. Sie besitzen die allgemeine Form

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i f(x_{k-i}, y_{k-i})$$

mit

$$\beta_i = \int_0^1 \prod_{l=0, l \neq i}^{q-1} \frac{s+l}{-i+l} ds.$$

Für  $q = 1$  wird der Integrand in  $[x_k, x_{k+1}]$  durch ein konstantes Interpolationspolynom ersetzt und als Stützstelle wird  $(x_k, f(x_k, y_k))$  verwendet. Damit erhält man

$$y_{k+1} = y_k + h \left( \int_0^1 ds \right) f(x_k, y_k) = y_k + hf(x_k, y_k).$$

Das ist das explizite Euler–Verfahren.

Im Fall  $q = 2$  ersetzt man den Integranden durch ein lineares Interpolationspolynom durch die Stützstellen  $(x_{k-1}, f(x_{k-1}, y_{k-1}))$  und  $(x_k, f(x_k, y_k))$ . Man erhält mit den obigen Formeln

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h \left[ \left( \int_0^1 \frac{s+1}{1} ds \right) f(x_k, y_k) + \left( \int_0^1 \frac{s}{-1} ds \right) f(x_{k-1}, y_{k-1}) \right] \\ &= y_k + h \left[ \frac{3}{2} f(x_k, y_k) - \frac{1}{2} f(x_{k-1}, y_{k-1}) \right] \\ &= y_k + \frac{h}{2} [3f(x_k, y_k) - f(x_{k-1}, y_{k-1})]. \end{aligned}$$

$q \geq 3$ , Übungsaufgabe

□

**Beispiel 9.6 Adams–Moulton<sup>6</sup>–Verfahren.** Adams–Moulton–Verfahren erhält man mit  $m = 0$ ,  $j = 1$  und  $r = q$ . Damit gelten

$$\beta_i = \int_{-1}^0 \prod_{l=0, l \neq i}^q \frac{s+l}{-i+l} ds$$

und

$$y_k = y_{k-1} + h \sum_{i=0}^q \beta_i f(x_{k-i}, y_{k-i})$$

beziehungsweise durch Indexverschiebung

$$y_{k+1} = y_k + h \sum_{i=0}^q \beta_i f(x_{k+1-i}, y_{k+1-i}).$$

<sup>4</sup>John Couch Adams (1819 – 1892)

<sup>5</sup>Francis Bashforth (1819 – 1912)

<sup>6</sup>Forest Ray Moulton (1872 – 1952)

Die Stützstellen dieser Verfahren sind damit  $x_{k+1-q}, \dots, x_k, x_{k+1}$  und Adams–Moulton–Verfahren sind implizit.

Für  $q = 0$  wird der Integrand durch ein konstantes Interpolationspolynom ersetzt, welches als Stützstelle  $(x_{k+1}, f(x_{k+1}, y_{k+1}))$  besitzt. Man erhält folgendes Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + h \left( \int_{-1}^0 ds \right) f(x_{k+1}, y_{k+1}) = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}).$$

Das ist das implizite Euler–Verfahren.

Für  $q = 1$  verwendet man ein lineares Interpolationspolynom durch  $(x_k, f(x_k, y_k))$  und  $(x_{k+1}, f(x_{k+1}, y_{k+1}))$ . Man erhält

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h \left[ \left( \int_{-1}^0 \frac{s+1}{1} ds \right) f(x_{k+1}, y_{k+1}) + \left( \int_{-1}^0 \frac{s}{-1} ds \right) f(x_k, y_k) \right] \\ &= y_k + h \left[ \frac{1}{2} f(x_{k+1}, y_{k+1}) + \frac{1}{2} f(x_k, y_k) \right] \\ &= y_k + \frac{h}{2} [f(x_{k+1}, y_{k+1}) + f(x_k, y_k)]. \end{aligned}$$

Das ist die Trapezregel. □

**Beispiel 9.7 Nyström<sup>7</sup>–Verfahren.** Die Nyström–Verfahren erhält man für  $m = 1$ ,  $j = 1$  und  $r = q - 1$ . Sie besitzen die Form

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h \sum_{i=0}^{q-1} \beta_i f(x_{k-i}, y_{k-i})$$

mit

$$\beta_i = \int_{-1}^1 \prod_{l=0, l \neq i}^{q-1} \frac{s+l}{-i+l} ds.$$

Diese Verfahren sind explizit, man verwendet die  $q$  Stützstellen  $x_{k+1-q}, \dots, x_k$ .

Im Fall  $q = 1$  erhält man beispielsweise

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h \left( \int_{-1}^1 ds \right) f(x_k, y_k) = y_{k-1} + 2hf(x_k, y_k).$$

□

**Beispiel 9.8 Milne<sup>8</sup>–Verfahren.** Die Milne–Verfahren erhält man für  $m = 0$ ,  $j = 2$  und  $r = q$ . Nach eine Indexverschiebung besitzen sie die Gestalt

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h \sum_{i=0}^q \beta_i f(x_{k+1-i}, y_{k+1-i})$$

mit

$$\beta_i = \int_{-2}^0 \prod_{l=0, l \neq i}^q \frac{s+l}{-i+l} ds.$$

Dies sind implizite Verfahren. □

---

<sup>7</sup>Evert J. Nyström (1895 – 1960)

<sup>8</sup>William Edwin Milne (1890 – 1971)

**Bemerkung 9.9** Die Koeffizienten für Mehrschrittverfahren findet man tabelliert in der Literatur.  $\square$

**Bemerkung 9.10 Vorgehensweise für implizite Verfahren, Prediktor–Korrektor–Verfahren.** Bei Verwendung impliziter Verfahren muss man in jedem Gitterpunkt  $x_k$  eine im allgemeinen nichtlineare Gleichung lösen. Das kann man mit Hilfe einer Fixpunktiteration, zum Beispiel mit einem Newton-artigen Verfahren, machen. Für die Effizienz dieses Iterationsverfahrens ist eine gute Startnäherung nützlich. Diese kann man sich wiederum mit einem expliziten Mehrschrittverfahren verschaffen. Aus diesem Grunde heißen explizite Mehrschrittverfahren auch Prediktor–Verfahren und implizite Mehrschrittverfahren werden Korrektor–Verfahren genannt. Die Kombination eines Prediktor–Verfahrens mit einem Korrektor–Verfahren nennt man Prediktor–Korrektor–Verfahren. Oft reichen zur Berechnung einer neuen Näherung ein Prediktor–Schritt und ein oder zwei Korrektor–Schritte.  $\square$

### 9.3 Konvergenz von Mehrschrittverfahren

Es werden in diesem Abschnitt lineare Mehrschrittverfahren der Gestalt (9.2) betrachtet. Ähnlich wie bei Einschrittverfahren werden der lokale Fehler, Konsistenz und Konsistenzordnung definiert. Eine Erweiterung dieser Begriffe auf nichtlineare Mehrschrittverfahren ist unkompliziert.

**Definition 9.11 Lokaler Fehler.** Sei  $y_{k+1}$  das Ergebnis von (9.2),  $k \geq q$ , wobei die Startwerte die Werte der Lösung sind

$$y_{k+1-q} = y(x_{k+1-q}), \dots, y_k = y(x_k).$$

Der lokale Fehler ist durch

$$\text{le}(x_{k+1}) = \text{le}_{k+1} = y(x_{k+1}) - \left[ \sum_{j=0}^{q-1} a_j y(x_{k-j}) + h \sum_{j=-1}^{q-1} b_j f(x_{k-j}, y(x_{k-j})) \right] \quad (9.3)$$

definiert.  $\square$

**Definition 9.12 Konsistenz, Konsistenzordnung.** Seien  $y(x)$  die Lösung des Anfangswertproblems (9.1),  $S = \{(x, y) : x \in I = [x_0, x_e], y \in \mathbb{R}\}$  und  $I_N$  ein äquidistantes Gitter auf  $I$  mit  $N$  Intervallen. Das Mehrschrittverfahren (9.2) wird konsistent genannt, wenn für alle  $f \in C(S)$ , die in  $S$  einer Lipschitz-Bedingung bezüglich  $y$  genügen, gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \max_{x_k \in I_N} \frac{\text{le}(x_k + h)}{h} \right) = 0, \quad \text{mit } h = \frac{x_e - x_0}{N}.$$

Konvergiert dieser Ausdruck für alle hinreichend kleinen Schrittweiten  $h$  wie  $h^p$  für  $p \geq 1$ , dann besitzt das Mehrschrittverfahren die Konsistenzordnung  $p$ .  $\square$

**Beispiel 9.13** Die Konsistenzordnung eines Mehrschrittverfahrens lässt sich wieder dadurch bestimmen, dass man den lokalen Fehler in eine Taylor-Reihe bezüglich  $h$  entwickelt. Nach Division durch  $h$ , gibt die Ordnung des ersten nichtverschwindenden Gliedes dann die Konsistenzordnung an.

Betrachte das Nyström-Verfahren für  $q = 3$

$$\begin{aligned}
y_{k+1} &= y_{k-1} + h \left[ \left( \int_{-1}^1 \prod_{l=1}^2 \frac{s+l}{l} ds \right) f(x_k, y_k) \right. \\
&\quad + \left( \int_{-1}^1 \prod_{l=0, l \neq 1}^2 \frac{s+l}{-1+l} ds \right) f(x_{k-1}, y_{k-1}) \\
&\quad \left. + \left( \int_{-1}^1 \prod_{l=0}^1 \frac{s+l}{-2+l} ds \right) f(x_{k-2}, y_{k-2}) \right] \\
&= y_{k-1} + h \left[ \frac{7}{3} f(x_k, y_k) - \frac{2}{3} f(x_{k-1}, y_{k-1}) + \frac{1}{3} f(x_{k-2}, y_{k-2}) \right].
\end{aligned}$$

Damit gilt nach (9.3)

$$\begin{aligned}
\text{le}(x_{k+1}) &= y(x_{k+1}) - y(x_{k-1}) \\
&\quad - h \left[ \frac{7}{3} f(x_k, y(x_k)) - \frac{2}{3} f(x_{k-1}, y(x_{k-1})) + \frac{1}{3} f(x_{k-2}, y(x_{k-2})) \right] \\
&= y(x_{k+1}) - y(x_{k-1}) - h \left[ \frac{7}{3} y'(x_k) - \frac{2}{3} y'(x_{k-1}) + \frac{1}{3} y'(x_{k-2}) \right].
\end{aligned}$$

Nun werden die einzelnen Terme entwickelt

$$\begin{aligned}
y(x_{k+1}) &= y(x_k + h) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) + \frac{h^3}{6} y'''(x_k) \\
&\quad + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(x_k) + \mathcal{O}(h^5), \\
y(x_{k-1}) &= y(x_k - h) = y(x_k) - hy'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) - \frac{h^3}{6} y'''(x_k) \\
&\quad + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(x_k) + \mathcal{O}(h^5), \\
y'(x_{k-1}) &= y'(x_k - h) = y'(x_k) - hy''(x_k) + \frac{h^2}{2} y'''(x_k) \\
&\quad - \frac{h^3}{6} y^{(4)}(x_k) + \mathcal{O}(h^5), \\
y'(x_{k-2}) &= y'(x_k - 2h) = y'(x_k) - 2hy''(x_k) + 2h^2 y'''(x_k) \\
&\quad - \frac{4h^3}{3} y^{(4)}(x_k) + \mathcal{O}(h^5).
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Darstellung für den lokalen Fehler liefert

$$\begin{aligned}
\text{le}(x_{k+1}) &= y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) + \frac{h^3}{6} y'''(x_k) + \frac{h^4}{24} y^{(4)}(x_k) \\
&\quad - y(x_k) + hy'(x_k) - \frac{h^2}{2} y''(x_k) + \frac{h^3}{6} y'''(x_k) - \frac{h^4}{24} y^{(4)}(x_k) \\
&\quad - \frac{7h}{3} y'(x_k) + \frac{2}{3} \left[ hy'(x_k) - h^2 y''(x_k) + \frac{h^3}{2} y'''(x_k) - \frac{h^4}{6} y^{(4)}(x_k) \right] \\
&\quad - \frac{1}{3} \left[ hy'(x_k) - 2h^2 y''(x_k) + 2h^3 y'''(x_k) - \frac{4h^4}{3} y^{(4)}(x_k) \right] + \mathcal{O}(h^5) \\
&= \frac{h^4}{3} y^{(4)}(x_k) + \mathcal{O}(h^5).
\end{aligned}$$

Es handelt sich also um ein Verfahren der Konsistenzordnung 3. □

**Bemerkung 9.14 Lineare Mehrschrittverfahren mit möglichst hoher Konsistenzordnung.** Natürlich ist es das Ziel, Verfahren mit möglichst hoher Konsistenzordnung zu konstruieren. Das erscheint für lineare Mehrschrittverfahren auf den ersten Blick recht einfach. Ersetzt man in der Definition des lokalen Fehlers die Lösung durch ihre numerische Approximation und fordert, dass die rechte Seite Null ist, erhält man den Ansatz

$$y_{k+1} - \sum_{j=0}^{q-1} a_j y_{k-j} = h \sum_{j=-1}^{q-1} b_j f(x_{k-j}, y_{k-j}).$$

Über die entsprechende Entwicklung des lokalen Fehlers führt dieser Ansatz auf ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten  $a_j, b_j, j = 0, \dots, q$  und  $b_{-1}$ . Bei der Konstruktion von Einschrittverfahren mit einem entsprechenden Ansatz liefert jede Lösung des zugehörigen Gleichungssystems ein konvergentes Einschrittverfahren, siehe etwa Beispiel 8.27. Bei Mehrschrittverfahren ist das allerdings nicht der Fall.  $\square$

**Beispiel 9.15** Betrachte die obige Idee zur Konstruktion eines expliziten linearen Mehrschrittverfahrens mit  $q = 2$  und maximaler Konsistenzordnung. Der Ansatz ist also

$$y_{k+1} - a_0 y_k - a_1 y_{k-1} = h [b_0 f(x_k, y_k) + b_1 f(x_{k-1}, y_{k-1})].$$

Der lokale Fehler besitzt die Gestalt

$$\begin{aligned} \text{le}(x_{k+1}) &= y(x_{k+1}) - a_0 y(x_k) - a_1 y(x_{k-1}) - h b_0 f(x_k, y(x_k)) \\ &\quad - h b_1 f(x_{k-1}, y(x_{k-1})) \\ &= y(x_{k+1}) - a_0 y(x_k) - a_1 y(x_{k-1}) - h b_0 y'(x_k) - h b_1 y'(x_{k-1}). \end{aligned}$$

Die einzelnen Terme werden wieder nach Potenzen von  $h$  entwickelt

$$\begin{aligned} y(x_{k+1}) &= y(x_k + h) = y(x_k) + h y'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) + \frac{h^3}{6} y'''(x_k) + \mathcal{O}(h^4), \\ y(x_{k-1}) &= y(x_k - h) = y(x_k) - h y'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) - \frac{h^3}{6} y'''(x_k) + \mathcal{O}(h^4), \\ y'(x_{k-1}) &= y'(x_k - h) = y'(x_k) - h y''(x_k) + \frac{h^2}{2} y'''(x_k) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} \text{le}(x_{k+1}) &= y(x_k) + h y'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) + \frac{h^3}{6} y'''(x_k) - a_0 y(x_k) \\ &\quad - a_1 \left[ y(x_k) - h y'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) - \frac{h^3}{6} y'''(x_k) \right] - h b_0 y'(x_k) \\ &\quad - h b_1 \left[ y'(x_k) - h y''(x_k) + \frac{h^2}{2} y'''(x_k) \right] + \mathcal{O}(h^4) \\ &= [1 - a_1 - a_0] y(x_k) + [1 + a_1 - b_1 - b_0] h y'(x_k) \\ &\quad + \left[ \frac{1}{2} - \frac{a_1}{2} + b_1 \right] h^2 y''(x_k) + \left[ \frac{1}{6} + \frac{a_1}{6} - \frac{b_1}{2} \right] h^3 y'''(x_k) + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

Damit erhält man folgendes lineares Gleichungssystem als Bedingung dafür, dass die ersten vier Terme verschwinden

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 0 & -1 & 0 \\ -1/6 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/2 \\ 1/6 \end{pmatrix}.$$

Die eindeutige Lösung dieses Systems ist  $a_1 = 5$ ,  $a_0 = -4$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_0 = 4$ . Man erhält also das Verfahren

$$y_{k+1} = -4y_k + 5y_{k-1} + h[4f(x_k, y_k) + 2f(x_{k-1}, y_{k-1})]$$

mit der Konsistenzordnung 3.

Zur Untersuchung der Stabilität dieses Verfahrens betrachtet man das Modellproblem

$$y'(x) = -y(x), \quad y(0) = 1,$$

mit der Lösung  $y(x) = \exp(-x)$ . Als zweite Anfangsbedingung nimmt man den Wert der Lösung im Gitterpunkt  $x_1 = h$ . Wegen der speziellen Gestalt der rechten Seite, lässt sich die Näherungslösung explizit darstellen. Sie erfüllt die homogene lineare Differenzgleichung

$$y_{k+1} + (4 + 4h)y_k + (-5 + 2h)y_{k-1} = 0.$$

Lösungen dieser Differenzgleichung erhält man mit dem Ansatz  $y_k = \lambda^k$ . Einsetzen ergibt

$$\lambda^{k+1} + (4 + 4h)\lambda^k + (-5 + 2h)\lambda^{k-1} = 0.$$

Diese Gleichung ist für  $\lambda = 0$  erfüllt. Die anderen Lösungen erhält man nach Division mit  $\lambda^{k-1}$  aus

$$\lambda^2 + (4 + 4h)\lambda + (-5 + 2h) = 0. \quad (9.4)$$

Die Lösungen lauten

$$\lambda_1(h) = -2 - 2h + 3\sqrt{1 + \frac{2}{3}h + \frac{4}{9}h^2}, \quad \lambda_2(h) = -2 - 2h - 3\sqrt{1 + \frac{2}{3}h + \frac{4}{9}h^2}.$$

Die allgemeine Lösung der Differenzgleichung lässt sich als Linearkombination dieser speziellen Lösungen darstellen

$$y_k = c_1\lambda_1^k + c_2\lambda_2^k.$$

Die Konstanten werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt. Es gelten

$$y_0 = c_1 + c_2 = 1, \quad y_1 = e^{-h} = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2.$$

Daraus folgt

$$c_1(h) = \frac{e^{-h} - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2(h) = -\frac{e^{-h} - \lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Entwickelt man  $\lambda_1(h)$ ,  $\lambda_2(h)$ ,  $c_1(h)$  und  $c_2(h)$  nach Potenzen von  $h$  und setzt dies in die Darstellung der Lösung ein *Übungsaufgabe*, so erhält man für festes  $x > 0$  und  $h_N := x/N$

$$y_N = y(x, h_N) = \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{x}{N}\right)\right] \left[1 - \frac{x}{N} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{x}{N}\right)^2\right)\right]^N - \frac{1}{216} \left(\frac{x}{N}\right)^4 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{x}{N}\right)\right] \left[-5 - 3\frac{x}{N} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{x}{N}\right)^2\right)\right]^N.$$

Aus bekannten Eigenschaften der Exponentialfunktion erhält man für den ersten Term bei Gitterverfeinerung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{x}{N}\right)\right] \left[1 - \frac{x}{N} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{x}{N}\right)^2\right)\right]^N = e^{-x}.$$

Dieser Anteil beschreibt die Lösung des Modellproblems. Für den zweiten Term gilt

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{216} \left(\frac{x}{N}\right)^4 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{x}{N}\right)\right] \left[-5 - 3\frac{x}{N} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{x}{N}\right)^2\right)\right]^N \\ & = -\frac{(-5)^N}{216} \left(\frac{x}{N}\right)^4 \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{x}{N}\right)\right] \left[1 + \frac{3}{5}\frac{x}{N} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{x}{N}\right)^2\right)\right]^N. \end{aligned}$$

Wegen

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{3}{5}\frac{x}{N} + \mathcal{O}\left(\left(\frac{x}{N}\right)^2\right)\right]^N = e^{3x/5},$$

verhält sich der zweite Term für große  $N$  wie

$$-\frac{(-5)^N}{216} \left(\frac{x}{N}\right)^4 e^{3x/5}. \quad (9.5)$$

Dieser Ausdruck oszilliert mit wachsendem  $N$ , das heißt für feiner werdende Gitter, immer heftiger, siehe die Werte für  $x = 1$  in der folgenden Tabelle.

$n$	Wert von (9.5)
1	0.0421787
2	- 0.1054467
3	0.3514890
4	- 1.3180836
5	5.2723345
6	- 21.96806
7	94.14883
8	- 411.90113
9	1830.6717
10	- 8238.0226

Das Verfahren konvergiert also nicht.

Solch ein oszillierendes Verhalten beobachtet man auch bei der Anwendung des obigen Verfahrens auf ein beliebiges Anfangswertproblem. Der Grund dafür liegt darin, dass die allgemeine Lösung der Differenzgleichung einen Term enthält, der für großes  $k$  beliebig groß werden kann, beispielsweise gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \lambda_2(h) = -5 \quad \implies \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |\lambda_2^k(h)| = \infty$$

für kleine  $h$  oder große  $N$ .

Die Lösungen der Differenzgleichung hat man aus den Nullstellen des Polynoms (9.4) erhalten. Es ist zu vermuten, dass die Nullstellen dieses Polynoms einen entscheidenden Einfluss auf das Konvergenzverhalten von Mehrschrittverfahren besitzen.  $\square$

**Definition 9.16 Nullstabiles Mehrschrittverfahren.** Ein lineares  $q$ -Schrittverfahren heißt nullstabil, falls das erste charakteristische Polynom

$$\Psi(\lambda) = \lambda^q - a_0\lambda^{q-1} - \dots - a_{q-1}$$

nur Nullstellen  $\lambda_q$  besitzt für die  $|\lambda_q| \leq 1$  gilt und die im Fall  $|\lambda_q| = 1$  einfach sind.  $\square$

**Beispiel 9.17** Für die vier wichtigsten Verfahrensklassen ist die Stabilitätsbedingung erfüllt.

- *Adams–Bashforth–Verfahren, Adams–Moulton–Verfahren.* Das erste charakteristische Polynom hat die Gestalt

$$\Psi(\lambda) = \lambda^q - \lambda^{q-1} = (\lambda - 1) \lambda^{q-1}.$$

Damit ist seine einzige nichttriviale Nullstelle  $\lambda_q = 1$ .

- *Nyström–Verfahren, Milne–Verfahren.* Hier ist das erste charakteristische Polynom

$$\Psi(\lambda) = \lambda^q - \lambda^{q-2} = (\lambda + 1)(\lambda - 1) \lambda^{q-2}.$$

Die einzigen nichttrivialen Nullstellen sind  $\lambda_q = 1$  und  $\lambda_q = -1$ .

□

Bezüglich der Stabilität von Mehrschrittverfahren gilt folgende Aussage.

**Satz 9.18 Dahlquist<sup>9</sup>'s erste Ordnungsschranke.** Für die maximale Konsistenzordnung eines nullstabilen linearen  $q$ -Schnittverfahrens gilt

$$p = \begin{cases} q + 1 & \text{für } q \text{ ungerade,} \\ q + 2 & \text{für } q \text{ gerade.} \end{cases}$$

**Beweis:** Siehe Literatur, zum Beispiel Hairer, Norsett, Wanner. ■

#### Beispiel 9.19

1. Adams–Bashforth–Verfahren mit  $q$  Schritten besitzen die Konsistenzordnung  $q$ , Adams–Moulton–Verfahren mit  $q$  Schritten besitzen die Konsistenzordnung  $q + 1$ .
2. Das 2–Schritt–Milne–Verfahren (auch Milne–Simpson–Verfahren)

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h \left( \frac{1}{3} f(x_{k+1}, y_{k+1}) + \frac{4}{3} f(x_k, y_k) + \frac{1}{3} f(x_{k-1}, y_{k-1}) \right).$$

besitzt die Konsistenzordnung 4.

□

**Beispiel 9.20 Lineare Stabilität des Milne–Verfahrens.** Löst man mit dem 2–Schritt–Milne–Verfahren das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \kappa y(x), \quad y(0) = 1,$$

mit der Lösung  $y(x) = \exp(\kappa x)$ , so hat das Verfahren die Form

$$y_{k+1} = y_{k-1} + h\kappa \left( \frac{1}{3} y_{k+1} + \frac{4}{3} y_k + \frac{1}{3} y_{k-1} \right),$$

was sich als homogene lineare Differenzgleichung schreiben lässt

$$\left( 1 - \frac{h\kappa}{3} \right) y_{k+1} - \frac{4h\kappa}{3} y_k - \left( 1 + \frac{h\kappa}{3} \right) y_{k-1} = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differenzgleichung lässt sich wieder in der Form

$$y_k = c_1 \lambda_1^k + c_2 \lambda_2^k$$

---

<sup>9</sup>Germund Dahlquist (1925 – 2005)



angeben, wobei  $\lambda_1(h)$  und  $\lambda_2(h)$  die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\left(1 - \frac{h\kappa}{3}\right) \lambda^2 - \frac{4h\kappa}{3} \lambda - \left(1 + \frac{h\kappa}{3}\right) = 0$$

sind. Man erhält

$$\begin{aligned} \lambda_1(h) &= \frac{3}{3-h\kappa} \left( \frac{2h\kappa}{3} + \sqrt{1 + \frac{(h\kappa)^2}{3}} \right), \\ \lambda_2(h) &= \frac{3}{3-h\kappa} \left( \frac{2h\kappa}{3} - \sqrt{1 + \frac{(h\kappa)^2}{3}} \right). \end{aligned}$$

Nun kann man die Konstanten  $c_1, c_2$  aus der Anfangsbedingung und dem Wert nach dem ersten Schritt bestimmen. Es gilt in  $x = 0$

$$c_1 + c_2 = 1 \tag{9.6}$$

und in  $x = h$

$$e^{\kappa h} = c_1 \lambda_1 + (1 - c_1) \lambda_2. \tag{9.7}$$

Entwickelt man  $\lambda_1(h)$  und  $\lambda_2(h)$  nach Potenzen von  $h$  im Entwicklungspunkt  $h = 0$ , so erhält man in erster Näherung (Ableitung berechnen, Null einsetzen)

$$\lambda_1(h) = 1 + \kappa h + \mathcal{O}(h^2), \quad \lambda_2(h) = -1 + \frac{\kappa}{3} h + \mathcal{O}(h^2). \tag{9.8}$$

Für die Näherungslösung an der Stelle  $x_k = kh, k = 0, 1, \dots$ , erhält man damit

$$y_k = c_1 \left(1 + \kappa h + \mathcal{O}(h^2)\right)^{x_k/h} + c_2 \left(-1 + \frac{\kappa}{3} h + \mathcal{O}(h^2)\right)^{x_k/h}.$$

Der erste Term konvergiert für  $h \rightarrow 0$  zu  $\exp(\kappa x_k)$ , er verhält sich also wie die Lösung des stetigen Anfangswertproblems. Der zweite Term verhält sich für kleine  $h$  wie

$$(-1)^{x_k/h} \left(1 - \frac{\kappa}{3} h\right)^{x_k/h}.$$

Der zweite Faktor konvergiert zu  $\exp(-\kappa x_k/3)$ , währenddessen der erste Faktor immer schneller oszilliert. Für das stabile Anfangswertproblem, das heißt  $\kappa < 0$ , liefert dieser Term also eine oszillierende, beschränkte aber exponentiell große Störung.

Das Verhalten der Lösung hängt nun noch von den Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  ab. Einsetzen der Entwicklungen (9.8) in die Bedingung (9.7) und Nutzung von (9.6) liefert

$$\begin{aligned} e^{\kappa h} &= (1 - c_2) \left(1 + \kappa h + \mathcal{O}(h^2)\right) + c_2 \left(-1 + \frac{\kappa}{3} h + \mathcal{O}(h^2)\right) \\ &= 1 + \kappa h - 2c_2 - \frac{2\kappa h}{3} c_2 + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Entwickelt man die Exponentialfunktion, erhält man

$$\begin{aligned} 1 + \kappa h + \mathcal{O}(h^2) &= 1 + \kappa h - 2c_2 - \frac{2\kappa h}{3} c_2 + \mathcal{O}(h^2) \implies \\ \mathcal{O}(h^2) &= -2c_2 - \frac{2\kappa h}{3} c_2 + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Damit folgt  $c_2(h) = \mathcal{O}(h^2)$  und aus (9.6) folgt  $c_1 = \mathcal{O}(1)$ . Insgesamt gilt also

$$\lim_{h \rightarrow 0} c_2(h) \left(-1 + \frac{\kappa}{3} h + \mathcal{O}(h^2)\right)^{x_k/h} = 0.$$

Das Verfahren konvergiert.

Dass der Term

$$h^2 \exp -\frac{\kappa x_k}{3}$$

jedoch klein ist, ist für  $\kappa \ll -1$  und große  $x_k$  erst für sehr kleine Schrittweiten  $h$  der Fall. (Demo)

Das eben beschriebene Verhalten beobachtet man bei in der Praxis bei allen  $q$ -Schrittverfahren der Konsistenzordnung  $q + 2$ , wenn diese auf Anfangswertprobleme mit exponentiell abklingenden Lösungen angewendet werden. Damit ist die Anwendbarkeit dieser Verfahren stark eingeschränkt.  $\square$

**Bemerkung 9.21 Start von Mehrschrittverfahren und Konvergenz.** Neben der Konsistenz interessiert bei Mehrschrittverfahren natürlich vor allem die Konvergenz. Bei Einschrittverfahren folgt unter recht allgemeinen Voraussetzungen aus der Konsistenz die Konvergenz und Konsistenz- und Konvergenzordnung stimmen überein, Satz 8.17. Bei Mehrschrittverfahren liegen kompliziertere Verhältnisse vor.

Zunächst benötigt man zum Start eines  $q$ -Schrittverfahrens neben dem bekannten Anfangswert  $y_0 = y(x_0)$  noch  $q - 1$  weitere Näherungen  $y_1, \dots, y_{q-1}$  für  $y(x_1), \dots, y(x_{q-1})$ . Diese kann man sich beispielsweise mit einem Einschrittverfahren beschaffen. Die Güte dieser Näherungen beeinflusst natürlich in erheblichem Maße die Güte der daraus mit dem  $q$ -Schrittverfahren berechneten Werte. Wir nehmen an, dass sich diese Näherungen gemäß

$$y_0 = y(x_0), \quad y_1 = y(x_1) + \varepsilon_1(h), \quad \dots, \quad y_{q-1} = y(x_{q-1}) + \varepsilon_{q-1}(h)$$

verhalten. Damit hängen die mit dem  $q$ -Schrittverfahren berechneten Werte auch von den Störungen  $\varepsilon_1(h), \dots, \varepsilon_{q-1}(h)$  ab und man muss für die berechnete Lösung im Knoten  $x_k$  exakter schreiben  $y_k(\varepsilon, h)$ , wobei  $\varepsilon(x, h)$  eine Funktion bezeichne, für die  $\varepsilon_i(h) = \varepsilon(x_i, h)$ ,  $i = 1, \dots, q - 1$ , gilt  $\square$

**Definition 9.22 Globaler Fehler.** Sei  $y(x)$  die Lösung des Anfangswertproblems (9.1). Die mit einem Mehrschrittverfahren mit der Schrittweite  $h$  berechnete Näherung für  $y(x)$  sei  $y_k(\varepsilon, h)$ , wobei die Güte der Startnäherungen durch die Funktion  $\varepsilon(x, h)$  beschrieben wird. Dann heißt die Größe

$$e(x_k, \varepsilon, h) := y_k(\varepsilon, h) - y(x_k)$$

der globale Fehler oder der globale Diskretisierungsfehler an der Stelle  $x_k$  zur Schrittweite  $h$ .  $\square$

**Definition 9.23 Konvergenz.** Betrachte die Differentialgleichung des Anfangswertproblems (9.1) in  $[a, b]$  und sei  $x_0 \in [a, b]$ . Ein Mehrschrittverfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen der Form (9.1) heißt konvergent, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e(x_k, \varepsilon, h_n) = 0, \quad \text{mit } h_n = \frac{x_k - x_0}{n},$$

für alle  $x \in [a, b]$ , für alle  $f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R})$  und für alle Funktionen  $\varepsilon(x, h)$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\varepsilon(x, h_n)| = 0, \quad \text{für } x = x_0 + ih_n, \quad i = 1, \dots, q - 1,$$

gilt.  $\square$

**Satz 9.24 Zusammenhang Konvergenz und Nullstabilität.** *Sei durch*

$$y_{k+1} = \sum_{j=0}^{q-1} a_j y_{k-j} + h\Phi(x_j, y_{k+1}, \dots, y_{k+1-q}, h, f)$$

ein konsistentes Mehrschrittverfahren zur Lösung von Anfangswertproblemen der Form (9.1) gegeben. Die Verfahrensfunktion erfülle die folgenden Bedingungen:

- i)  $\Phi(x_j, y_{k+1}, \dots, y_{k+1-q}, h, f) \equiv 0$  für alle  $x \in [a, b]$ , alle  $y_k \in \mathbb{R}$  und alle  $h \in \mathbb{R}$  falls  $f(x, y) \equiv 0$ .
- ii) Lipschitz-Stetigkeit bezüglich der zweiten bis  $q+1$ -ten Komponente, das heißt es gibt Konstanten  $h_0 > 0$  und  $M$ , so dass

$$|\Phi(x, v_q, \dots, v_0, h, f) - \Phi(x, w_q, \dots, w_0, h, f)| \leq M \sum_{i=0}^q |v_i - w_i|$$

für alle  $x \in [a, b]$ , alle  $v_i, w_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, q$ , und alle Schrittweiten  $h$  mit  $|h| < h_0$ .

Dann ist das Mehrschrittverfahren genau dann konvergent, wenn es nullstabil ist.

**Beweis:** Siehe Literatur. ■

**Bemerkung 9.25**

- o Die erste Voraussetzung garantiert gemeinsam mit der Nullstabilität, dass das Mehrschrittverfahren das triviale Anfangswertproblem

$$y'(x) = 0, \quad y(x_0) = 0,$$

exakt löst, falls  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_{q-1} = 0$  gilt.

- o Für lineare Mehrschrittverfahren ist die erste Bedingung trivialerweise erfüllt, da die Verfahrensfunktion eine Linearkombination von Funktionswerten der rechten Seite  $f(x, y)$  der Differentialgleichung ist. Aus demselben Grunde folgt für diese Verfahren die partielle Lipschitz-Stetigkeit der Verfahrensfunktion aus der partiellen Lipschitz-Stetigkeit der rechten Seite. □

**Satz 9.26 Konvergenzordnung.** *Betrachte die Mehrschrittverfahren von Satz 9.24. Erfülle die Verfahrensfunktion die in diesem Satz genannten Bedingungen und habe das Mehrschrittverfahren die Konsistenzordnung  $p$ . Dann gilt für alle  $f \in C^p([a, b] \times \mathbb{R})$  und alle  $x \in [a, b]$*

$$|e(x_k, \varepsilon, h_n)| = \mathcal{O}(h_n^p),$$

falls für die Güte der Startnäherungen

$$|\varepsilon_i(h^p)| = \mathcal{O}(h_n^p) \quad \text{für } i = 1, \dots, q-1,$$

gilt.

**Beweis:** Siehe Literatur. ■

**Bemerkung 9.27** Um für ein Mehrschrittverfahren der Konsistenzordnung  $p$  auch die Konvergenzordnung  $p$  zu erreichen, ist es also notwendig, die Startnäherungen ebenfalls mit der entsprechenden Güte zu berechnen, zum Beispiel mit einem Einschrittverfahren der Ordnung  $p$ . Wenn man das Gesamtverfahren betrachtet, welches aus einem Startverfahren zur Berechnung der Näherungen  $y_1, \dots, y_{q-1}$  und einem Prediktor-Korrektor-Verfahren zur Berechnung der weiteren Näherungen besteht, so wird die Ordnung des Gesamtverfahrens durch das Teilverfahren mit der niedrigsten Ordnung bestimmt. □

# Kapitel 10

## Systeme von Differentialgleichungen

**Bemerkung 10.1 Motivation.** In diesem Abschnitt werden Anfangswertprobleme zu expliziten Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung betrachtet. Seien  $y_i : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_i : D(f_i) = D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dann lautet das Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}) \quad \text{oder} \quad y_i'(x) = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (10.1)$$

mit den zugehörigen Anfangswerten

$$y_i(x^{(0)}) = y_i^0, \quad (x^{(0)}, y_1^0, \dots, y_n^0) \in D, \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.2)$$

Vom numerischen Standpunkt lassen sich die eingeführten Verfahren für skalare Anfangswertprobleme problemlos auf Systeme übertragen. Die Stabilitätstheorie erfordert jedoch Erweiterungen.  $\square$

### 10.1 Lineare Stabilitätstheorie

**Bemerkung 10.2** Für die lineare Stabilitätstheorie wird jetzt die kanonische Erweiterung des in Abschnitt 8.3.3 betrachteten skalaren Anfangswertproblems betrachtet

$$\mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (10.3)$$

Die Matrix  $A$  besitze  $n$  verschiedene Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  mit negativem Realteil. Dann ist die Lösung von (10.3), siehe (5.7)

$$\mathbf{y}(x) = e^{Ax}\mathbf{y}_0.$$

*Übungsaufgabe.* Da  $A$  nach Voraussetzung  $n$  verschiedene Eigenwerte besitzt, kann  $A$  diagonalisiert werden. Es existiert also eine Matrix  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , so dass

$$\Lambda = Q^{-1}AQ, \quad \text{mit } \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Die Spalten von  $Q$  sind die Eigenvektoren von  $A$ . Mit der Substitution

$$\mathbf{y}(x) = Q\mathbf{z}(x) \quad \implies \quad \mathbf{y}'(x) = Q\mathbf{z}'(x),$$

vergleiche Bemerkung 5.13, erhält man

$$Q\mathbf{z}'(x) = AQ\mathbf{z}(x) \quad \iff \quad \mathbf{z}'(x) = Q^{-1}AQ\mathbf{z}(x) = \Lambda\mathbf{z}(x).$$

Die Gleichungen dieses Systems sind entkoppelt. Seine allgemeine Lösung lautet

$$\mathbf{z}(x) = e^{\Lambda x} \mathbf{c} = (c_i e^{\lambda_i x})_{i=1, \dots, n}.$$

Damit folgt für die Lösung von (10.3)

$$\mathbf{y}(x) = Q\mathbf{z}(x) = \sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen liefert

$$\mathbf{y}(0) = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{v}_i = Q\mathbf{c} = \mathbf{y}_0 \quad \implies \quad \mathbf{c} = Q^{-1}\mathbf{y}_0.$$

Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{i=1}^n (Q^{-1}\mathbf{y}_0)_i e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i, \quad (10.4)$$

wobei  $((Q^{-1}\mathbf{y}_0)_i)$  die  $i$ -te Komponenten von  $Q^{-1}\mathbf{y}_0$  ist. Jetzt erkennt man, dass die Lösung stabil ist, da nach Voraussetzung alle Eigenwerte einen negativen Realteil besitzen. Außerdem wird die Stabilität eines numerischen Verfahrens vor allem durch den Eigenwert mit dem größten Betrag des Realteils beeinflusst.  $\square$

**Definition 10.3 Steifes Differentialgleichungssystem.** Das lineare System von Differentialgleichungen

$$\mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

heißt steif, falls alle Eigenwerte  $\lambda_i$  von  $A$  einen negativen Realteil besitzen und falls

$$q := \frac{\max\{\operatorname{Re}(\lambda_i), i = 1, \dots, n\}}{\min\{\operatorname{Re}(\lambda_i), i = 1, \dots, n\}} \gg 1$$

gilt. Für  $q \approx 10$  nennt man das System auch schwach steif, für  $q > 10$  steif.  $\square$

**Bemerkung 10.4**

- Die angegebene Definition der Steifheit besitzt einige Nachteile. Der Quotient wird beispielsweise auch dann groß, falls der betragskleinste Realteil nahe bei Null liegt, obwohl für die Stabilität eigentlich nur der betragsgrößte Realteil von Bedeutung ist. Es gibt in der Literatur noch andere Definitionen von Steifheit. Allgemein kann man sagen, dass Steifheit eines Systems bedeutet, dass jede Methode, die nicht A-stabil ist, sehr kleine Schritte braucht, um die exponentiell verschwindende Lösung (10.4) stabil zu approximieren.
- Explizite Verfahren sind für steife Systeme ungeeignet, da sie nicht A-stabil sind. Man muss implizite Verfahren verwenden.  $\square$

**Bemerkung 10.5 Lokale Steifheit für beliebige Differentialgleichungen.**

Der Begriff der Steifheit kann in gewissem Sinne auf beliebige Differentialgleichungen übertragen werden. Die Differentialgleichung

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x))$$

kann durch die Einführung der Funktionen

$$\bar{\mathbf{y}}(x) := x \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{y}}(x) := \begin{pmatrix} \mathbf{y}(x) \\ \bar{\mathbf{y}}(x) \end{pmatrix}$$

auf die autonome Gestalt

$$\tilde{\mathbf{y}}'(x) = \tilde{\mathbf{f}}(\tilde{\mathbf{y}}(x)) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)) \\ 1 \end{pmatrix}$$

gebracht werden. Durch Linearisierung im Anfangswert  $\tilde{\mathbf{y}}_0$  erhält man dann eine Differentialgleichung der Form  $\tilde{\mathbf{y}}'(x) = A\tilde{\mathbf{y}}(x)$ . Damit kann man für eine beliebige Differentialgleichung den Begriff der Steifheit zumindest lokal erklären.

Bei nichtlinearen Problemen muss man mit den linearen Stabilitätsaussagen vorsichtig sein. Im allgemeinen sind sie nur lokal gültig und sie beschreiben nicht das Verhalten des Verfahrens im gesamten Definitionsbereich des Differentialgleichungssystems. Die nichtlineare Stabilitätstheorie ist ein aktueller Forschungsgegenstand.  $\square$

## 10.2 Rosenbrock–Verfahren

Man muss für steife Problem implizite Verfahren verwenden. Die Frage ist, ob man den Aufwand in diesen Verfahren irgendwie reduzieren kann und dabei die guten Eigenschaften dieser Verfahren erhält.

**Bemerkung 10.6 Linear–implizite Runge–Kutta–Verfahren.** Betrachte ohne Beschränkung der Allgemeinheit das autonome Anfangswertproblem

$$\mathbf{y}'(x) = \mathbf{f}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0,$$

siehe Bemerkung 8.28. DIRK–Verfahren, siehe Bemerkung 8.35, besitzen ein Butcher–Schema der Gestalt

$$\begin{array}{c|cccccc} c_1 & a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ c_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_{s-1} & b_s \end{array}.$$

Man hat  $s$  entkoppelte nichtlineare Gleichungen zu lösen

$$\mathbf{K}_j = \mathbf{f} \left( \mathbf{y}_k + h \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} \mathbf{K}_l + h a_{jj} \mathbf{K}_j \right), \quad j = 1, \dots, s.$$

Das vereinfachte Newton–Verfahren zur Lösung der  $j$ -ten Gleichung führt auf eine Iteration der Form

$$\mathbf{K}_j^{(n+1)} = \mathbf{K}_j^{(n)} - (I - a_{jj} h J)^{-1} \left[ \mathbf{K}_j^{(n)} - \mathbf{f} \left( \mathbf{y}_k + h \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} \mathbf{K}_l + h a_{jj} \mathbf{K}_j^{(n)} \right) \right].$$

Dabei wird in der Regel die Näherungsableitung  $J = \mathbf{f}_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_k)$  anstelle der Ableitung am aktuellen Punkt  $\mathbf{y}$  verwendet. Für hinreichend kleine  $h$  ist die Matrix  $(I - a_{jj} h J)$  regulär und die Systeme sind lösbar.

Häufig ist es für die geforderte Genauigkeit ausreichend, lediglich einen Iterationsschritt durchzuführen. Das gilt insbesondere dann, wenn die Schrittweite  $h$  hinreichend klein ist und man eine hinreichend gute Startnäherung  $\mathbf{K}_j^{(0)}$  besitzt. Mit dem Ansatz

$$\mathbf{K}_j^{(0)} := \sum_{l=1}^{j-1} \frac{d_{jl}}{a_{jj}} \mathbf{K}_l,$$

mit noch zu bestimmenden Koeffizienten  $d_{jl}$ ,  $l = 1, \dots, j-1$ , führt dies auf das implizite Verfahren mit linearen Systemen

$$\begin{aligned} (I - a_{jj}hJ) \mathbf{K}_j &= \mathbf{f} \left( \mathbf{y}_k + h \sum_{l=1}^{j-1} (a_{jl} + d_{jl}) \mathbf{K}_l \right) - hJ \sum_{l=1}^{j-1} d_{jl} \mathbf{K}_l, \quad j = 1, \dots, s, \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + h \sum_{j=1}^s b_j \mathbf{K}_j \end{aligned} \quad (10.5)$$

Diese Art Verfahren nennt man linear-implizites Runge-Kutta-Verfahren.

Bei diesen Verfahren handelt es sich um implizite Verfahren. Man muss aber in jedem Schritt nur  $s$  lineare Gleichungssysteme lösen. Damit sind diese Verfahren im allgemeinen wesentlich billiger als das ursprüngliche implizite Verfahren. Die Frage ist, welche Eigenschaften des ursprünglichen Verfahrens erhalten bleiben. Das ist besonders wichtig bezüglich der Stabilität. Wenn diese verloren geht, dann ist das linear-implizite Verfahren nicht für steife Differentialgleichungen geeignet.  $\square$

**Satz 10.7 Stabilität von linear-impliziten Runge-Kutta-Verfahren.** *Sei ein Runge-Kutta-Verfahren mit den Parametern  $(A, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  mit nichtsingulärer unterer Dreiecksmatrix  $A \in \mathbb{R}^{s \times s}$  gegeben. Dann hat das daraus abgeleitete linear-implizite Verfahren (10.5) mit  $J = \mathbf{f}_y(\mathbf{y}_k)$ , unabhängig von der Wahl der  $d_{jl}$ , die gleiche Stabilitätsfunktion  $R(z)$  wie das Ausgangsverfahren.*

**Beweis:** Das linear-implizite Verfahren wird auf das eindimensionale lineare Testproblem

$$y'(x) = \lambda y(x), \quad y(0) = 1,$$

angewandt. Wegen  $f(y) = \lambda y$  ergibt sich in diesem Fall  $J = \lambda$ . Die  $j$ -te Gleichung der Rekursion (10.5) hat die Form

$$\begin{aligned} (I - a_{jj}h\lambda) K_j &= \lambda \left( y_k + h \sum_{l=1}^{j-1} (a_{jl} + d_{jl}) K_l \right) - h\lambda \sum_{l=1}^{j-1} d_{jl} K_l \\ &= \lambda y_k + h\lambda \sum_{l=1}^{j-1} a_{jl} K_l, \quad j = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Multiplikation mit  $h$  ergibt mit  $z = \lambda h$

$$K_j h - z \sum_{l=1}^j a_{jl} K_l h = z y_k, \quad j = 1, \dots, s.$$

Das ist in Matrix-Vektor-Schreibweise

$$(1 - zA) \mathbf{K} h = z y_k \mathbf{1}, \quad \mathbf{K} = (K_1, \dots, K_s)^T.$$

Sei  $z$  kein Eigenwert von  $A$ . Dann ergibt einsetzen in die zweite Gleichung von (10.5)

$$y_{k+1} = y_k + h \mathbf{b}^T (I - zA)^{-1} \mathbf{1} \frac{z}{h} y_k = \left( 1 + z \mathbf{b}^T (I - zA)^{-1} \mathbf{1} \right) y_k = R(z) y_k.$$

In der Klammer steht genau die Stabilitätsfunktion  $R(z)$  des ursprünglichen Runge-Kutta-Verfahrens, siehe Definition 8.38.  $\blacksquare$

**Bemerkung 10.8** Da die wichtigsten Stabilitätseigenschaften allein von der Stabilitätsfunktion abhängen, übertragen sich also die entsprechenden Eigenschaften eines impliziten Runge-Kutta-Verfahrens auf das abgeleitete linear-implizite Verfahren. Die Konsistenzordnung des linear-impliziten Verfahrens kann aber bei ungünstiger Wahl der Koeffizienten  $d_{jl}$  geringer sein, als die Ordnung des Ausgangsverfahrens.  $\square$

**Beispiel 10.9 Linear-implizites Euler-Verfahren.** Das implizite Euler-Verfahren besitzt das Butcher-Schema

$$\frac{1}{1} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \right.$$

Nach (10.5) hat das linear-implizite Euler-Verfahren die Gestalt

$$(I - h\mathbf{f}_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}_k)) \mathbf{K}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_k), \quad \mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\mathbf{K}_1$$

Wie das implizite Euler-Verfahren ist auch das linear-implizite Euler-Verfahren stark  $A$ -stabil. Beim linear-impliziten Verfahren muss man aber in jedem Schritt nur ein lineares Gleichungssystem lösen.  $\square$

**Bemerkung 10.10 Rosenbrock<sup>1</sup>-Verfahren.** In der Praxis ergibt sich noch eine erhebliche Vereinfachung, wenn bei allen Stufen der gleiche Koeffizient  $a_{jj} = a$  verwendet wird. In diesem Fall haben alle Gleichungssysteme von (10.5) die gleiche Systemmatrix  $(I - ahJ)$ . Man braucht dann nur einmal eine LU-Zerlegung dieser Matrix berechnen und kann damit alle Systeme in (10.5) lösen. Dieses Herangehensweise nennt man Rosenbrock-Verfahren oder Rosenbrock-Wanner<sup>2</sup>-Verfahren (ROW-Verfahren)

$$\begin{aligned} (I - ahJ) \mathbf{K}_j &= \mathbf{f} \left( \mathbf{y}_k + h \sum_{l=1}^{j-1} (a_{jl} + d_{jl}) \mathbf{K}_l \right) - hJ \sum_{l=1}^{j-1} d_{jl} \mathbf{K}_l, \quad j = 1, \dots, s, \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + h \sum_{j=1}^s b_j \mathbf{K}_j. \end{aligned}$$

Oft ist es sogar möglich, die gleiche Approximation  $J$  der Jacobi-Matrix über mehrere Schritte hinweg zu verwenden, insbesondere dann, wenn sich die Lösung nur langsam ändert. Auf diese Weise kann man noch zusätzlichen Aufwand sparen.  $\square$

**Beispiel 10.11** MATLAB bietet zum Lösen von steifen Differentialgleichungen das Rosenbrock-Verfahren `ode23s` von Shampine<sup>3</sup> und Reichelt<sup>4</sup> an. Das Verfahren besitzt die Form

$$\begin{aligned} (I - ahJ) \mathbf{K}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{y}_k), \quad a = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \approx 0.2928932, \\ (I - ahJ) \mathbf{K}_2 &= \mathbf{f} \left( \mathbf{y}_k + \frac{1}{2} h \mathbf{K}_1 \right) - ahJ \mathbf{K}_1, \\ \mathbf{y}_{k+1} &= \mathbf{y}_k + h \mathbf{K}_2. \end{aligned}$$

Das zugehörige Butcher-Schema ist also

$$\frac{a}{1/2 + a} \left| \begin{array}{cc} a & a \\ 1/2 & a \\ 0 & 1 \end{array} \right.$$

und es ist  $d_{21} = a$ .  $\square$

<sup>1</sup>Howard H. Rosenbrock, geb. 1920

<sup>2</sup>Gerhard Wanner, geb. 1942

<sup>3</sup>Lawrence F. Shampine

<sup>4</sup>Mark W. Reichelt



**Satz 10.12 Ordnung von ode23s.** *Das Rosenbrock–Verfahren ode23s ist ein Verfahren zweiter Ordnung.*

**Beweis:** Sei  $h \in (0, 1/(2a \|J\|_2))$ , wobei  $\|\cdot\|_2$  die Spektralnorm von  $J$  ist. Diese wird von der Euklidischen Vektornorm  $\|\cdot\|_2$  induziert. In der Vorlesung Praktische Mathematik, Lemma 4.15, wurde bewiesen, dass die Matrix  $(I - ahJ)$  invertierbar ist, falls  $\|ahJ\|_2 < 1$ . Das ist für die obige Wahl von  $h$  erfüllt.

Sei  $\mathbf{K}$  die Lösung von

$$(I - ahJ)\mathbf{K} = \mathbf{f}.$$

Dann folgt mit Dreiecksungleichung und der Verträglichkeit von Euklidischer Norm und Spektralnorm, Praktische Mathematik Lemma 4.9,

$$\begin{aligned} \|(I - ahJ)\mathbf{K}\|_2 &\geq \|\mathbf{K}\|_2 - ah \|J\mathbf{K}\|_2 \geq \|\mathbf{K}\|_2 - ah \|J\|_2 \|\mathbf{K}\|_2 \\ &\geq \|\mathbf{K}\|_2 - \frac{a \|J\|_2}{2a \|J\|_2} \|\mathbf{K}\|_2 = \frac{1}{2} \|\mathbf{K}\|_2. \end{aligned}$$

Aus dem Gleichungssystem folgt damit

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{K}\|_2 \leq \|(I - ahJ)\mathbf{K}\|_2 = \|\mathbf{f}\|_2 \iff \|\mathbf{K}\|_2 \leq 2 \|\mathbf{f}\|_2.$$

Das bedeutet, die Lösung des Gleichungssystems ist durch die rechte Seite beschränkt.

Für die ersten Stufe von **ode23s** folgt durch rekursives Einsetzen

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + ahJ\mathbf{K}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + ahJ(\mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + ahJ\mathbf{K}_1) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + ahJ\mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + h^2 a^2 J^2 \mathbf{K}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + ahJ\mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Der letzte Schritt ist gerechtfertigt, weil die Beschränktheit von  $\mathbf{K}_1$  durch die Daten des Problems (rechte Seite  $\mathbf{f}(\mathbf{y}_k)$ ) bereits gezeigt wurde. Mittels Taylor–Entwicklung erhält man in entsprechender Weise für die zweite Stufe von **ode23s**

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_2 &= \mathbf{f}\left(\mathbf{y}_k + \frac{1}{2}h\mathbf{K}_1\right) - ahJ\mathbf{K}_1 + ahJ\mathbf{K}_2 \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + \frac{1}{2}h\mathbf{f}_y(\mathbf{y}_k)\mathbf{K}_1 - ahJ\mathbf{K}_1 + ahJ\mathbf{K}_2 + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + \frac{1}{2}h\mathbf{f}_y(\mathbf{y}_k)\mathbf{f}(\mathbf{y}_k) - ahJ\mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + ahJ\mathbf{K}_2 + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + \frac{1}{2}h\mathbf{f}_y(\mathbf{y}_k)\mathbf{f}(\mathbf{y}_k) - ahJ\mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + ahJ\mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + \mathcal{O}(h^2) \\ &= \mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + \frac{1}{2}h\mathbf{f}_y(\mathbf{y}_k)\mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt nun für einen Schritt von **ode23s**

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + h\mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + \frac{1}{2}h^2\mathbf{f}_y(\mathbf{y}_k)\mathbf{f}(\mathbf{y}_k) + \mathcal{O}(h^3).$$

Die ersten drei Terme entsprechen der Taylor–Entwicklung der Lösung  $\mathbf{y}(x)$  des Differentialgleichungssystem im Punkt  $\mathbf{y}_k$ . Das bedeutet, der lokale Fehler ist von Ordnung  $\mathcal{O}(h^3)$  und damit besitzt das Verfahren die Konsistenzordnung 2. ■

**Bemerkung 10.13** Man beachte, dass in diesem Beweis an keiner Stelle verwendet wurde, dass  $J$  die exakt berechnete Ableitung  $\mathbf{f}_y(\mathbf{y}_k)$  ist. Das Verfahren **ode23s** ist selbst dann noch ein Verfahren zweiter Ordnung, wenn  $J$  eine Näherung an  $\mathbf{f}_y(\mathbf{y}_k)$  ist und selbst dann noch, wenn  $J$  irgendwie gewählt wird. Die Übertragung der Stabilitätseigenschaften ist jedoch nur bei exakt berechneter Matrix  $J = \mathbf{f}_y(\mathbf{y}_k)$  gewährleistet, siehe Satz 10.7. □

**Satz 10.14 Stabilitätsfunktion von ode23s.** *Für  $J = \mathbf{f}_y(\mathbf{y}_k)$  hat die Stabilitätsfunktion des Rosenbrock–Verfahrens ode23s die Form*

$$R(z) = \frac{1 + (1 - 2a)z}{(1 - az)^2}.$$

**Beweis:** Die Aussage des Satzes ergibt sich mit Anwendung des Verfahrens auf die übliche Testgleichung (8.4), Übungsaufgabe. ■

**Bemerkung 10.15** Eine Reihenentwicklung der Stabilitätsfunktion zeigt, dass die Exponentialfunktion nur bis zum dritten Glied exakt approximiert wird. Damit folgt, dass man selbst bei exakter Jacobi-Matrix kein Verfahren dritter Ordnung erhält. Da man ohnehin im allgemeinen nur eine Approximation der Jacobi-Matrix hat, besteht somit kein zwingender Grund, diese in jedem Schritt zu berechnen. Es reicht,  $J$  ab und zu neu zu berechnen. □

**Satz 10.16 Stabilität von ode23s.** Für  $J = \mathbf{f}_y(\mathbf{y}_k)$  ist das Rosenbrock-Verfahren ode23s  $L$ -stabil.

**Beweis:** Siehe Literatur. ■

# Index

- $q$ -Schrittverfahren, 94
- Abbildung
  - kontrahierend, 32
  - kontraktiv, 32
- Adams–Bashforth–Verfahren, 96
- Adams–Moulton–Verfahren, 96
- Anfangswert, 10
- Anfangswertproblem, 10
  - autonomes, 81
- asymptotisch stabil, 72
- autonomes Anfangswertproblem, 81
- Banach–Raum, 32
- Banachscher Fixpunktsatz, 33
- Bernoullische Differentialgleichung, 20
- Butcher–Schema, 78
- Cauchy–Folge, 32
- charakteristisches Polynom, 50
  - erstes, 102
- Differentialgleichung
  - Bernoullische, 20
  - Exakte, 26
  - homogene, 13
  - homogene lineare 1. Ordnung, 16
  - lineare 1. Ordnung, 16
  - Riccatische, 22, 43
- Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung, 44
  - lineare, 46
  - lineare mit konstanten Koeffizienten, 50
- Differentialgleichungssystem
  - steifes, 108
- Differentiation nach der oberen Integrationsgrenze, 17
- Dirichlet–Randbedingung, 62
- DIRK–Verfahren, 84
- Dreiecksungleichung, 32
- Einschrittverfahren, 74
- Eliminationsmethode, 60
- Euler–Verfahren
  - explizites, 42, 70, 85, 88, 96
  - implizites, 74, 84, 85, 88, 97
  - linear–implizites, 111
- Eulerscher Multiplikator, 27
- Eulersches Polygonzugverfahren, 42, 70
- Exakte Differentialgleichung, 26
  - explizites Euler–Verfahren, 42, 70
- Fehler
  - globaler, 76, 105
  - lokaler, 75, 98
- Fundamentalsystem, 47
- Funktion
  - Greensche, 66
- Gauß–Legendre–Verfahren, 83
- Gauß–Lobatto–Verfahren, 84
- Gauß–Radau–Verfahren, 83
- gewöhnliche Differentialgleichung
  - mit getrennten Variablen, 10
- gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung, 8
  - explizite, 8
  - explizites System, 29, 107
- Gewichtsvektor, 78
- Gitter, 70, 74
- Gitterweite, 70
- gleichgradig stetige Menge von Funktionen, 39
- gleichmäßig beschränkte Menge von Funktionen., 39
- Gleichmäßig konvergente Funktionenfolge, 39
- globaler Fehler, 76, 105
- Gradientenfeld, 25
- Greensche Funktion, 66
- Grundlösung, 64
- Heun
  - Methode von, 82
- implizites Euler–Verfahren, 74
- Integrabilitätsbedingung, 25

integrierender Faktor, 27  
 Knoten, 70  
 Knotenvektor, 78  
 Konsistenzordnung, 76  
 Konsistenz, 98  
 Konsistenzordnung, 98  
 konvergentes Verfahren, 76  
 Konvergenz  
     Mehrschrittverfahren, 105  
 Konvergenzordnung, 76  
 Korrektor-Verfahren, 98  
 Lösung  
     allgemeine, 9  
 Lösungen  
     linear unabhängige, 47  
 linear-implizite Runge-Kutta-  
     Verfahren, 109  
 lineares System von Differentialglei-  
     chungen 1. Ordnung, 56  
     mit konstanten Koeffizienten, 59  
 Linienelement, 9  
 Lipschitz-Bedingung, 30  
     bezüglich von Variablen, 31  
 Lipschitz-Konstante, 30  
 Lipschitz-Stetigkeit, 30  
 Ljapunov-Stabilität, 72  
 lokaler Fehler, 75, 98  
 Matrixexponentialfunktion, 57  
 Maximumnorm, 31  
 Mehrschrittverfahren, 94  
     nullstabil, 102  
 Menge von Funktionen  
     gleichgradig stetige, 39  
     gleichmäßig beschränkte, 39  
 Methode  
     von Heun, 82  
     von Runge, 82  
 Methode der Haupt- und Eigenvektoren, 60  
 Methode der Trennung der Variablen,  
     12  
 metrischer Raum, 32  
     vollständiger, 32  
 Milne-Verfahren, 97, 103  
 Mittelpunktregel, 82  
     implizite, 83  
 Neumann-Randbedingung, 62  
 Niveaukurve, 26  
 Norm, 32  
 Nyström-Verfahren, 97  
 ode23s, 111  
 Polygonzugverfahren, 42  
 Prediktor-Korrektor-Verfahren, 98  
 Prediktor-Verfahren, 98  
 Quadraturformel, 78  
 Randbedingung  
     Dirichlet-, 62  
     Neumann-, 62  
     periodische, 62  
     Robin-, 62  
 Randwertproblem  
     lineares, 62  
     Sturmsches, 63  
 Raum  
     metrischer, 32  
 Riccatische Differentialgleichung, 22,  
     43  
 Richardson-Extrapolation, 91  
 Richardson-Methode, 89  
 Richtungsfeld, 9  
 Robin-Randbedingung, 62  
 Rosenbrock-Verfahren, 111  
 Runge  
     Methode von, 82  
 Runge-Kutta-Verfahren, 78  
     eingebettete, 91  
     linear-implizite, 109  
 Schrittweite, 74  
 Schrittweitensteuerung, 88, 91  
 Schwingungsdifferentialgleichung, 3  
 Simpson-Formel, 83  
 Simpson-Regel, 92  
 Störgliedansätze, 53  
 Störgliedansatz, 19  
 Stabilität  
     asymptotische, 72  
     Ljapunov, 72  
 Stabilitätsfunktion, 86  
 Stabilitätsgebiet, 87  
 steifes Differentialgleichungssystem,  
     108  
 Steigung, 78  
 Stufe, 78  
 Sturmsches Randwertproblem, 63  
 Substitutionsmethode, 60  
 Superpositionsprinzip, 16, 56  
 System von Differentialgleichungen 1.  
     Ordnung, 45  
 Trapezregel, 82, 86, 88, 97  
 Trennung der Variablen

Methode der, 12

Variation der Konstanten, 18, 54

Verfahren

- A-stabil, 87
- Adams-Bashforth, 96
- Adams-Moulton, 96
- DIRK-, 84
- explizites, 74
- Gauß-Legendre, 83
- Gauß-Lobatto, 84
- Gauß-Radau, 83
- implizites, 74
- konsistent, 75
- konvergent, 76
- L-stabil, 88
- Milne, 97
- Nyström, 97
- Rosenbrock-, 111
- Runge-Kutta, 78
- Runge-Kutta-Fehlberg, 92
- stark A-stabil, 88

Verfahrensfunktion, 74

Verfahrensmatrix, 78

Vorwärts-Euler-Verfahren, 42, 70

Wronski-Determinante, 47

Wronski-Matrix, 47