

Kapitel 1

Einführung

Bemerkung 1.1 Zur Bedeutung konvektions-dominanter Probleme und Grundproblem ihrer numerischen Simulation. Konvektions-dominante Probleme treten in vielen Prozessen in Natur und Technik auf. Dies ist immer dann der Fall, wenn ein Stoff (aufgelöst oder als Teilchen) oder eine physikalische Größe (Temperatur) durch eine Strömung transportiert wird. Oft gibt es neben der Strömung weitere Prozesse, welche in einem betrachteten System auftreten, beispielsweise chemische Reaktionen.

Lösungen konvektions-dominanter Probleme besitzen oft kleine Strukturen oder Skalen. Diese Skalen sind wichtige Merkmale der Lösungen. Numerische Verfahren basieren im allgemeinen auf Zerlegungen des zu Grunde liegenden Gebiets. Diese Zerlegungen können häufig bei weitem nicht so fein gewählt werden, dass die kleinen Skalen aufgelöst werden können. Ist dies der Fall, dann stellt sich heraus, dass numerische Standard-Verfahren zu vollkommen unbrauchbaren numerischen Lösungen führen. Man benötigt spezielle Verfahren in solchen Situationen. \square

Bemerkung 1.2 Inhalt der Vorlesung, Stand der Forschung. Die Vorlesung untersucht die Eigenschaften von Lösungen konvektions-dominanter Probleme und ihre numerische Approximation. Diese Untersuchungen erfolgen für Probleme in einer Dimension, da

- die wesentlichen Schwierigkeiten schon in einer Dimension auftreten,
- die Analysis für eindimensionale Probleme noch relativ einfach ist,
- man für eindimensionale Probleme Verfahren konstruieren kann, mit denen man im gewissen Sinne perfekte Lösungen erhält.

Höher-dimensionale Probleme werden im Seminar behandelt. Die grundlegende Vorgehensweise für diese Probleme besteht darin, die Ideen für eindimensionale Probleme zu übertragen. Es stellt sich heraus, dass

- man wesentliche Verbesserungen im Vergleich zu Standard-Verfahren erzielt,
- die Lösungen aber lange nicht perfekt sind. Oft sind sie nicht einmal gut.

Die Suche nach Verfahren zur Berechnung guter numerischer Lösungen für konvektions-dominante Probleme in höheren Dimensionen ist ein aktives Forschungsgebiet. \square

Kapitel 2

Analysis von Zwei-Punkt-Randwert-Problemen

2.1 Das Modellproblem

Definition 2.1 Lineares Zwei-Punkt-Randwertproblem. Ein lineares Zwei-Punkt-Randwertproblem besitzt die Gestalt

$$-\varepsilon u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x), \quad \text{für } x \in (d, e), \quad (2.1)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \alpha_d u(d) - \beta_d u'(d) &= \gamma_d, \\ \alpha_e u(e) - \beta_e u'(e) &= \gamma_e. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Hierbei gelte $b, c, f \in C([e, d])$, $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ und die Konstanten $\alpha_d, \alpha_e, \beta_d, \beta_e, \gamma_d, \gamma_e$ seien gegeben. \square

Bemerkung 2.2 Bedeutung linearer Zwei-Punkt-Randwertprobleme. Das Randwertproblem (2.1), (2.2) ist das einfachste Modellproblem zur Beschreibung von Prozessen, welche Diffusion und Transport beinhalten.

Ein Beispiel aus [Goe77] ist wie folgt. Fließt einem Strömungsreaktor bei konstanter Temperatur kontinuierlich eine Reaktionsmasse zu und ein Produkt ab, so berechnet sich die Konzentrationsverteilung $c(t, x, y, z)$, [$kmol/m^3$], im Reaktor gemäß der partiellen Differentialgleichung

$$\underbrace{\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{c}\mathbf{u})}_{\text{Konvektion}} - \underbrace{\operatorname{div}(D \operatorname{grad} c)}_{\text{Diffusion}} = r(c),$$

wobei $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, [m/s], der Vektor der Strömungsgeschwindigkeit, $r(c(\mathbf{x}))$, [$kmol/(m^3s)$], eine die Reaktion beschreibende Funktion und D , [m^2/s], der Diffusionskoeffizient sind. Bei einem stationären Reaktorbetrieb, das heißt die zeitliche Änderung ist sehr langsam und kann vernachlässigt werden, bei konstanten Parametern D , \mathbf{u} und wenn die Konzentration sich nur in x -Richtung ändert, erhält man aus der partiellen Differentialgleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung für $c(x)$

$$-Dc''(x) + uc'(x) = r(c(x)).$$

Sei $x \in [0, L]$, wobei L , [m], die Reaktorlänge bezeichne. Mit den dimensionslosen Größen

$$\xi := \frac{x}{L}, \quad \gamma := \frac{c}{c_0},$$

wobei c_0 , [$kmol/m^3$], eine Referenzkonzentration ist, gelangt man zu einer dimensionslosen gewöhnlichen Differentialgleichung. Es gelten mit Kettenregel

$$\frac{d\gamma(\xi)}{d\xi} = \frac{d(c(x)/c_0)}{dx} \frac{dx}{d\xi} = L \frac{c'(x)}{c_0} \quad \text{und} \quad \frac{d^2\gamma(\xi)}{d\xi^2} = L^2 \frac{c''(x)}{c_0}.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt, im Fall $u \neq 0$,

$$-\frac{1}{\text{Pe}}\gamma''(\xi) + \gamma'(\xi) = \rho(\gamma(\xi)), \quad \xi \in (0, 1), \quad \text{mit} \quad \text{Pe} := \frac{uL}{D}, \quad \rho = \frac{L}{uc_0}r.$$

Die dimensionslose Zahl Pe wird Péclet-Zahl genannt. Zur Vervollständigung der Problemstellung sind jetzt noch Randbedingungen für $\xi \in \{0, 1\}$ nötig.



Abbildung 2.1: Jean Claude Eugene Péclet (1793 – 1857).

Aus der eben beschriebenen Anwendung heraus werden die Terme in (2.1) wie folgt genannt:

- $-\varepsilon u''$ – Diffusionsterm,
- $b(x)u'$ – Konvektions-, Advektions- oder Transportterm,
- $c(x)u$ – Reaktionsterm.

Das Modellproblem (2.1), (2.2) wird Konvektions–Diffusions–Problem genannt, falls $b(x) \neq 0$.

Die Péclet-Zahl gibt das Verhältnis von Konvektion und Diffusion an. Falls dieses Verhältnis groß ist, wird dies in der numerischen Lösung von (2.1), (2.2) zu erheblichen Schwierigkeiten führen. \square

Definition 2.3 Randbedingungen. Seien $\gamma_d, \gamma_e \in \mathbb{R}$, $\alpha_d, \alpha_e \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Randbedingungen der Gestalt:

1.

$$u(d) = \gamma_d, \quad u(e) = \gamma_e$$

heißten Randbedingungen erster Art oder Dirichlet–Randbedingungen,

2.

$$u'(d) = \gamma_d, \quad u'(e) = \gamma_e$$

heißten Randbedingungen zweiter Art oder Neumann–Randbedingungen,

3.

$$\alpha_d u(d) + u'(d) = \gamma_d, \quad \alpha_e u(e) + u'(e) = \gamma_e$$

heißen Randbedingungen dritter Art oder Robin¹-Randbedingungen. Dirichlet-Randbedingungen sind

- in Anwendungen am wichtigsten,
- vom Standpunkt der Analysis am schwierigsten.

Deshalb wird sich in der Vorlesung auf diese konzentriert werden. □

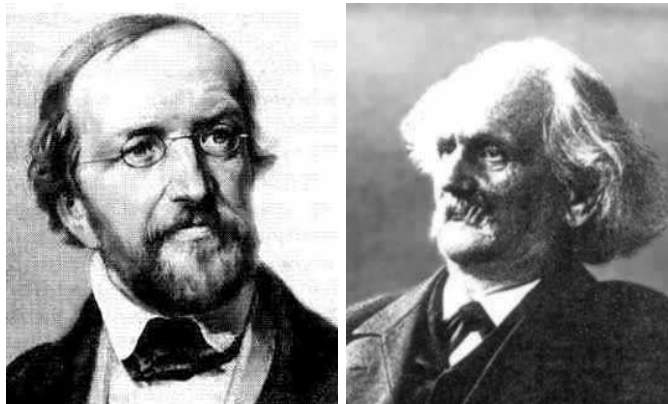


Abbildung 2.2: Links: Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859), rechts: Carl Gottfried Neumann (1832 – 1925).

Bemerkung 2.4 Normierung eines linearen Zwei-Punkt-Randwertproblems.

- Man kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $x \in [0, 1]$ annehmen. Das erreicht man durch die Transformation

$$x \mapsto \frac{x - d}{e - d}.$$

- Man kann ebenfalls ohne Beschränkung der Allgemeinheit homogene Randbedingungen $\gamma_d = \gamma_e = 0$ annehmen, indem man von $u(x)$ eine glatte Funktion $\psi(x)$, welche die ursprünglichen Randbedingungen erfüllt, subtrahiert. Sind beispielsweise Dirichlet-Randbedingungen

$$u(d) = \gamma_d, \quad u(e) = \gamma_e,$$

gegeben, dann setzt man

$$\psi(x) = \gamma_d \frac{x - e}{d - e} + \gamma_e \frac{x - d}{e - d}$$

und

$$u^*(x) = u(x) - \psi(x).$$

Dann ist $u^*(x)$ die Lösung eines linearen Zwei-Punkt-Randwertproblems mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen.

¹Victor Gustave Robin (1855 – 1897)

□

Definition 2.5 Modellproblem. Das Modellproblem besitzt die Gestalt

$$Lu := -\varepsilon u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x) \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad (2.3)$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (2.4)$$

Hierbei gelten $b, c, f \in C([0, 1])$, $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. □

Bemerkung 2.6 Differentialoperator. In (2.3) bezeichnet L einen Differentialoperator. Unter einem Operator versteht man eine Abbildung zwischen zwei (Funktionen-)Räumen. Insoweit ist der Begriff des Operators synonym zum Begriff der Abbildung. Ein linearer Operator ist eine lineare Abbildung A auf einem linearen Raum X , so dass

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha Au + \beta Av$$

für alle Skalare α, β und alle $u, v \in X$ ist. Ein Differentialoperator ist ein Operator, der, angewandt auf geeignete Funktionen, Ableitungen enthält. Zur vollständigen Definition eines Operators ist dessen Definitionsbereich anzugeben. □

Beispiel 2.7 Standard-Beispiel. Das Randwertproblem

$$-\varepsilon u'' + u' = 1 \quad \text{auf } (0, 1), \quad u(0) = u(1) = 0$$

besitzt die Lösung (vorrechnen)

$$u(x) = x - \frac{\exp\left(-\frac{1-x}{\varepsilon}\right) - \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)}.$$

Je kleiner der Parameter ε ist, umso steiler wird die Lösung in der Nähe des rechten Randes, siehe Abbildung 2.3. Diesen Teil der Lösung nennt man Grenzschicht. Solche starken Änderungen der Lösung in einem sehr kleinen Bereich führen zu Schwierigkeiten bei der numerischen Approximation der Lösung.

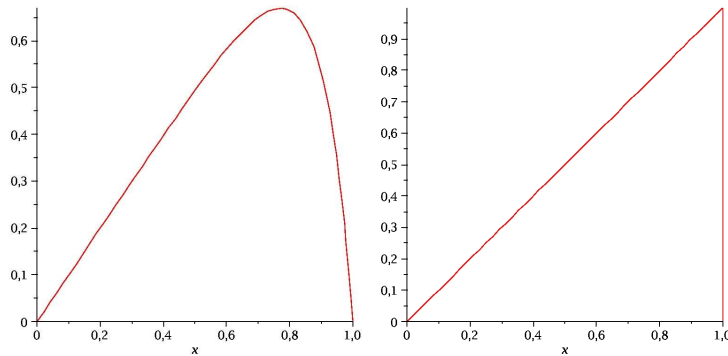


Abbildung 2.3: Lösung für $\varepsilon = 0.1$ links und $\varepsilon = 0.0001$ rechts.

□

Bemerkung 2.8 Transformation des Modellproblems auf ein symmetrisches Problem. Sei $b(x)$ hinreichend glatt. Definiert man

$$\tilde{u}(x) := u(x) \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^x b(\xi) d\xi\right), \quad x \in [0, 1],$$

so kann man (2.3), (2.4) in das symmetrische Problem

$$-\varepsilon \tilde{u}''(x) + \tilde{c}(x)\tilde{u}(x) = \tilde{f}(x), \quad x \in (0, 1), \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0,$$

transformieren, wobei

$$\tilde{c}(x) := \frac{1}{4\varepsilon}b^2(x) - \frac{1}{2}b'(x) + c(x), \quad \tilde{f}(x) := f(x) \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^x b(\xi) d\xi\right),$$

sind. *Übungsaufgabe* □

Definition 2.9 Reduziertes Problem, reduzierte Lösung. Das reduzierte Problem erhält man, indem man formal $\varepsilon = 0$ setzt

$$L_0 u_0 := b(x)u_0' + c(x)u_0 = f(x), \quad \text{für } x \in (0, 1).$$

Die Randbedingung muss immer dort gesetzt werden, wo die Konvektion herkommt, das heißt, wo Einströmungen sind. Im Fall $b(x) > 0$ für alle $x \in [0, 1]$, besitzt dieses Problem also die Randbedingung

$$u_0(0) = 0,$$

im Fall $b(x) < 0$ für alle $x \in [0, 1]$ die Randbedingung

$$u_0(1) = 0.$$

Die Lösung des reduzierten Problems wird reduzierte Lösung genannt. □

Beispiel 2.10 Reduziertes Problem zu Beispiel 2.7. Das reduzierte Problem zu Beispiel 2.7 lautet

$$u_0' = 1 \quad \text{auf } (0, 1), \quad u_0(0) = 0.$$

Seine Lösung ist $u_0(x) = x$.

Damit setzt sich die Lösung des nicht reduzierten Problems aus Beispiel 2.7 aus der Lösung des reduzierten Problems zusammen und einem Anteil, der dafür sorgt, dass die zweite Randbedingung erfüllt wird. □

2.2 Lösungsverhalten

Bemerkung 2.11 Das Modellproblem. Für die Untersuchung der Lösbarkeit des Randwertproblems (2.3), (2.4) spielt die Größe von $\varepsilon > 0$ keine Rolle. Nach Division durch ε und Umbenennung der Daten betrachtet man das Problem

$$Lu := -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad \text{für } x \in (0, 1), \quad (2.5)$$

mit den Randbedingungen

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (2.6)$$

□

Definition 2.12 Klassische Lösung. Eine Funktion $u(x)$ wird klassische Lösung von (2.5), (2.6) genannt, falls

- $u \in C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$,
- $u(x)$ erfüllt die Gleichung (2.5) identisch,
- $u(x)$ genügt den Randbedingungen (2.6).

□

2.2.1 Betrachtung der Differentialgleichung (2.5)

Eine klassische Lösung von (2.5) muss die ersten beiden Eigenschaften der obigen Definition besitzen.

Definition 2.13 Linear unabhängige Funktionen. Zwei Funktionen $u_1(x)$ und $u_2(x)$ heißen im Intervall (a, b) linear unabhängig, wenn aus

$$c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in (a, b)$$

folgt, dass $c_1 = c_2 = 0$ ist. Sie heißen linear abhängig, wenn sie nicht linear unabhängig sind. \square

Bemerkung 2.14 Wronski–Determinante. Sind zwei in (a, b) linear abhängige Funktionen in (a, b) stetig differenzierbar, so folgt aus der Bedingung für die lineare Abhängigkeit auch, dass

$$c_1 u_1'(x) + c_2 u_2'(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in (a, b).$$

Demzufolge sind mit $u_1(x), u_2(x)$ auch $u_1'(x), u_2'(x)$ linear abhängig. Das bedeutet, dass das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

eine nichttriviale Lösung besitzt. Es folgt, dass die sogenannte Wronski–Determinante

$$W(x) := \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix}$$

für alle $x \in (a, b)$ gleich Null sein muss. Die Umkehrung gilt allerdings nicht: die Wronski–Determinante kann für alle $x \in (a, b)$ verschwinden, auch wenn zwei Funktionen linear unabhängig sind. Ein Beispiel dazu findet man in [Emm04]. \square



Abbildung 2.4: Links: Joseph Marie Wronski (1758 – 1853), rechts: Joseph Liouville (1809 – 1882).

Lemma 2.15 Lineare Unabhängigkeit zweier Lösungen der homogenen Differentialgleichung. Sei $x_0 \in (0, 1)$ beliebig gewählt. Zwei in $(0, 1)$ gegebene klassische Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit stetigen Koeffizienten sind genau dann linear unabhängig, wenn die zugehörige Wronski-Determinante an der Stelle x_0 ungleich Null ist.

Beweis: Der Beweis ist an sich aus Vorlesungen über gewöhnliche Differentialgleichungen bekannt.

i) $W(x_0) \neq 0 \implies$ lineare Unabhängigkeit. Seien $u_1(x)$ und $u_2(x)$ klassische Lösungen von

$$-u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = 0, \quad x \in (0, 1),$$

wobei $b, c \in C(0, 1)$ sind. Für die Wronski-Determinante gilt dann mit Produktregel

$$\begin{aligned} W'(x) &= (u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x))' \\ &= u_1'(x)u_2'(x) + u_1(x)u_2''(x) - u_1''(x)u_2(x) - u_1'(x)u_2'(x) \\ &= u_1(x)u_2''(x) - u_1''(x)u_2(x) \\ &= u_1(x)(b(x)u_2'(x) + c(x)u_2(x)) - u_2(x)(b(x)u_1'(x) + c(x)u_1(x)) \\ &= b(x)(u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)) + c(x)(u_1(x)u_2(x) - u_1(x)u_2(x)) \\ &= b(x)W(x). \end{aligned}$$

Mithin löst die Wronski-Determinante die homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = b(x)y(x).$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist durch die die Liouvillesche Formel gegeben. Angewandt auf die Differentialgleichung für $W(x)$ gilt dann für jedes $x_0 \in (0, 1)$

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(\int_{x_0}^x b(\xi) d\xi\right), \quad x \in (0, 1).$$

Da die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt, ist die Wronski-Determinante genau dann für alle $x \in (0, 1)$ gleich Null beziehungsweise ungleich Null, wenn sie an einer beliebigen Stelle $x_0 \in (0, 1)$ gleich Null beziehungsweise ungleich Null ist. Insbesondere gilt im Fall $W(x_0) \neq 0$ nach Bemerkung 2.14, dass $u_1(x)$ und $u_2(x)$ nicht linear abhängig sind.

ii) lineare Unabhängigkeit $\implies W(x_0) \neq 0$. Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen, $u_1(x)$ und $u_2(x)$ seien zwei linear unabhängige Lösungen und die Wronski-Determinante verschwinde in $x_0 \in (0, 1)$. Nach Teil i) verschwindet sie dann im gesamten Intervall $(0, 1)$. Dann gibt es eine nichttriviale Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Betrachte die Funktion

$$v(x) := c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x).$$

Insbesondere gelten dann $v(x_0) = v'(x_0) = 0$. Wegen der Linearität genügt $v(x)$ ebenfalls der Differentialgleichung. Somit löst $v(x)$ das Anfangswertproblem

$$-v''(x) + b(x)v'(x) + c(x)v(x) = 0, \quad x \in (x_0, 1), \quad v(x_0) = v'(x_0) = 0$$

für jedes $x_0 \in (0, 1)$. Mit dem Satz von Picard-Lindelöf zeigt man, dass dieses Anfangswertproblem nur die triviale Lösung besitzt. Also ist $v(x) = 0$ für alle $x \in (0, 1)$. Dies widerspricht jedoch der linearen Unabhängigkeit von $u_1(x)$ und $u_2(x)$. ■

Satz 2.16 Superpositionsprinzip. Betrachte die homogene, lineare Differentialgleichung

$$-u'' + b(x)u' + c(x)u = 0, \quad x \in (0, 1),$$

mit Koeffizienten $b, c \in C([0, 1])$. Dann gibt es zwei linear unabhängige Lösungen in $C^2([0, 1])$ und jede klassische Lösung ist als Linearkombination dieser darstellbar.

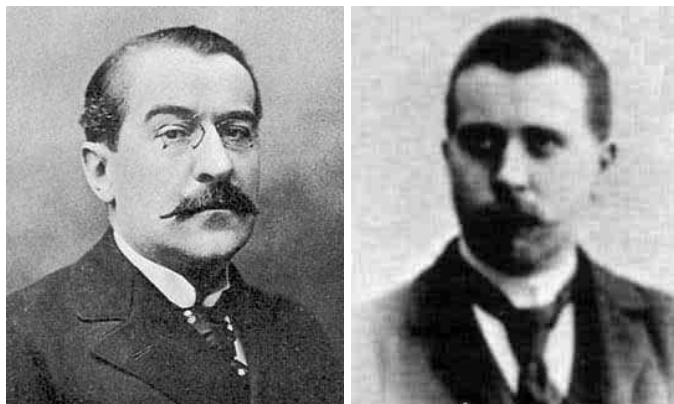


Abbildung 2.5: Links: Charles Emile Picard (1856 – 1941), rechts: Ernst Leonard Lindelöf (1870 – 1946).

Beweis: Der Beweis ist an sich aus Vorlesungen über gewöhnliche Differentialgleichungen bekannt.

i) *Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems.* Man kann die Differentialgleichung zweiter Ordnung (2.5) als äquivalentes System erster Ordnung schreiben

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c(x) & b(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ u'(x) \end{pmatrix}.$$

Nach dem Satz von Picard–Lindelöf gibt es zu vorgegebenen Anfangsbedingungen $u(x_0)$, $u'(x_0)$, $x_0 \in (0, 1)$, eine eindeutig bestimmte Lösung $(u(x), u'(x))$ des Anfangswertproblems in $[0, 1]$. Jede Komponente der Lösung liegt in $C^1([0, 1])$, woraus $u \in C^2([0, 1])$ folgt.

ii) *Existenz von zwei linear unabhängigen Lösungen.* Seien $u_1(x)$ die Lösung zu den Anfangswerten $u(x_0) = 1$, $u'(x_0) = 0$ und $u_2(x)$ zu den Anfangswerten $u(x_0) = 0$, $u'(x_0) = 1$. Für die Wronski–Determinante gilt

$$W(x_0) = u_1(x_0)u_2'(x_0) - u_1'(x_0)u_2(x_0) = 1.$$

Nach Lemma 2.15 sind $u_1(x)$ und $u_2(x)$ linear unabhängig.

iii) *Darstellung jeder klassischen Lösung als Linearkombination.* Jede Linearkombination

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

ist wieder Lösung der Differentialgleichung. Betrachte eine Funktion der Gestalt

$$u(x) = u(x_0)u_1(x) + u'(x_0)u_2(x), \quad x \in [a, b], \quad u(x_0), u'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

Diese Funktion erfüllt das Anfangswertproblem zu den Anfangswerten $u(x_0), u'(x_0)$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems folgt, dass jede Lösung der Differentialgleichung in dieser Gestalt dargestellt werden kann. ■

Satz 2.17 Klassische Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. *Betrachte die inhomogene, lineare Differentialgleichung*

$$-u'' + b(x)u' + c(x)u = f(x), \quad x \in (0, 1),$$

mit $b, c, f \in C([0, 1])$. Dann gibt es eine klassische Lösung $u_p(x)$, die sogenannte partikuläre Lösung, und jede klassische Lösung ist darstellbar als

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + u_p(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

wobei $\{u_1(x), u_2(x)\}$ ein System von zwei linear unabhängigen Lösungen (Fundamentalsystem) der zugehörigen homogenen Gleichung ist. Es gilt $u \in C^2([0, 1])$.

Beweis: Mit dem globalen Existenz- und Eindeigkeitsatz von Picard–Lindelöf, Übungsaufgabe. ■

2.2.2 Betrachtung des Randwertproblems (2.5), (2.6)

Beispiel 2.18 Nichteindeutigkeit der Lösung eines Dirichlet–Randwertproblems. Betrachte die Differentialgleichung

$$-u''(x) - u(x) = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser homogenen, linearen Differentialgleichung lautet

$$u(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Seien die Randbedingungen

$$u(0) = u(\pi/2) = 1$$

gegeben, dann lautet die eindeutig bestimmte Lösung $u(x) = \cos x + \sin x$.

- Sind die Randbedingungen

$$u(0) = u(\pi) = 1$$

gegeben, dann besitzt das Randwertproblem keine Lösung, da gleichzeitig $c_1 = 1$ als auch $c_1 = -1$ gelten müssten.

- Seien die Randbedingungen

$$u(0) = 1, \quad u(\pi) = -1$$

vorgelegt, dann gibt es unendlich viele Lösungen, denn es folgt aus den Randbedingungen lediglich $c_1 = 1$. Der Wert c_2 kann beliebig gewählt werden.

Dieses Beispiel zeigt, dass selbst in einfachen Fällen keine eindeutige Lösung des Randwertproblems (2.5), (2.6) existieren muss. Es wird sich zeigen, dass die Koeffizientenfunktionen bestimmte Bedingungen erfüllen müssen, damit diese Eigenschaft gegeben ist. □

Satz 2.19 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Modellproblems mit homogener rechter Seite. Gegeben sei das Randwertproblem (2.5), (2.6) mit $b \in C^1([0, 1])$, $c \in C([0, 1])$ und $f(x) \equiv 0$. Gilt für alle $x \in (0, 1)$

$$\tilde{c}(x) := \frac{1}{4}b^2(x) - \frac{1}{2}b'(x) + c(x) \geq 0, \quad (2.7)$$

so besitzt das Problem (2.5), (2.6) nur die triviale Lösung.

Beweis: Zunächst ist offensichtlich, dass $u(x) \equiv 0$ eine Lösung des gestellten Problems ist.

Angenommen, $u(x) \not\equiv 0$ sei eine weitere klassische Lösung. Nach Satz 2.17 gilt $u \in C^2([0, 1])$. Mit der Transformation von Bemerkung 2.8 erhält man das Problem

$$-\tilde{u}''(x) + \tilde{c}(x)\tilde{u}(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad \tilde{u}(0) = \tilde{u}(1) = 0.$$

Eine Lösung dieses Problems ist $\tilde{u}(x) \equiv 0$. Sei $\tilde{u}(x)$ eine weitere Lösung. Multipliziere nun die Gleichung mit dieser Lösung und integriere partiell. Das führt auf

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 (-\tilde{u}''(x)\tilde{u}(x) + \tilde{c}(x)\tilde{u}^2(x)) \, dx \\ &= -\tilde{u}''(1)\tilde{u}(1) + \tilde{u}''(0)\tilde{u}(0) + \int_0^1 \left((\tilde{u}'(x))^2 + \tilde{c}(x)\tilde{u}^2(x) \right) \, dx \\ &= \int_0^1 \left((\tilde{u}'(x))^2 + \tilde{c}(x)\tilde{u}^2(x) \right) \, dx, \end{aligned}$$

da $\tilde{u}(x)$ an den Randpunkten verschwindet. Wegen $\tilde{c}(x) \geq 0$ ist der Integrand nichtnegativ, also muss er verschwinden. Daraus folgt insbesondere $(\tilde{u}'(x))^2 = 0$, also $\tilde{u}'(x) = 0$, woraus $\tilde{u}(x)$ gleich konstant folgt. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{u}(x)$ und wegen der Randbedingungen folgt $\tilde{u}(x) \equiv 0$. Daraus ergibt sich aber auch

$$u(x) = \tilde{u}(x) \exp\left(\frac{1}{2} \int_0^x b(\xi) d\xi\right) \equiv 0,$$

im Widerspruch zur Annahme. ■

Bemerkung 2.20 Konstante Koeffizienten. Im Spezialfall konstanter Koeffizienten reduziert sich Bedingung (2.7) auf

$$D := \frac{b^2}{4} + c \geq 0.$$

Auch für den Fall $D < 0$ kann man das Lösungsverhalten des Randwertproblems genau beschreiben, Übungsaufgabe. □

Bemerkung 2.21 Anderes Kriterium zur Eindeutigkeit der Lösung des vollhomogenen Randwertproblem. Betrachte das Randwertproblem (2.5), (2.6) mit homogener rechter Seite. Seien $u_1(x), u_2(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen der Gleichung und bezeichne

$$R := \det \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung lautet

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x).$$

Die Koeffizienten bestimmen sich aus den Randbedingungen

$$0 = c_1 u_1(0) + c_2 u_2(0), \quad 0 = c_1 u_1(1) + c_2 u_2(1),$$

was zur Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

äquivalent ist. Diese Lösung ist genau dann eindeutig ($c_1 = c_2 = 0$), falls $R \neq 0$ gilt. Genau in diesem Fall besitzt das vollhomogene Randwertproblem nur die triviale Lösung. □

Bemerkung 2.22 Zum inhomogenen Randwertproblem. Betrachte nun das Randwertproblem (2.5), (2.6) mit inhomogener rechter Seite. Seien $u_1(x), u_2(x)$ zwei linear unabhängige Lösungen der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und

$$A(x) := \det \begin{pmatrix} u_1(0) & u_2(0) \\ u_1(x) & u_2(x) \end{pmatrix}, \quad B(x) := \det \begin{pmatrix} u_1(x) & u_2(x) \\ u_1(1) & u_2(1) \end{pmatrix}.$$

Für die Betrachtung des Randwertproblems mit inhomogener rechter Seite, wird der Begriff der Greenschen Funktion wiederholt. □

Definition 2.23 Green²sche Funktion. Die Funktion $\Gamma(x, \xi)$ heißt Greensche Funktion für das homogene Randwertproblem $Lu = 0$, $u(0) = u(1) = 0$, wenn:

²Georg Green (1793 – 1841)

1. $\Gamma(x, \xi)$ ist stetig auf dem Quadrat $Q := \{(x, \xi) : x, \xi \in [0, 1]\}$.
2. In jedem der Dreiecke

$$Q_1 := \{(x, \xi) : 0 \leq \xi \leq x \leq 1\}, \quad Q_2 := \{(x, \xi) : 0 \leq x \leq \xi \leq 1\}$$

existieren stetige partielle Ableitungen $\Gamma_x(x, \xi)$ und $\Gamma_{xx}(x, \xi)$.

3. Bei festem $\xi \in I = (0, 1)$ ist $\Gamma(x, \xi)$ als Funktion von x eine Lösung von $L\Gamma = 0$ für $x \neq \xi, x \in I$.
4. Auf der Diagonalen $x = \xi$ besitzt die erste Ableitung eine Sprung der Form

$$\Gamma_x(x+0, x) - \Gamma_x(x-0, x) = \frac{1}{p(x)}, \quad 0 < x < 1,$$

mit

$$p(x) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x b(s) ds\right).$$

5. $\Gamma(0, \xi) = \Gamma(1, \xi) = 0$ für alle $\xi \in (0, 1)$.

□

Satz 2.24 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Modellproblems mit inhomogener rechter Seite. *Betrachte das Modellproblem (2.5), (2.6) mit $b, c, f \in C([0, 1])$. Besitzt das zugehörige Randwertproblem für die Gleichung mit homogener rechter Seite nur die triviale Lösung, so besitzt das Randwertproblem (2.5), (2.6) genau eine klassische Lösung. Diese hat die Gestalt*

$$u(x) = \int_0^1 \Gamma(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

mit der Greenschen Funktion

$$\Gamma(x, \xi) = \frac{1}{R W(\xi)} \begin{cases} A(\xi)B(x) & \text{für } 0 \leq \xi \leq x \leq 1, \\ A(x)B(\xi) & \text{für } 0 \leq x \leq \xi \leq 1. \end{cases}$$

Beweis: Dass $\Gamma(x, \xi)$ eine Greensche Funktion ist, rechnet man direkt nach. Die Existenz einer Lösung zeigt man, indem man nachrechnet, dass $u(x)$ Lösung des Randwertproblems (2.5), (2.6) ist. Die Eindeutigkeit folgt schließlich analog zu Bemerkung 2.21, indem man zeigt, dass sich die freien Parameter der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung unter den gegebenen Voraussetzungen eindeutig bestimmen lassen. ■

Dass das vollhomogene Problem nur die triviale Lösung besitzt, ist beispielsweise gegeben, wenn (2.7) erfüllt ist. Die Umkehrung des vorstehenden Satzes gilt auch.

Satz 2.25 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Modellproblems mit homogener rechter Seite. *Besitzt das inhomogene Randwertproblem (2.5), (2.6) für ein $f(x) \in C([0, 1])$ genau eine klassische Lösung, so besitzt das zugehörige Randwertproblem mit homogener rechter Seite nur die triviale Lösung.*

Beweis: Sei $u(x)$ die eindeutige klassische Lösung des inhomogenen Randwertproblems für $f(x)$. Sei $u_h(x)$ eine nichttriviale Lösung des vollhomogenen Randwertproblems, dann folgt auf Grund der Linearität des Problems, dass dann $u(x) + u_h(x)$ eine klassische Lösung des Randwertproblems zum selben $f(x)$ ist, im Widerspruch zur vorausgesetzten Einzigkeit dieser Lösung. ■

Folgerung 2.26 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Modellproblems mit beliebigen Dirichlet–Randdaten. *Betrachte das Modellproblem (2.5) mit $b \in C^1([0, 1])$, $c, f \in C([0, 1])$ und mit den Dirichlet–Randdaten $u(0) = a$, $u(1) = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Gilt für alle $x \in (0, 1)$ die Beziehung (2.7), dann existiert genau eine klassische Lösung.*

Beweis: Inhomogene Dirichlet–Randdaten können in die rechte Seite transformiert werden, siehe Bemerkung 2.4. Diese Transformation ist zweimal stetig differenzierbar und sie kann so erfolgen, dass die neue rechte Seite stetig in $[0, 1]$ ist. Für das so erhaltene Problem mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen kann man die obigen Aussagen anwenden. Nach Satz 2.19 besitzt das vollhomogene Problem nur die triviale Lösung. Aus Satz 2.24 folgt, dass es genau eine klassische Lösung gibt. Da die Rücktransformation zweimal stetig differenzierbar ist, existiert damit genau eine klassische Lösung für das Problem mit inhomogenen Dirichlet–Randbedingungen. ■

Bemerkung 2.27 Es gibt auch andere hinreichende Bedingungen als (2.7) dafür, dass das vollhomogene Problem nur die triviale Lösung besitzt, siehe Folgerung 2.35. □

2.3 Maximumprinzip und Stabilität

Bemerkung 2.28 Im Folgenden sei L der durch

$$(Lu)(x) := -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x), \quad x \in (0, 1)$$

definierte lineare Differentialoperator, der für $b, c \in C([0, 1])$ offenbar $C^2(0, 1)$ in $C(0, 1)$ abbildet. □

Lemma 2.29 Seien $b \in C([0, 1])$ und $c(x) = 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Dann gilt für jedes $u \in C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$

- i) aus $(Lu)(x) \leq 0$ für alle $x \in (0, 1)$ folgt $u(x) \leq \max\{u(0), u(1)\}$ für $x \in [0, 1]$,
- ii) aus $(Lu)(x) \geq 0$ für alle $x \in (0, 1)$ folgt $u(x) \geq \min\{u(0), u(1)\}$ für $x \in [0, 1]$.

Beweis: Es braucht nur i) gezeigt zu werden. Die Aussage ii) ergibt sich dann, wenn $u(x)$ durch $-u(x)$ ersetzt wird.

Es wird zuerst gezeigt, dass aus der schärferen Voraussetzung $(Lu)(x) < 0$ auf $(0, 1)$ die Behauptung folgt. Angenommen, die Funktion $u(x)$ nimmt ihr Maximum nicht am Rand, sondern im Inneren des Intervalls an. Dann gibt es ein $x_0 \in (0, 1)$, mit $u'(x_0) = 0$ (lokales Extremum) und $u''(x_0) \leq 0$ (lokales Maximum). Es folgt

$$-u''(x_0) + b(x_0)u'(x_0) = -u''(x_0) \geq 0,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht.

Nun wird i) gezeigt. Hierzu sei für $\delta, \lambda > 0$

$$w(x) = \delta e^{\lambda x}, \quad x \in [0, 1].$$

Ist λ hinreichend groß, $\lambda > \max_{x \in [0, 1]} b(x)$, so gilt für alle $x \in (0, 1)$

$$(Lw)(x) = -\lambda^2 w(x) + b(x)\lambda w(x) = -\lambda(\lambda - b(x))w(x) < 0.$$

Mit der Linearität des Differentialoperators folgt

$$(L(u + w))(x) = (Lu)(x) + (Lw)(x) < 0.$$

Nach dem ersten Teil des Beweises gilt

$$u(x) + w(x) \leq \max\{u(0) + w(0), u(1) + w(1)\}.$$

Für $\delta \rightarrow 0$ ergibt sich die Behauptung. ■

Satz 2.30 Maximumprinzip. Seien $b, c \in C([0, 1])$ und $c(x)$ auf $[0, 1]$ nichtnegativ. Dann gilt für jedes $u \in C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$

- i) aus $(Lu)(x) \leq 0$ für alle $x \in (0, 1)$ folgt $u(x) \leq \max\{0, u(0), u(1)\}$ für $x \in [0, 1]$,
 ii) aus $(Lu)(x) \geq 0$ für alle $x \in (0, 1)$ folgt $u(x) \geq \min\{0, u(0), u(1)\}$ für $x \in [0, 1]$.

Beweis: Wiederum ergibt sich die zweite Aussage aus der ersten, wenn man dort $u(x)$ durch $-u(x)$ ersetzt.

Da $u(x)$ in $[0, 1]$ stetig ist, ist die Menge

$$\mathcal{M}^+ := \{x \in (0, 1) : u(x) > 0\}$$

entweder leer oder die Vereinigung offener Teilintervalle von $(0, 1)$, Analysis I. Sei $\mathcal{M}^+ = \emptyset$, sei also $u(x)$ in $(0, 1)$ nichtpositiv. Dann ist die Behauptung trivialerweise erfüllt.

Sei $\mathcal{M}^+ = (0, 1)$. Dann gilt für $x \in (0, 1)$

$$-u''(x) + b(x)u'(x) \leq -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = (Lu)(x) \leq 0.$$

Nach Lemma 2.29 folgt

$$u(x) \leq \max\{u(0), u(1)\},$$

was die Behauptung auch in diesem Falle zeigt.

Sei nun $\emptyset \neq \mathcal{M}^+ \neq (0, 1)$. Es wird gezeigt, dass \mathcal{M}^+ an 0 oder 1 heranreichen muss. Sei $(a_0, b_0) \subseteq \mathcal{M}^+$. Gelten $a_0 \neq 0$ und $u(a_0) > 0$, so folgt, wegen der Stetigkeit von $u(x)$, dass entweder $u(0) > 0$ oder ein $0 \leq a_1 < a_0$ existiert mit $u(a_1) = 0$. Analoges gilt für b_0 . Man kann daher $a_0 = 0$ oder $u(a_0) = 0$ sowie $b_0 = 1$ oder $u(b_0) = 0$ annehmen. Das heißt man wählt \mathcal{M}^+ größtmöglich. Nach der Voraussetzung gilt für alle $x \in (a_0, b_0)$

$$(Lu)(x) \leq 0 \implies -u''(x) + b(x)u'(x) \leq -c(x)u(x) \leq 0.$$

Damit kann man wieder Lemma 2.29 anwenden. Es folgt also für alle $x \in (a_0, b_0)$

$$0 < u(x) \leq \max\{u(a_0), u(b_0)\}. \quad (2.8)$$

Offenbar kann nicht zugleich $u(a_0) = u(b_0) = 0$ gelten, denn dies würde dieser Relation widersprechen. Der Fall $a_0 = 0, b_0 = 1$ wurde bereits betrachtet. Es bleiben die Fälle $a_0 = 0$ und $u(b_0) = 0$ sowie $u(a_0) = 0$ und $b_0 = 1$.

Damit ist gezeigt: Ist die Menge \mathcal{M}^+ nicht leer, so gibt es Zahlen $\hat{a}, \hat{b} \in [0, 1]$ mit $\hat{a} \leq \hat{b}$, so dass

$$\mathcal{M}^+ = (0, \hat{a}) \cup (\hat{b}, 1),$$

wobei $u(\hat{a}) = 0$ wenn $\hat{a} \neq 0$, und $u(\hat{b}) = 0$, wenn $\hat{b} \neq 1$. Mit (2.8) gilt für $x \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} u(x) &\leq \max \left\{ \max_{x \in (0, \hat{a})} u(x), \max_{x \in (\hat{b}, 1)} u(x), 0 \right\} \\ &\leq \max \left\{ \max\{u(0), u(\hat{a})\}, \max\{u(\hat{b}), u(1)\}, 0 \right\} \\ &= \max\{0, u(0), u(1)\}. \end{aligned}$$

■

Bemerkung 2.31 Physikalische Interpretation. Das Modellproblem (2.5), (2.6) lässt sich schreiben als

$$(Lu)(x) = f(x), \quad u(0) = u_0, u(1) = u_1.$$

Ist $(Lu)(x) \leq 0$ für alle $x \in (0, 1)$, das heißt $f(x) \leq 0$ für alle $x \in (0, 1)$, so gibt es in $(0, 1)$ keine Quellen von $u(x)$. Das Maximumprinzip besagt dann, dass falls wenigstens einer der Randwerte positiv ist, $u(x)$ seinen größten Wert auf dem Rand annimmt. Ist $u(x)$ beispielsweise eine Konzentration und gibt es im Gebiet keine Konzentrationsquellen, dann existiert im Gebiet kein lokales Konzentrationsmaximum, welches höher als die Konzentration am Rand ist. □

Folgerung 2.32 Inverse Monotonie, Isotonie, Vergleichsprinzip. *Unter den Voraussetzungen von Satz 2.30 folgt für zwei Funktionen $u, v \in C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$ mit $u(0) \leq v(0)$ und $u(1) \leq v(1)$ aus $(Lu)(x) \leq (Lv)(x)$ für $x \in (0, 1)$, dass $u(x) \leq v(x)$ für $x \in [0, 1]$.*

Beweis: Satz 2.30 ist auf die Differenz $(u - v)(x)$ anzuwenden. ■

Mit Hilfe des Maximumprinzips kann man nun eine Stabilitätsabschätzung für Lösungen des inhomogenen Randwertproblems beweisen, welche die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten zeigt.

Satz 2.33 Stabilität der Lösung und stetige Abhängigkeit von den Daten. *Vorgelegt sei das Randwertproblem (2.5), (2.6), mit $b, c, f \in C([0, 1])$. Ist $c(x)$ auf $[0, 1]$ nichtnegativ, so gilt für jede klassische Lösung $u(x)$ die Abschätzung*

$$\|u\|_{C([0,1])} \leq \Lambda \|f\|_{C([0,1])},$$

wobei die Konstante $\Lambda > 0$ von $b(x), c(x)$ abhängt, aber nicht von $f(x)$.

Beweis: Für ein noch zu spezifizierendes $\lambda > 0$ setzt man

$$w(x) := Be^{\lambda x} - A, \quad x \in (0, 1),$$

mit

$$A := \Lambda B, \quad B := \|f\|_{C([0,1])}, \quad \Lambda := e^\lambda - 1 > 0.$$

Dann gilt für $x \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} (Lw)(x) &= -(\lambda^2 - \lambda b(x) - c(x)) Be^{\lambda x} - Ac(x) \\ &\leq -(\lambda^2 - \lambda b(x) - c(x)) Be^{\lambda x}. \end{aligned}$$

Nun wählt man λ derart, dass $(\lambda^2 - \lambda b(x) - c(x)) e^{\lambda x} \geq 1$. Diese Relation ist erfüllt, wenn λ groß genug ist, etwa

$$\lambda \geq \max_{x \in [0,1]} \left(\frac{b(x)}{2} + \sqrt{\frac{b^2(x)}{4} + c(x) + 1} \right),$$

da $e^{\lambda x} \geq 1$. Dann gilt für alle $x \in (0, 1)$

$$(Lw)(x) \leq -B = -\|f\|_{C([0,1])}.$$

Es folgt für alle $x \in (0, 1)$ mit Hilfe der Normdefinition im Raum der stetigen Funktionen

$$(L(\pm u + w))(x) = \pm f(x) + (Lw)(x) \leq |f(x)| - \|f\|_{C([0,1])} \leq 0.$$

Nach dem Maximumprinzip gilt

$$\pm u(x) + w(x) \leq \max\{0, \pm u(0) + w(0), \pm u(1) + w(1)\} = \max\{0, w(0), w(1)\}.$$

Damit folgt für alle $x \in (0, 1)$

$$\pm u(x) \leq \max\{0, w(0), w(1)\} - w(x).$$

Aus $e^{\lambda x} \geq 1$ folgt

$$w(x) \geq B - A = w(0), \quad w(1) = Be^\lambda - A,$$

also

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \max\{0, w(0), w(1)\} - w(x) \leq \max\{0, B - A, Be^\lambda - A\} + A - B \\ &= \max\{A - B, 0, B(e^\lambda - 1)\} = \max\{A - B, 0, \Lambda B\} = \max\{A - B, 0, A\} = A, \end{aligned}$$

was die Behauptung war. ■

Bemerkung 2.34 Nichtnormiertes Problem. Für das nichtnormierte Problem (2.1), (2.2) mit Dirichlet-Randbedingungen $u(d) = \alpha$, $u(e) = \beta$ erhält man analog

$$\|u\|_{C([e,d])} \leq \Lambda \|f\|_{C([e,d])} + \max\{|\alpha|, |\beta|\},$$

wobei Λ jetzt auch von $e - d$ abhängen kann, aber nicht von α, β abhängt, [Emm04, Satz 2.5.4], Übungsaufgabe.

Dass diese Abschätzung tatsächlich eine Stabilitätsabschätzung ist, sieht man, wenn man sie auf die Differenz $u(x) - \tilde{u}(x)$ anwendet. Dabei sei $u(x)$ Lösung des exakten Problems und $\tilde{u}(x)$ Lösung eines Problems mit gestörter rechter Seite \tilde{f} oder gestörten Randbedingungen $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$. Aus der Linearität des Problems folgt sofort

$$\|u - \tilde{u}\|_{C([e,d])} \leq \Lambda \|f - \tilde{f}\|_{C([e,d])} + \max\{|\alpha - \tilde{\alpha}|, |\beta - \tilde{\beta}|\}.$$

Das bedeutet, Änderungen der Lösung hängen stetig, in der Norm von $C([e, d])$, von den Daten ab. \square

Folgerung 2.35 Eindeutigkeit der Lösung des homogenen Problems. Gegeben sei das Randwertproblem (2.5), (2.6), mit $b, c \in C([0, 1])$ und $f(x) \equiv 0$. Ist $c(x)$ auf $[0, 1]$ nichtnegativ, so besitzt das Problem nur die triviale Lösung $u(x) \equiv 0$.

Beweis: Das folgt unmittelbar aus der Abschätzung von Satz 2.33, da $\|f\|_{C([0,1])} = 0$ ist. \blacksquare

Bemerkung 2.36 Diese Aussage folgt auch schon aus dem Maximumprinzip, Satz 2.30, weil für ein homogenes Problem beide Teile i) und ii) dieses Satzes gelten und $u(0) = u(1) = 0$ ist. \square

Folgerung 2.37 Eindeutigkeit der Lösung des inhomogenen Problems. Vorgelegt sei das Randwertproblem (2.5), (2.6) mit $b, c, f \in C([0, 1])$. Ist $c(x)$ auf $[0, 1]$ nichtnegativ, so besitzt das Randwertproblem genau eine klassische Lösung.

Beweis: Das folgt unmittelbar aus Folgerung 2.35 und Satz 2.24. \blacksquare

Jetzt wird noch das starke Maximumprinzip eingeführt.

Lemma 2.38 Seien $b, c \in C([0, 1])$, sei $c(x)$ auf $[0, 1]$ nichtnegativ und gelte $u \in C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$. Gilt $(Lu)(x) < 0$ für alle $x \in (0, 1)$, so kann $u(x)$ kein nichtnegatives Maximum im Inneren des Intervalls annehmen.

Beweis: Angenommen, es gäbe ein nichtnegatives inneres Maximum $x_0 \in (0, 1)$. Dann sind $u(x_0) \geq 0$, $u'(x_0) = 0$ und $u''(x_0) \leq 0$. Damit folgt

$$(Lu)(x_0) = -u''(x_0) + b(x_0)u'(x_0) + c(x_0)u(x_0) \geq 0,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. \blacksquare

Satz 2.39 Starkes Maximumprinzip. Seien $b, c \in C([0, 1])$ und sei $c(x)$ auf $[0, 1]$ nichtnegativ. Nimmt $u \in C^2(0, 1) \cap C([0, 1])$ im Inneren des Intervalls ein nichtnegatives Maximum an und gilt $(Lu)(x) \leq 0$ für alle $x \in (0, 1)$, so ist $u(x)$ konstant.

Beweis: Die Funktion $u(x)$ nehme in x_0 ein nichtnegatives lokales Maximum an. Es gilt insbesondere $u(x_0) \geq 0$.

Angenommen, $u(x)$ sei nicht konstant. Dann gibt es ein $x_2 \in (0, 1)$ mit $u(x_2) < u(x_0)$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x_2 > x_0$, der Fall $x_2 < x_0$ kann analog behandelt

werden. Wähle x_2 und $x_1 \in [0, x_0)$ so, dass $u(x)$ in x_0 das größte lokale Maximum bezüglich $[x_1, x_2]$ annimmt. Dieses wird in einem abgeschlossenen Intervall angenommen.

Es sei für $\delta, \lambda > 0$

$$w(x) := \delta \left(e^{\lambda(x-x_0)} - 1 \right), \quad x \in [x_1, x_2].$$

Offenbar gelten

$$w(x) \begin{cases} < 0 & \text{für } x < x_0, \\ = 0 & \text{für } x = x_0, \\ > 0 & \text{für } x > x_0. \end{cases}$$

Nun wählt man λ hinreichend groß, etwa

$$\lambda > \max_{x \in [x_1, x_2]} \left(\frac{b(x)}{2} + \sqrt{\frac{b^2(x)}{4} + c(x)} \right),$$

so dass für alle $x \in (x_1, x_2)$ gilt

$$(Lw)(x) = -(\lambda^2 - \lambda b(x) - c(x)) \delta e^{\lambda(x-x_0)} - c(x)\delta < 0.$$

Dann gilt nach Voraussetzung auch

$$(L(u+w))(x) = (Lu)(x) + (Lw)(x) < 0, \quad x \in (x_1, x_2).$$

Jetzt wird δ so klein gewählt, dass

$$u(x_2) + w(x_2) < u(x_0).$$

$$\begin{aligned} u(x) + w(x) &< u(x_0), \quad \text{für } x \in (x_1, x_0), \\ u(x_0) + w(x_0) &= u(x_0) \geq 0, \\ u(x_2) + w(x_2) &< u(x_0), \end{aligned}$$

nimmt die Funktion $(u+w)(x)$ in (x_1, x_2) ein nichtnegatives Maximum an. Das steht nach Lemma 2.38 im Widerspruch zu $(L(u+w))(x) < 0$. Demzufolge ist die Annahme, dass $u(x)$ nicht konstant ist, falsch. ■

Bemerkung 2.40 Minimumprinzipien. Durch Ersetzung von $u(x)$ mit $-u(x)$ erhält man aus den Maximumprinzipien entsprechende Minimumprinzipien. □