Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
PD Dr. V. John

Magdeburg, 10.05.2004

Übungsaufgaben zur Vorlesung Gewöhnliche Differentialgleichungen der Physik

Serie 5

zum Donnerstag, 27.05.2004

Die Lösung der Aufgabe 2 ist in der Übung am 27.05.2004 schriftlich abzugeben !

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden. Zu einer vollständig gelösten Aufgabe gehört die Probe !

1. Banachscher Fixpunktsatz: Sei $A \subset E$ eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraumes $(E, \|\cdot\|)$ und $F : A \to A$ eine kontraktive Abbildung, d.h. es existiert ein $\alpha \in [0,1)$ mit

$$\|F(x) - F(y)\| \le \alpha \|x - y\|, \quad \forall\, x, y \in A$$

(Lipschitz stetig mit $L < 1$). Dann hat die Gleichung $x = F(x)$ genau einen Fixpunkt $\tilde{x} \in A$. Der Fixpunkt ist Grenzwert der Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der sukzessiven Approximation

$$x_n = F(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

für jedes Startelement $x_0 \in A$.

a) Man zeige mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass die Gleichung

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 11x$$

im Intervall $[0,1]$ genau eine Lösung besitzt.

b) Man bestimme den Fixpunkt approximativ durch eine Grafik.

c) Man nehme eine Form der obigen Fixpunktgleichung, für die die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind und einen beliebigen Startwert $x_0 \in [0,1]$. Damit berechne man $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mit Hilfe der Fixpunktiteration (1).

d) Der obige Fixpunkt ist die Nullstelle des Polynoms

$$p(x) = x^4 + x^3 + x^2 - 10x + 1.$$

Man kann die Nullstellengleichung $p(x) = 0$ äquivalent in die Fixpunktgleichung

$$x = x - \frac{p(x)}{p'(x)} \tag{2}$$

überführen, falls $p'(x) \neq 0$ ist. Man nehme sich den gleichen Startwert x_0 wie in Aufgabe c) und berechne $x_1, x_2, x_3, \ldots$ mittels (2). Welches Verfahren nähert sich der Lösung schneller an ?

2. Man untersuche die folgenden AWP auf das Erfülltsein der Voraussetzungen des Satzes von Picard–Lindelöf. Läßt sich der durch $a > 0, b > 0$ gegebene Quader gegebenenfalls vergrößern ?

a)	$y'(x) = \sqrt[4]{\lvert y(x)\rvert}\,,$	$x_0 = 1\,, y_0 = 0\,,\quad a = b = 1\,,$	2 Punkte
b)	$y'(x) = x^2 + y^2(x)\,,$	$x_0 = 0\,, y_0 = 1\,,\quad a = b = 1\,,$	3 Punkte
c)	$y'(x) = \sqrt[4]{\lvert x\rvert}\, y^3(x)\,,$	$x_0 = 0\,, y_0 = 1\,,\quad a = b = 1\,.$	3 Punkte