FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 19.06.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Numerik Partieller Differentialgleichungen – eine elementare Einführung

Serie 10

abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 01.07.2009

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. In $L^2(0,1)$ betrachte man die Bilinearform

$$a \ : \ L^2(0,1) \times L^2(0,1) \to \mathbb{R}, \quad a(u,v) = \int_0^1 x u(x) v(x) \ dx,$$

das lineare Funktional

$$f \ : \ L^2(0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(v) = \int_0^1 v(x) \ dx$$

und das Funktional

$$J \ : \ L^2(0,1) \to \mathbb{R}, \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - f(v).$$

a) Man zeige, dass a und f stetig sind.

b) Man weise nach, dass das Variationsproblem

$$J(v) \to \min$$

keine Lösung in $L^2(0,1)$ besitzt.

c) Welche der Voraussetzungen des Satzes von Lax–Milgram ist nicht erfüllt? Zur Begründung gebe man ein Gegenbeispiel an!

4 Punkte

2. Sei

$$A = (a_{ij}) = a(\phi_j, \phi_i),$$

wobei $\{\phi_i\}_{i=1}^k$ eine Basis des endlich–dimensionalen Raums V_k ist. Man zeige

$$A = A^T \iff a(v,w) = a(w,v) \ \forall v, w \in V_k,$$
$$x^T A x > 0 \text{ für } x \neq 0 \iff a(v_k, v_k) > 0 \text{ für } v_k \neq 0.$$

4 Punkte

Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !