FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 09.06.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Numerik Partieller Differentialgleichungen – eine elementare Einführung

Serie 08

abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 17.06.2009

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. (a) Sei $f(x) = 1$ in Ω. Man untersuche, ob $f \in L^1(\Omega)$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ gilt, für $\Omega = (0,1)$ und $\Omega = \mathbb{R}$.

   (b) Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} |x|^a & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   ein Element von $L^p((-1,1))$ mit $p \in [1,\infty]$?

4 Punkte

2. Seien $r \in [1,\infty)$, $p,q \in (1,\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $u \in L^{rp}(\Omega)$, $v \in L^{rq}(\Omega)$. Man zeige

$$\| u\, v \|_{L^r} \leq \| u \|_{L^{rp}} \| v \|_{L^{rq}} .$$

4 Punkte

Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !