Kapitel 3

Schwache Lösungstheorie

Bemerkung 3.1 Motivation. Dieses Kapitel stellt eine Erweiterung des Lösungsbegriffes von partiellen Differentialgleichungen vor – die schwache Lösung. Diese Erweiterung ist aus folgenden Gründen notwendig:

- Man kann im allgemeinen nicht erwarten, dass eine partielle Differentialgleichung eine klassische Lösung besitzt. Dazu müssen die Parameterfunktionen hinreichend oft differenzierbar sein und in höheren Dimensionen muss auch das Gebiet einige Forderungen erfüllen. Zum Beispiel darf es keine Ecke besitzen. Diese Forderungen sind aber in der Natur oder in Anwendungen oft nicht erfüllt. Trotzdem laufen die durch die partielle Differentialgleichung beschriebenen Prozesse ab und es gibt offensichtlich eine Lösung. Nur wird diese bestimmte (Differenzierbarkeits–)Eigenschaften der klassischen Lösung nicht besitzen und man benötigt einen erweiterten Lösungsbegriff.
- Die im Kapitel 4 vorgestellte Finite–Element–Methode beruht auf der schwachen Formulierung der zu Grunde liegenden Gleichung.

Die grundlegende Idee bei der Abschwächung des Lösungsbegriffes besteht in der Formel der partiellen Integration. Betrachte das Zwei–Punkt–Randwertproblem

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Multiplikation mit einer gewissen Funktion $v(x)$, mit $v(0) = v(1) = 0$, der so genannten Testfunktion, Integration über $(0,1)$ und anschließende partielle Integration führen auf

$$\begin{aligned} \int_0^1 -u''(x)v(x)\ dx &= -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x)\ dx \\ &= \int_0^1 u'(x)v'(x)\ dx = \int_0^1 f(x)v(x)\ dx. \end{aligned}$$

Um dieser Gleichung einen Sinn zu geben, benötigt man nur noch, dass die Produkte $u'(x)v'(x)$ und $f(x)v(x)$ integrierbar sind. Es wird nicht einmal die Existenz der zweiten Ableitung von $u(x)$ verlangt. Natürlich muss geklärt werden, welche Eigenschaften geeignete Testfunktionen besitzen müssen. Der schwache Lösungsbegriff wird verlangen, dass die obige Integralgleichung für alle geeigneten Testfunktionen erfüllt ist. □

3.1 Funktionenräume

Bereits aus Bemerkung 3.1 wird deutlich, dass man Räume von Funktionen benötigt, die geeignet integrierbar sind.

3.1.1 Lebesgue–Räume

Definition 3.2 Lebesgue[1]–Räume. Die Lebesgue–Räume oder Räume der Lebesgue–messbaren Funktionen $L^p(a,b)$ sind die Räume aller Funktionen, für die gilt

$$v \in L^p(a,b) \iff \int_a^b |v(x)|^p \ dx < \infty, \quad \text{für } p \in [1,\infty),$$

$$v \in L^\infty(a,b) \iff \operatorname{ess}\sup_{x\in(a,b)} |v(x)| := \left(\inf_{\mu(N)=0} \sup_{(a,b)\setminus N} |v(x)| \right) < \infty.$$

Hierbei ist N eine beliebige Menge vom (Lebesgue–)Maß Null, $\mu(N)=0$ und ess sup wird wesentliches Supremum genannt. Der Raum $L^\infty(a,b)$ wird auch Raum der wesentlich beschränkten Funktionen genannt. □

Bemerkung 3.3 Zu den Lebesgue–Räumen.

- Die Integrale sind im Lebesgue–Sinn zu verstehen. Die Definition des Lebesgue–Integrals beruht auf sogenannten einfachen Funktionen. Das sind nicht–negative messbare (siehe Vorlesung über Maßtheorie) Funktionen, welche nur endlich viele Funktionswerte annehmen dürfen. Treppenfunktionen, wie man sie bei der Definition des Riemann–Integrals verwendet, sind eine Teilmenge der Menge der einfachen Funktionen. Im Gegensatz zu Treppenfunktionen, dürfen einfache Funktionen die endlich vielen Funktionswerte jedoch in unendlich vielen verschiedenen Intervallen annehmen. Die bekannteste einfache Funktion, die keine Treppenfunktion ist, ist die Dirichletsche Funktion
$$g:[0,1]\to\{0,1\}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & x\in\mathbb{Q}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$
Diese Funktion ist nicht Riemann–integrierbar, aber Lebesgue–integrierbar mit dem Integralwert Null. Das Lebesgue–Integral für eine beliebige Funktion wird dann wie üblich über einen Grenzprozess definiert. Da die Treppenfunktionen eine Teilmenge der einfachen Funktionen sind ist klar, dass das Lebesgue–Integral allgemeiner als das Riemann–Integral ist. Es gilt, dass jede Riemann–integrierbare Funktion auch Lebesgue–integrierbar ist und der Integralwert ist derselbe.
- Die Funktionen aus $L^p(a,b)$ sind nur bis auf eine Menge vom (Lebesgue–)Maß Null eindeutig bestimmt. In diesem Sinne ist eine Funktion $v(x)$ eigentlich eine Äquivalenzklasse aller Funktionen, die sich von $v(x)$ nur auf einer Menge vom Maß Null unterscheiden. Man sagt, dass sie fast überall gleich sind oder für fast alle $x\in[a,b]$ übereinstimmen. Aus jeder Äquivalenzklasse kann man immer einen entsprechenden Vertreter wählen.
Ein einfacher Vertreter aus der Klasse der Dirichletschen Funktion $g(x)$ ist die Funktion $v(x)=0$ für alle $x\in[0,1]$.
- Da ein Punkt eine Menge vom Maß Null ist, macht es im allgemeinen keinen Sinn, nach dem Funktionswert einer Funktion $u\in L^p(a,b)$ in einem bestimmten Punkt $x\in[a,b]$ zu fragen. Das geht nur, wenn es in der Äquivalenzklasse von $u(x)$ einen stetigen Repräsentanten gibt. Falls $u(x)$ bestimmte Eigenschaften besitzt, ist dies erfüllt, siehe beispielsweise Bemerkung 3.22.
- Die Räume $L^p(a,b)$, $p\in[1,\infty)$, werden Banach[2]–Räume (vollständige normierte Räume) mit der Norm
$$\|v\|_p := \left(\int_a^b |v(x)|^p \ dx \right)^{1/p}.$$

[1]Henri Lebesgue (1875 – 1941)
[2]Stefan Banach (1892 – 1945)

- Der Raum $L^\infty(a,b)$ wird zu einem Banach–Raum mit der Norm

$$\|v\|_\infty := \operatorname*{ess\ sup}_{x\in(a,b)} |v(x)| .$$

Gibt es einen stetigen Vertreter aus der Äquivalenzklasse von $v(x)$, der sich auch stetig auf den Rand fortsetzen lässt, man sagt dann wie üblich $v \in C([a,b])$, dann ist die Normdefinition äquivalent zu

$$\|v\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |v(x)| .$$

- Mit dem Skalarprodukt

$$(u,v) := \int_a^b u(x)v(x)\ dx$$

ist der $L^2(a,b)$ ein Hilbert–Raum. *Nachweis Skalarprodukt: Übungsaufgabe*

□

Beispiel 3.4 Betrachte $u(x) = 1/\sqrt{x}$ auf $(0,1)$. Dann ist für $p \neq 2$

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^p dx &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{p/2} dx = \int_0^1 x^{-p/2}\ dx \\ &= \frac{1}{1-p/2}\left(1^{1-p/2} - \lim_{x\to 0} x^{1-p/2}\right).\end{aligned}$$

Für $p < 2$ ist $1 - p/2 > 0$ und der Grenzwert ist Null. Somit existiert das Integral. Für $p > 2$ ist $1 - p/2 < 0$, der Grenzwert exisiert nicht und somit auch das Integral. Für $p = 2$ rechnet man direkt nach, dass das Integral auch divergiert. Die Funktion gehört auch nicht zu $L^\infty(0,1)$, da sie für $x \to 0$ unbeschränkt wächst. Also ist $u(x) \in L^p(0,1)$ für $p \in [1,2)$. □

Definition 3.5 $L^1_{\text{loc}}(a,b)$**.** Der Raum $L^1_{\text{loc}}(a,b)$ ist der Raum der (Äquivalenzklassen von) auf jeder kompakten Teilmenge von (a,b) Lebesgue–integrierbaren Funktionen. Es gilt also $u \in L^1_{\text{loc}}(a,b)$ genau dann, wenn $u \in L^1(a',b')$ für alle Intervalle $[a',b'] \subset (a,b)$. □

Beispiel 3.6 Die Funktion $u(x) = 1/x$ gehört zu $L^1_{\text{loc}}(0,1)$ aber nicht zu $L^1(0,1)$.

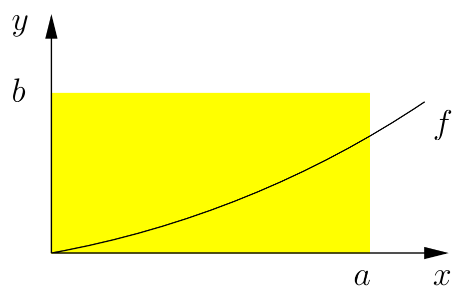
□

Das nächste Ziel ist der Beweis einer wichtigen Ungleichung in Lebesgue–Räumen.

Lemma 3.7 *Sei* $f\ :\ \mathbb{R}^+ \cup \{0\} =: \mathbb{R}^+_0 \to \mathbb{R}$ *eine stetige und streng monoton wachsende Funktion mit* $f(0) = 0$ *und* $f(x) \to \infty$ *für* $x \to \infty$*. Dann gilt für alle* $a, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$ab \le \int_0^a f(x)\ dx + \int_0^b f^{-1}(y)\ dy.$$

Beweis:



Das Intervall $(0, a)$ wird auf der x–Achse abgetragen und das Intervall $(0, b)$ auf der y–Achse. Dann sind ab der Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks, $\int_0^a f(x)\,dx$ die Fläche unterhalb der Kurve und $\int_0^b f^{-1}(y)\,dy$ die Fläche zwischen der positiven y–Achse und der Kurve. Damit ist die Ungleichung bewiesen. Gleichheit tritt genau dann auf, wenn $f(a) = b$ gilt. $\blacksquare$

Beispiel 3.8 Young[3]sche Ungleichung. Die Youngsche Ungleichung

$$ab \le \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2 \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}_0^+,\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$

erhält man aus diesem Lemma mit $f(x) = \varepsilon x,\ f^{-1}(y) = \varepsilon^{-1}y$. Sie lässt sich auch direkt mit der Binomischen Formel beweisen. Zum Beweis der verallgemeinerten Youngschen Ungleichung

$$ab \le \frac{\varepsilon^p}{p}a^p + \frac{1}{q\varepsilon^q}b^q, \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}_0^+, \varepsilon \in \mathbb{R}^+$$

mit $p^{-1} + q^{-1} = 1, p, q \in (1, \infty)$ wählt man $f(x) = x^{p-1},\ f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$ und wendet das obige Lemma auf die Intervalle mit den Grenzen εa und $\varepsilon^{-1}b$ an. $\square$

Beispiel 3.9 Cauchy[4]–Schwarz[5]–Ungleichung. Die Cauchy–Schwarz–Ungleichung

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \le \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \ \forall\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

kann man mit Hilfe der Youngschen Ungleichung beweisen. Dazu stellt man zunächst fest, dass die Cauchy–Schwarz–Ungleichung richtig ist, falls einer der beiden Vektoren verschwindet. Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ mit $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2 = 1$. Man erhält aus der Youngschen Ungleichung

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \le \sum_{i=1}^n |x_i|\,|y_i| \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n |y_i|^2 = 1.$$

Damit gilt die Cauchy–Schwarz–Ungleichung für $\mathbf{x}, \mathbf{y}$. Sind $\tilde{\mathbf{x}} \ne \mathbf{0}, \tilde{\mathbf{y}} \ne \mathbf{0}$ beliebig, nutzt man die Homogenität der Cauchy–Schwarz–Ungleichung aus. Aus der Gültigkeit der Cauchy–Schwarz–Ungleichung für $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ folgt durch Skalierung

$$\left|(\underbrace{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2^{-1}\,\tilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{x}}, \underbrace{\|\tilde{\mathbf{y}}\|_2^{-1}\,\tilde{\mathbf{y}}}_{\mathbf{y}})\right| \le 1$$

Die beiden Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ haben die Norm 1. Also

$$\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2 \|\tilde{\mathbf{y}}\|_2} |(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})| \le 1.$$

Das war zu beweisen.

Die verallgemeinerte Cauchy–Schwarz–Ungleichung

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q\right)^{1/q}$$

mit $p^{-1} + q^{-1} = 1, p, q \in (1, \infty)$ beweist man auf dem gleichen Wege mit Hilfe der verallgemeinerten Youngschen Ungleichung. $\square$

[3] Young
[4] Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)
[5] Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921)

Satz 3.10 ***Hölder*[6]*sche Ungleichung.*** *Sei $p^{-1} + q^{-1} = 1, p, q \in (1,\infty)$. Wenn $u \in L^p((a,b))$ und $v \in L^q((a,b))$, dann ist $uv \in L^1((a,b))$ und es gilt*

$$\|uv\|_1 \le \|u\|_p \, \|v\|_q \, .$$

Für $p = q = 2$ wird dies auch Cauchy–Schwarz–Ungleichung genannt.

Beweis: Man muss zunächst zeigen, dass $|u(x)v(x)|$ durch eine integrierbare Funktion abgeschätzt werden kann. Man setzt in der verallgemeinerten Youngschen Ungleichung $\varepsilon = 1$, $a = |u(x)|$ und $b = |v(x)|$. Dann folgt

$$|u(x)v(x)| \le \frac{1}{p}\,|u(x)|^p + \frac{1}{q}\,|v(x)|^q \, .$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung nach Voraussetzung integrierbar ist, ist $uv \in L^1((a,b))$ gezeigt. Auch die Höldersche Ungleichung ist bereits für den Fall $\|u\|_p = \|v\|_q = 1$ durch diese Ungleichung bewiesen

$$\int_{(} a,b)\, |u(x)v(x)| \ dx \le \frac{1}{p}\int_{(} a,b)\, |u(x)|^p \ dx + \frac{1}{q}\int_{(} a,b)\, |v(x)|^q \ dx = 1.$$

Die allgemeine Ungleichung folgt nun durch ein Homogenitätsargument wie bei der Cauchy–Schwarz–Ungleichung für den Fall dass beide Funktionen nicht fast überall verschwinden. Im Fall, dass eine Funktion fast überall verschwindet, ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt. ■

3.1.2 Verallgemeinerte Ableitung und Sobolev–Räume

Definition 3.11 $C_0^\infty(a,b)$**.** Der Raum $C_0^\infty(a,b) \subset C^\infty(a,b)$ ist der Raum der auf (a,b) beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\varphi(x)$, deren Träger

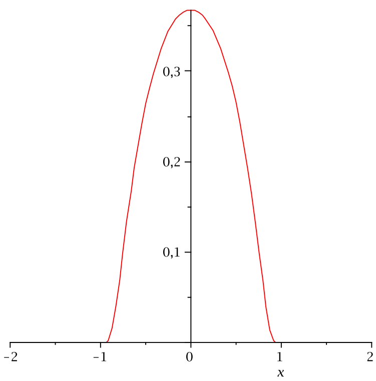
$$\operatorname{supp}\varphi := \overline{\{x \in (a,b) \ : \ \varphi(x) \neq 0\}}$$

beschränkt und in (a,b) enthalten ist. Man sagt auch, $\varphi(x)$ hat einen kompakten Träger. □

Beispiel 3.12 Die Funktion

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| \ge 1, \\ \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right) & \text{für } |x| < 1, \end{cases}$$

ist beliebig in $\mathbb{R}$ differenzierbar *Übungsaufgabe* mit $\operatorname{supp}\varphi = [-1,1]$.



□

[6] Otto Ludwig Hölder (1859 – 1937)

Definition 3.13 Verallgemeinerte oder schwache Ableitung. Seien $u, v \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$ und gelte für alle $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)\ dx = -\int_a^b v(x)\varphi(x)\ dx.$$

Dann heißt $v(x)$ verallgemeinerte oder schwache Ableitung von $u(x)$, im Symbol $v(x) = u'(x)$. □

Bemerkung 3.14

- In der Mathematik wird die Bezeichnung, dass etwas schwach gilt, im allgemeinen in dem Sinne gebraucht, dass eine Eigenschaft für alle geeigneten Testfunktionen erfüllt ist.
- Für im klassischen Sinne differenzierbare Funktionen stimmt die verallgemeinerte Ableitung mit der klassischen Ableitung überein.
- Für verallgemeinerte Ableitungen gelten die üblichen Differentiationsregeln. *Übungsaufgabe*

□

Beispiel 3.15 Betrachte $u(x) = |x|$ auf $(-1, 1)$. Dann ist die verallgemeinerte Ableitung durch

$$u'(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in (-1,0), \\ 1 & \text{für } x \in (0,1) \end{cases}$$

gegeben. Man beachte, dass die Wahl des Funktionswertes von $u'(x)$ in $x = 0$ keine Rolle spielt, denn gesucht ist eine Funktion aus $L^1_{\mathrm{loc}}(-1,1)$, genauer also eine Klasse von Funktionen, die fast überall auf $(-1,1)$ übereinstimmen.

Die Funktion $u'(x)$ besitzt keine schwache Ableitung. Das bedeutet, die schwache Ableitung muss nicht notwendig existieren. Man kann allerdings den Ableitungsbegriff noch weiter verallgemeinern, so dass jede (verallgemeinerte) Funktion unendlich oft in diesem Sinne differenzierbar ist. □

Lemma 3.16 Fundamentallemma der Variationsrechnung. *Sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$ und gelte für alle $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$*

$$\int_a^b u(x)\varphi(x)\ dx = 0.$$

Dann folgt $u(x) = 0$ für fast alle $x \in [a,b]$.

Beweis: Der Beweis erfordert eine Reihe technischer Vorbereitungen. Das sprengt den Rahmen dieser Vorlesung, deshalb sei auf [Emm04, p.61 ff.] verwiesen. ■

Folgerung 3.17 *Sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$ und gelte für alle $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$*

$$\int_a^b u(x)\varphi'(x)\ dx = 0.$$

Dann gibt es eine reelle Konstante C, so dass $u(x) = C$ für fast alle $x \in [a,b]$ gilt.

Beweis: Übungsaufgabe. ■

Lemma 3.18 *Sei $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(a,b)$. Dann ist die schwache Ableitung $u'(x)$ (als Äquivalenzklasse von Funktionen, die fast überall gleich sind) eindeutig bestimmt.*

Beweis: Indirekter Beweis. Sei $v(x)$ neben $u'(x)$ eine weitere schwache Ableitung. Dann gilt für alle $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$

$$\begin{aligned}\int_a^b \big(u'(x) - v(x)\big)\,\varphi(x)\,dx &= \int_a^b u'(x)\varphi(x)\,dx - \int_a^b v(x)\varphi(x)\,dx \\ &= -\int_a^b u(x)\varphi'(x)\,dx + \int_a^b u(x)\varphi'(x)\,dx = 0.\end{aligned}$$

Dann muss aber nach dem Fundamentallemma der Variationsrechnung $u'(x) = v(x)$ für fast alle $x \in [a,b]$ gelten. ■

Bemerkung 3.19

- Sei $u \in L^1(a,b)$ und gelte $u' \in L^1(a,b)$, so kann man zeigen, dass es in der Äquivalenzklasse von $u(x)$ einen stetigen (sogar absolut stetigen) Repräsentanten auf $[a,b]$ gibt. In diesem Falle macht es also auch Sinn, der Funktion $u(x)$ Funktionswerte in Punkten aus $[a,b]$ zuzuweisen.
  Eine reelle Funktion $g(x)$ auf $[a,b]$ heißt absolut stetig, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jedes endliche System disjunkter Teilintervalle (a_k, b_k), $k = 1,\ldots,n$, mit der Gesamtlänge $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$ gilt $\sum_{k=1}^n |g(b_k) - g(a_k)| < \varepsilon$. Jede absolut stetige Funktion ist stetig ($n = 1$), nicht aber umgekehrt. Lipschitz–stetige Funktionen sind absolut stetig.
- Höhere verallgemeinerte Ableitungen können analog zu Definition 3.13 mittels der Forderung

$$\int_a^b u(x)\varphi^{(n)}(x)\,dx = (-1)^n \int_a^b u(x)^{(n)}\varphi(x)\,dx$$

  für alle $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ definiert werden.

□

Definition 3.20 Sobolev[7]–Raum. Der Sobolev–Raum $W^{k,p}(a,b)$ mit $p \in [1,\infty]$ ist definiert durch

$$W^{k,p}(a,b) := \left\{ u \in L^p(a,b) \ : \ u^{(i)} \in L^p(a,b),\ i = 1,\ldots,k \right\}.$$

Oft wird $H^k(a,b)$ anstelle von $W^{k,2}(a,b)$ geschrieben. □

Lemma 3.21 *Auf $H^1(a,b)$ sind durch*

$$\|v\|_{1,2} := ((v,v))_{1,2}^{1/2}, \quad ((u,v))_{1,2} := \int_a^b \left(u(x)v(x) + u'(x)v'(x)\right)\,dx$$

eine Norm und ein Skalarprodukt definiert. Mit dieser Norm und diesem Skalarprodukt ist $H^1(a,b)$ ein Hilbert–Raum. Durch

$$|v|_{1,2} := \left(\int_a^b \left(v'(x)\right)^2\,dx \right)^{1/2}$$

ist eine Halbnorm definiert.

Beweis: Norm, Skalarprodukt und Halbnorm sind Übungsaufgaben. Für den Hilbert–Raum fehlt noch die Vollständigkeit, siehe dafür Literatur. ■

[7]Sergej Lwowitsch Sobolev (1908 – 1989)

Bemerkung 3.22 Wichtige Aussagen zum $H^1(a,b)$.

1. $H^1(a,b)$ besitzt eine abzählbare Basis. Diese Eigenschaft nennt man separabel. Also ist $H^1(a,b)$ ein separabler Hilbert–Raum. Das ist eine sehr reichhaltige Struktur.
2. Jede Funktion $u \in H^1(a,b)$ ist fast überall gleich einer (absolut) stetigen Funktion. Das bedeutet, man kann einen stetigen Repräsentanten auswählen. Es gibt eine Konstante $C > 0$, die nur vom Intervall (a,b) abhängt, so dass für alle $u \in C([a,b])$
$$\|u\|_{C([a,b])} \le C \|u\|_{1,2}$$
gilt. Solch eine Eigenschaft und zugehörige Ungleichung gilt in höheren Dimensionen nicht mehr.
3. Der Raum $C^\infty([a,b])$ liegt dicht in $H^1(a,b)$, das heißt für jedes $u \in H^1(a,b)$ und jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\varphi \in C^\infty([a,b])$ mit
$$\|u - \varphi\|_{1,2} \le \varepsilon.$$

Die Beweise findet man in der Literatur. □

Definition 3.23 $H_0^1(a,b)$. Der Raum $H_0^1(a,b)$ ist definiert durch
$$H_0^1(a,b) := \left\{ v \in H^1(a,b) \; : \; v(a) = v(b) = 0 \right\}.$$
□

Bemerkung 3.24 In einer Dimension macht die obige Definition Sinn, denn nach Bemerkung 3.22 besitzt jede Äquivalenzklasse in $H^1(a,b)$ einen stetigen Repräsentanten. In höheren Dimensionen muss man die Randwerte noch geeignet erklären. □

Satz 3.25 Poincaré[8]–Friedrichs[9]–Ungleichung. *Ist $u \in H_0^1(a,b)$, so gilt*
$$\|u\|_2 \le \frac{b-a}{\sqrt{2}} |u|_{1,2}.$$

Beweis: Sei $u(x)$ ein absolut stetiger Repräsentant. Dann gilt wegen $u(a) = 0$
$$u(x) = \int_a^x u'(\xi)\, d\xi, \quad x \in (a,b),$$
wobei $u'(x)$ die verallgemeinerte Ableitung bezeichnet. Mit der Cauchy–Schwarz–Ungleichung folgt
$$|u(x)|^2 = \left(\int_a^x u'(\xi)\, d\xi \right)^2 \le \left(\int_a^x 1\, d\xi \right) \left(\int_a^x |u'(\xi)|^2 \, d\xi \right) \le (x-a) |u|_{1,2}^2.$$
Integration über (a,b) gibt
$$\|u\|_2^2 = \int_a^b |u(x)|^2 \, dx \le \int_a^b (x-a)\, dx \, |u|_{1,2}^2 = \frac{(b-a)^2}{2} |u|_{1,2}^2.$$
■

Bemerkung 3.26 Zum $H_0^1(a,b)$ und zur Poincaré–Friedrichs–Ungleichung.

[8] Jules Henri Poincaré (1854 – 1912)
[9] Kurt Otto Friedrichs (1901 – 1982)

- Die Poincaré–Friedrichs–Konstante C_{PF} kann man noch etwas verbessern. Die Proportionalität zu $b-a$ bleibt jedoch erhalten.
- Im Beweis sieht man, dass es ausreicht, wenn $u(x)$ in einem Randpunkt den Wert Null annimmt.
- Auf $H_0^1(a,b)$ werden durch $|\cdot|_{1,2}$ eine Norm und durch
$$(u,v)_{1,2} := \int_a^b u'(x)v'(x)\ dx$$
ein Skalarprodukt definiert. Damit ist $H_0^1(a,b)$ ein separabler Hilbert–Raum.
- Die Poincaré–Friedrichs–Ungleichung zeigt die Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|_{1,2}$ und $|\cdot|_{1,2}$ auf $H_0^1(a,b)$
$$|u|_{1,2} \le \|u\|_{1,2} = \left(\|u\|_{0,2}^2 + |u|_{1,2}^2\right)^{1/2} \le \left(C_{\mathrm{PF}}^2\,|u|_{1,2}^2 + |u|_{1,2}^2\right)^{1/2} = C\,|u|_{1,2}\,.$$
- Es gilt für $u \in H_0^1(a,b)$
$$\|u\|_{C([a,b])} \le \sqrt{b-a}\,|u|_{1,2}\,.$$
- Der Raum $C_0^\infty(a,b)$ liegt dicht in $H_0^1(a,b)$.
- Der Raum $H_0^1(a,b)$ liegt dicht in $L^2(a,b)$.

□

Definition 3.27 Dualraum $H^{-1}(a,b)$. Es bezeichne $H^{-1}(a,b)$ den Raum aller stetigen linearen Funktionale auf $H_0^1(a,b)$, das heißt den Raum aller stetigen linearen Abbildungen $H_0^1(a,b) \to \mathbb{R}$. □

Bemerkung 3.28 Zum Dualraum.
- Zu jedem $f \in H^{-1}(a,b)$ gibt es ein nicht eindeutig bestimmtes $u_f \in L^2(a,b)$, so dass
$$\begin{aligned}\langle f,v\rangle &= -\int_a^b u_f(x)v'(x)\ dx \quad \text{für alle } v \in H_0^1(a,b),\\ &\overset{\text{formal}}{=} \int_a^b u_f'(x)v(x)\ dx = \int_a^b f(x)v(x)\ dx.\end{aligned}$$
Die Definition $\langle f,v\rangle$ bedeutet, dass man falls der eine Faktor aus $H_0^1(a,b)$ ist, einen zweiten Faktor wählen kann, der nicht einmal in $L^2(a,b)$ liegen muss, damit das Integral noch einen Sinn ergibt. Der Raum $H^{-1}(a,b)$ beschreibt konkret, was *nicht einmal in $L^2(a,b)$ liegen* bedeutet.
- Auf $H^{-1}(a,b)$ wird durch
$$\|f\|_{-1,2} := \sup_{v \in H_0^1(a,b)} \frac{|\langle f,v\rangle|}{|v|_{1,2}}$$
eine Norm definiert. Mit dieser Norm ist $H^{-1}(a,b)$ ein Banach–Raum. Diese Norm ist im allgemeinen praktisch nicht berechenbar.
- Es gilt
$$H_0^1(a,b) \subset L^2(a,b) \subset H^{-1}(a,b).$$
Das ist der sogenannte Gelfand[10]–Dreier.

[10] Israel Moissejewitsch Gelfand, geb. 1913

- Ein lineares Funktional aus dem $H^{-1}(a,b)$ heißt beschränkt, wenn es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass
$$\langle f, v\rangle \le c\, |v|_{1,2}$$
für alle $v \in H_0^1(a,b)$ gilt. Ein lineares Funktional heißt stetig, wenn aus $v_n(x) \to v(x)$ in $H_0^1(a,b)$ folgt $\langle f, v_n\rangle \to \langle f, v\rangle$ in $\mathbb{R}$. Man kann zeigen: Ein lineares Funktional ist genau dann stetig, wenn es beschränkt ist.
- Oft schreibt man $f(v)$ anstelle von $\langle f, v\rangle$. Der duale Raum eines Hilbert–Raumes V wird im allgemeinen mit V' bezeichnet.

□

3.2 Variationelle Formulierung

Bemerkung 3.29 Herleitung der variationellen oder schwachen Formulierung. Betrachte das Zwei–Punkt–Randwertproblem

$$-\varepsilon u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad \text{für } x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0. \tag{3.1}$$

Multiplikation der Differentialgleichung mit einer geeigneten Funktion $v(x)$, mit $v(0) = v(1) = 0$, Integration der resultieren Gleichung über $(0,1)$ und anschließende partielle Integration ergibt

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Big(-\varepsilon u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x)\Big)v(x)\ dx \\
&= -\varepsilon u'(1)v(1) + \varepsilon u'(0)v(0) \\
&\quad + \int_0^1 \Big(\varepsilon u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big)\ dx \\
&= \int_0^1 \Big(\varepsilon u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big)\ dx \\
&= \int_0^1 f(x)v(x)\ dx.
\end{aligned}$$

Man hat also von der höchsten Ableitung von $u(x)$ eine Ableitung auf die Funktion $v(x)$ übertragen. Damit die obige Schreibweise Sinn macht, müssen die Funktionen natürlich so beschaffen sein, dass die Integrale wohldefiniert sind. □

Definition 3.30 Variationelle oder schwache Formulierung. Seien $b, c \in L^\infty(0,1)$ und $f \in H^{-1}(0,1)$. Die schwache Formulierung des Zwei–Punkt–Randwertproblems (3.1) lautet: Finde $u \in H_0^1(0,1)$, so dass für alle $v \in H_0^1(0,1)$

$$\int_0^1 \Big(\varepsilon u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big)\ dx = \int_0^1 f(x)v(x)\ dx \tag{3.2}$$

gilt. Die Lösung nennt man schwache oder verallgemeinerte Lösung. Der Raum in dem die Lösung gesucht wird heißt Lösungs– oder Ansatzraum. Die Funktionen $v(x)$ heißen Testfunktionen und der Raum aus dem sie stammen Testraum. □

Bemerkung 3.31 Zur schwachen Formulierung.
- Die Voraussetzungen sind so, dass alle Integrale wohldefiniert sind.
- Im Gegensatz zur klassischen Lösung muss die schwache Lösung nur noch einmal differenzierbar sein, und das auch nur schwach.
- Jede klassische Lösung ist auch schwache Lösung. Die Umkehrung gilt jedoch nur bei hinreichend glatten Koeffizienten und rechter Seite.

$\square$

Beispiel 3.32 Betrachte ein Zwei–Punkt–Randwertproblem der Form (3.1) in $(-1,1)$ mit $\varepsilon = 1$, $b(x) = c(x) = 0$ für alle $x \in (-1,1)$,

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{für } x < 0, \\ -2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

und $u(-1) = u(1) = 0$. Die rechte Seite ist nicht stetig, deshalb kann dieses Problem keine klassische Lösung besitzen.

Dieses Problem kann als Modell der Wärmeleitung in einem eindimensionalen Stab der Länge Zwei aufgefasst werden. In $[-1,0)$ wird der Stab erhitzt, in $(0,1]$ abgekühlt. Was im Punkt $x = 0$ passiert ist für die schwache Formulierung unwichtig. Gesucht ist die Temperatur $u(x)$. An den Stabenden ist die Temperatur jeweils Null. Die Wärmeleitung findet nur durch Diffusion (Molekularbewegung) statt.

Das Problem besitzt die schwache Lösung

$$u(x) = \begin{cases} -x^2 - x & \text{für } x < 0, \\ x^2 - x & \text{für } x \geq 0, \end{cases}$$

sie Abbildung 3.1.

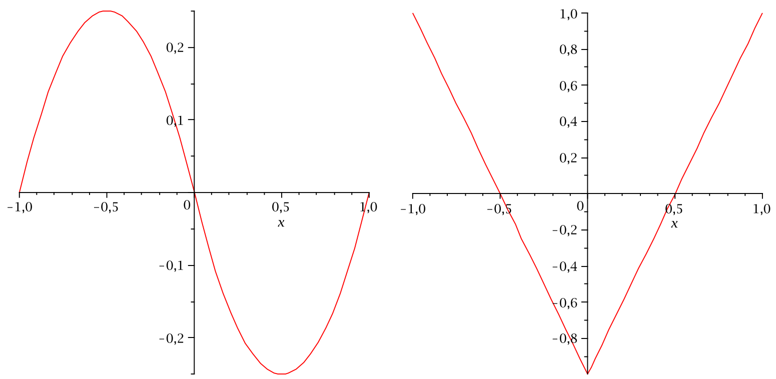


Abbildung 3.1: Beispiel 3.32: schwache Lösung und ihre Ableitung.

Die erste Ableitung von $u(x)$ ist stetig

$$u'(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{für } x < 0, \\ 2x - 1 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Die variationelle Formulierung: Finde $u \in H_0^1(-1,1)$, so dass

$$\int_{-1}^{1} u'(x)v(x)\ dx = \int_{-1}^{1} f(x)v(x)\ dx$$

für alle $v \in H_0^1(-1,1)$ ist also wohldefiniert. Es gilt für alle $v \in H_0^1(-1,1)$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} u'(x)v'(x)\ dx &= \int_{-1}^{0} u'(x)v'(x)\ dx + \int_{0}^{1} u'(x)v'(x)\ dx \\ &= \int_{-1}^{0} -u''(x)v(x)\ dx + \lim_{x\to 0-} u'(x)v(x) - u'(-1)v(-1) \\ &\quad + \int_{0}^{1} -u''(x)v(x)\ dx + u'(1)v(1) - \lim_{x\to 0+} u'(x)v(x) \\ &= \int_{-1}^{0} 2v(x)\ dx + \int_{0}^{1} (-2)v(x)\ dx = \int_{-1}^{1} f(x)v(x)\ dx. \end{aligned}$$

Die Terme an den Randpunkten verschwinden, weil $v(x)$ dort verschwindet. Die Terme im Punkt $x = 0$ sind gleich, weil $u'(x)$ und $v(x)$ stetig sind. $\square$

Bemerkung 3.33 Andere Randbedingungen.

- Betrachte zunächst inhomogene Dirichlet–Bedingungen

$$u(0) = a, \quad u(1) = b.$$

  Dann sieht die schwache Formulierung genauso aus wie (3.2), auch der Testraum bleibt $H_0^1(0,1)$, aber der Ansatzraum ändert sich zu

$$\begin{aligned} V_a &:= \left\{v \in H^1(0,1) \ : \ v = g + w, \ w \in H_0^1(0,1)\right\} \\ &= \left\{v \in H^1(0,1) \ : \ v(0) = a, \ v(1) = b\right\}, \end{aligned}$$

  wobei $g \in H^1(0,1)$ eine beliebige, aber fixierte Funktion mit $g(0) = a, g(1) = b$ ist. Dirichlet–Bedingungen nennt man auch wesentliche Randbedingungen, da sie entscheidend in die Definition des Ansatzraumes eingehen.
- Dagegen können Neumann–Randbedingungen in natürlicher Weise eingearbeitet werden, weshalb sie auch natürliche Randbedingungen genannt werden. Seien $\varepsilon u'(0) = \alpha$, $\varepsilon u'(1) = \beta$, dann sucht man ein $u \in H^1(0,1)$, so dass

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \Big(\varepsilon u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big)\ dx \\ &= \int_0^1 f(x)v(x)\ dx - \beta v(1) + \alpha v(0) \end{aligned}$$

  für alle $v \in H^1(0,1)$ erfüllt ist. Die Randterme fallen bei der partiellen Integration der klassischen Formulierung nicht weg.

$\square$

Definition 3.34 Bilinearform. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banach–Raum. Eine Abbildung $a \ : \ V \times V \to \mathbb{R}$ heißt

1. bilinear, falls $a(\cdot,\cdot)$ in jedem Argument linear ist,
2. symmetrisch, falls $a(u,v) = a(v,u)$ für alle $u, v \in V$ gilt,
3. positiv, falls $a(v,v) \geq 0$ für alle $v \in V$ gilt,
4. stark positiv oder koerzitiv oder V–elliptisch oder positiv definit, falls es ein $\mu > 0$ gibt, so dass $a(v,v) \geq \mu \|v\|^2$ für alle $v \in V$ gilt.
5. Eine Bilinearform heißt beschränkt, falls es ein $\beta > 0$ gibt, so dass

$$|a(u,v)| \leq \beta \|u\| \|v\|$$

   für alle $u, v \in V$ gilt.

$\square$

Beispiel 3.35 Betrachte das Zwei–Punkt–Randwertproblem mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen.

- Dann ist

$$a(u,v) := \int_0^1 \Big(\varepsilon u'(x)v'(x) + b(x)u'(x)v(x) + c(x)u(x)v(x)\Big)\ dx \qquad (3.3)$$

  eine Bilinearform auf $V = H_0^1(0,1)$. Das folgt direkt aus der Linearität der Integration und der Linearität der Differentiation.

- Ist $b(x) = 0$ für alle $x \in (0,1)$, dann ist $a(u,v)$ symmetrisch.
- Seien $b \in C^1([0,1])$ und $c \in C([0,1])$. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^1 b(x)v'(x)v(x)\ dx &= -\frac{1}{2}\int_0^1 (b(x)v(x))'v(x)\ dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^1 b'(x)v(x)v(x)\ dx - \frac{1}{2}\int_0^1 b(x)v'(x)v(x)\ dx \\ \Longrightarrow \int_0^1 b(x)v'(x)v(x)\ dx &= -\frac{1}{2}\int_0^1 b'(x)v(x)v(x)\ dx. \end{aligned}$$

  Einsetzen in (3.3) mit $u(x) = v(x)$ ergibt

$$a(v,v) = \int_0^1 \left(\varepsilon \left(v'(x)\right)^2 + \left(-\frac{b'(x)}{2} + c(x)\right)(v(x))^2\right)\ dx$$

  Falls $-b'(x)/2 + c(x) \geq 0$ für alle $x \in [0,1]$ ist, folgt für alle $v \in H_0^1(0,1)$

$$a(v,v) \geq \varepsilon \left|v\right|_{1,2}^2$$

  und $a(\cdot,\cdot)$ ist koerzitiv, da nach Bemerkung 3.26 $\left|\cdot\right|_{1,2}$ eine Norm in $H_0^1(0,1)$ ist.
- Seien $b, c \in L^\infty(0,1)$. Mit Hilfe der Cauchy–Schwarz–Ungleichung und der Poincaré–Friedrichs–Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} |a(u,v)| &\leq \varepsilon \left\|u'\right\|_0 \left\|v'\right\|_0 + \|b\|_\infty \left\|u'\right\|_0 \|v\|_0 + \|c\|_\infty \|u\|_0 \|v\|_0 \\ &\leq \varepsilon \left\|u'\right\|_0 \left\|v'\right\|_0 + C_{PF} \|b\|_\infty \left\|u'\right\|_0 \left\|v'\right\|_0 + C_{PF}^2 \|c\|_\infty \left\|u'\right\|_0 \left\|v'\right\|_0 \\ &= C \left\|u'\right\|_0 \left\|v'\right\|_0 = C \left|u\right|_{1,2} \left|v\right|_{1,2}. \end{aligned}$$

  Somit ist die Bilinearform beschränkt. *Übungsaufgabe, Bsp. S.94*

□

Satz 3.36 ***Riesz*[11]*scher Darstellungssatz.*** *Sei V ein Hilbert–Raum mit dem Skalarprodukt $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ und der Norm $\|v\|_V = a(v,v)^{1/2}$. Zu jedem stetigen linearen Funktional $f \in V'$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $u \in V$ mit*

$$a(u,v) = f(v) \quad \forall\ v \in V.$$

Desweiteren ist $u(x)$ die eindeutig bestimmte Lösung des Variationsproblems

$$\min_{v\in V} F(v) := \min_{v \in V}\left(\frac{1}{2}a(v,v) - f(v)\right).$$

Beweis: Als erstes wird die Existenz einer Lösung $u(x)$ des Variationsproblems gezeigt. Wegen der Stetigkeit von f gilt die Abschätzung

$$|f(v)| \leq c \|v\|_V \quad \forall\ v \in V$$

und daher

$$F(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|_V^2 - c\|v\|_V.$$

Der rechte Ausdruck ist eine nach oben geöffnete Parabel in $\|v\|_V$. Somit ist dieser Ausdruck nach unten beschränkt und mit dem notwendigen Kriterium für ein Minimum erhält man $0 = \|v\|_V - c$. Einsetzen ergibt

$$F(v) \geq -\frac{1}{2}c^2.$$

[11] Frigyes Riesz (1880 – 1956)

Da das Funktional F nach unten beschränkt ist, existiert

$$d = \inf_{v \in V} F(v)$$

Sei $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge, d.h, $F(v_k) \to d$ für $k \to \infty$. Im Hilbert–Raum gilt *Übungsaufgabe*

$$\|v_k - v_l\|_V^2 + \|v_k + v_l\|_V^2 = 2\,\|v_k\|_V^2 + 2\,\|v_l\|_V^2 .$$

Es folgt, unter Nutzung der Linearität von f,

$$\begin{aligned}
&\|v_k - v_l\|_V^2 \\
&= 2\,\|v_k\|_V^2 + 2\,\|v_l\|_V^2 - 4\left\|\frac{v_k+v_l}{2}\right\|_V^2 - 4f(v_k) - 4f(v_l) + 8f\left(\frac{v_k+v_l}{2}\right) \\
&= 4F(v_k) + 4F(v_l) - 8F\left(\frac{v_k+v_l}{2}\right) \\
&\le 4F(v_k) + 4F(v_l) - 8d \to 0
\end{aligned}$$

für $k, l \to \infty$. Damit ist $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge, die wegen der Vollständigkeit von V einen Grenzwert $u \in V$ besitzt. Da F stetig ist, ist $F(u) = d$ und $u(x)$ ist die Lösung des Variationsproblems.

Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass jede Lösung des Variationsproblems auch eine Lösung der Gleichung ist. Es ist, unter Nutzung der Bilinearität und Symmetrie,

$$\begin{aligned}
\Phi(\varepsilon) &= F(u+\varepsilon v) = \frac{1}{2}a(u+\varepsilon v, u+\varepsilon v) - f(u+\varepsilon v) \\
&= \frac{1}{2}a(u,u) + \varepsilon a(u,v) + \frac{\varepsilon^2}{2}a(v,v) - f(u) - \varepsilon f(v)
\end{aligned}$$

für alle $v \in V$. Wenn $u(x)$ das Variationsproblem minimiert, dann besitzt die Funktion $\Phi(\varepsilon)$ an der Stelle $\varepsilon = 0$ ein Minimum. Das notwendige Kriterium führt auf die Bedingung

$$0 = \Phi'(0) = a(u,v) - f(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Zum Schluss wird die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt. Seien $u_1(x)$ und $u_2(x)$ zwei Lösungen der Gleichung. Aus der Differenz der beiden Gleichungen erhält man

$$a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

Diese Beziehung gilt speziell für $v(x) = (u_1 - u_2)(x)$ woraus $u_1(x) = u_2(x)$ folgt. Die Lösung des Variationsproblems ist eindeutig auf Grund der Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung. ■

Beispiel 3.37 Seien $V = H_0^1(0,1)$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt $a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\,dx$ und $V' = H^{-1}(0,1)$. Es ist $a(v,v)^{1/2} = |v|_{1,2}$ eine Norm in $H_0^1(0,1)$. Aus dem Rieszschen Darstellungssatz folgt, dass

$$a(u,v) = \int_0^1 u'(x)v'(x)\ dx = \int_0^1 f(x)v(x)\ dx$$

für jedes $f \in H^{-1}(0,1)$ eine eindeutige Lösung besitzt. Desweiteren minimiert diese Lösung das sogenannte Energiefunktional

$$\min_{v\in H_0^1(0,1)} F(v) := \min_{v\in H_0^1(0,1)} \left(\int_0^1 \frac{1}{2}\left(v'(x)\right)^2 - f(x)v(x)\ dx\right).$$

Den Ausdruck unter dem Integral kann man physikalisch als Energie interpretieren. □

Der Satz von Riesz kann wie folgt verallgemeinert werden.

Satz 3.38 ***Lemma von Lax*[12]*–Milgram*[13].** *Sei $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und positiv definite Bilinearform auf dem Hilbert–Raum V. Zu jedem beschränkten linearen Funktional $f \in V'$ gibt es genau ein $u \in V$ mit*

$$a(u,v) = f(v) \quad \textit{für alle } v \in V. \tag{3.4}$$

Beweis: Der Beweis erfolgt mit Hilfe des Satzes von Riesz. Dazu werden gewisse Operatoren definiert. Auf die Einführung dieses Kalküls wurde aus Zeitgründen verzichtet.

Für Details des Beweises, siehe Literatur. ∎

Folgerung 3.39 Lösung des schwachen Problems (3.3). *Seien $V = H_0^1(0,1)$, $f \in V'$, $b, b', c \in L^\infty(0,1)$ und gelte*

$$c(x) - \frac{b'(x)}{2} \geq 0 \quad \textit{fast überall in } (0,1).$$

Dann besitzt (3.3) genau eine Lösung.

Beweis: Der Beweis folgt mit dem Lemma von Lax–Milgram und den bereits bewiesenen Eigenschaften der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$. ∎

Satz 3.40 Regularitätsaussage. *Seien die Voraussetzungen von Folgerung 3.39 erfüllt und gelte zusätzlich für ein $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dass $b, c \in C^{k-1}([0,1])$ sowie $f, f', \ldots, f^{k-1} \in L^2(0,1)$. Dann gilt für die schwache Lösung von (3.3) $u, u', \ldots, u^{k+1} \in L^2(0,1)$.*

Beweis: Siehe Literatur, zum Beispiel [GT83]. ∎

[12] Peter Lax, geb. 1926

[13] Arthur Norton Milgram