Kapitel 1

Bestapproximation

1.1 Einführung

Bemerkung 1.1 *Motivation.* Seien $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion. Von dieser Funktion sei es im Laufe einer numerischen Berechnung notwendig, Funktionswerte an (vielen) unterschiedlichen Stellen $x \in [a, b]$ zu berechnen, wobei die Stellen vor der Rechnung nicht bekannt sind. Ist $f(x)$ eine „einfache" Funktion, zum Beispiel ein Polynom, bereitet die Berechnung der Funktionswerte keine Schwierigkeiten. Bei Polynomen verwendet man dafür zweckmäßigerweise das Horner-Schema, siehe Anhang A.

Aber schon bei anderen elementaren Funktionen, wie $e^x, \sin(x), \ln(x)$ ist die Berechnung von Funktionswerten für beliebige Argumente x aus dem Definitionsbereich der jeweiligen Funktion schwierig. In diesem Falle ist es zweckmäßig, den gesuchten Funktionswert mit einer vorgegebenen Genauigkeit ε zu approximieren. Dabei ersetzt man die betrachtete Funktion $f(x)$ durch eine Funktion $\varphi(x)$, welche einfacher berechenbar ist (etwa ein Polynom), und deren Werte sich in $[a, b]$ nicht um mehr als ε von den Werten von $f(x)$ unterscheiden.

Zu untersuchende Fragestellungen beinhalten:

- Die Funktion $f(x)$, eine Norm, in der der Fehler berechnet wird, und eine Menge U sind gegeben, wobei $\varphi(x)$ in U gesucht werden soll. Was ist der minimale Wert von ε? Wie kann man ein $\varphi(x)$ berechnen, für welches der minimale Fehler angenommen wird? Ist $\varphi(x)$ eindeutig?
- Die Funktion $f(x)$, eine Norm, in der der Fehler berechnet wird, und ε sind gegeben. Wie muss man U wählen, damit man ein $\varphi(x)$ findet, so dass der Fehler kleiner oder gleich ε ist?

□

Bemerkung 1.2 *Bestapproximation – abstrakte Aufgabenstellung.* Sei V ein normierter Raum reellwertiger Funktionen, welche über $[a, b]$ definiert sind, zum Beispiel $V = C([a, b])$. Gegeben sei $f \in V$. Weiter sei U eine Menge reellwertiger Funktionen über $[a, b]$, welche nur aus „einfach berechenbaren" Funktionen besteht. Sei V so groß gewählt, dass $U \subset V$. Des Weiteren bezeichne $\|\cdot\|$ eine Norm auf V. Dann hat die Aufgabe der Bestapproximation die Form: Finde $u \in U$, so dass

$$\|f - u\| \le \|f - v\| \quad \forall\, v \in U. \tag{1.1}$$

Bei dieser Aufgabenstellung sind die Wahl von U und die Wahl der Norm $\|\cdot\|$ noch frei. □

Definition 1.3 Tschebyscheff-Approximation. Betrachtet man (1.1) für die

Maximumsnorm

$$\|v\|_{C([a,b])} = \|v\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |v(x)|\,, \quad v \in C([a,b]),$$

so spricht man von Tschebyscheff[1]-Approximation. □

Beispiel 1.4 *Tschebyscheff-Approximation.* Seien $[a,b] = [0,\pi]$ und $f(x) = \sin(x)$. Gesucht ist die Tschebyscheff-Approximation in der Menge der konstanten Funktionen über $[a,b]$, $U = P_0([a,b])$. Es sind

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) = 0, \quad \max_{x\in[a,b]} f(x) = 1.$$

Die konstante Funktion, deren maximaler Abstand zu beiden Extremwerten minimal ist, ist $u(x) = 1/2$. Dies ist die Tschebyscheff-Approximation. Dann ist

$$\|\sin(x) - u\|_\infty = \frac{1}{2}.$$

□

Definition 1.5 Der Raum $L^2(a,b)$. Der Raum $L^2(a,b)$ besteht aus allen Funktionen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, welche in (a,b) quadratisch (Lebesgue-) integrierbar sind

$$L^2(a,b) = \left\{ f \ : \ \int_a^b (f(x))^2 \ \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Der Raum ist ausgestattet mit der Norm

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_a^b (f(x))^2 \ \mathrm{d}x \right)^{1/2} = \left(\int_a^b f^2(x) \ \mathrm{d}x \right)^{1/2}. \tag{1.2}$$

□

Beispiel 1.6 *Bestapproximation in $\|\cdot\|_{L^2}$.* Betrachte die gleiche Ausgangssituation wie im Beispiel 1.4. Nun ist aber diejenige konstante Funktion $u \in P_0([a,b])$ gesucht, für die $\|f-u\|_{L^2}$ minimal wird. Diese Norm ist genau dann minimal, wenn das Quadrat der Norm minimal ist. Dies folgt aus der strengen Monotonie der Wurzelfunktion. Mit binomischer Formel und der Eigenschaft, dass u eine Konstante ist, erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^\pi (\sin(x) - u)^2 \ \mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sin^2(x) \ \mathrm{d}x - 2u \int_0^\pi \sin(x) \ \mathrm{d}x + \pi u^2 \\ &= \frac{\pi}{2} - 4u + \pi u^2.\end{aligned}$$

Dies ist eine quadratische Funktion in u, deren Bild (Parabel) nach oben geöffnet ist. Demzufolge besitzt sie ein Minimum, welches man wie üblich berechnet

$$u = \frac{2}{\pi} \approx 0.63661977236758134308,$$

siehe Abbildung 1.1. Man erhält

$$\|\sin(x) - u\|_{L^2} = \left(\int_0^\pi (\sin(x) - u)^2 \ \mathrm{d}x \right)^{1/2} = \left(\frac{\pi^2 - 8}{2\pi} \right)^{1/2} \approx 0.5454876555. \tag{1.3}$$

Der Vergleich mit Beispiel 1.4 zeigt, dass die Wahl unterschiedlicher Normen zu unterschiedlichen Ergebnissen führen kann. □

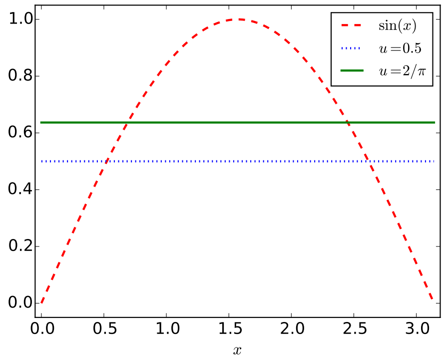

Abbildung 1.1: Beispiel 1.6. Bestapproximation von $\sin(x)$ in $[0,\pi]$: Tschebyscheff-Approximation und Approximation bezüglich $\|\cdot\|_{L^2}$.

Bemerkung 1.7 *Stückweise definierte Funktionen.* In den Beispielen 1.4 und 1.6 wurden Bestapproximierte gesucht, die im gesamten Intervall die gleich Form besitzen. Die zu approximierende Funktion $f(x)$ kann sich aber in unterschiedlichen Teilintervallen von $[a,b]$ unterschiedlich verhalten. Dann ist es zweckmäßig, sie durch eine stückweise definierte Funktion zu approximieren. □

Definition 1.8 Der Raum S_n oder P_1. Sei das Intervall $[a,b]$ durch ein Gitter mit n Teilintervallen (Gitterzellen) zerlegt (trianguliert)

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Dann besteht der Raum S_n aus allen stetigen und stückweise linearen Funktionen (Polygonzügen)

$$S_n = \left\{ f \ : \ f \ \in C([a,b]), f|_{[x_{i-1},x_i]} \text{ ist linear } \forall\, i = 1,\ldots,n \right\},$$

vergleiche Abbildung 1.2. Soll nicht die Anzahl der Gitterzellen sondern die stückweise Linearität des Raumes hervorgehoben werden, so wird er im Allgemeinen mit P_1 bezeichnet. □

Beispiel 1.9 *Approximation in S_2 mit $\|\cdot\|_{L^2}$.* Betrachte wiederum die Situation von Beispiel 1.4. Man kann zeigen, siehe Beispiel 1.40, dass die Bestapproximation durch eine lineare Funktion $\alpha x + \beta$ in $[a,b]$ gegeben ist durch $\alpha = 0, \beta = 2/\pi$. Das bedeutet, die beste lineare Approximation ist gerade die Konstante aus Beispiel 1.6 und der Approximationsfehler ist durch (1.3) gegeben.

Betrachtet man ein Gitter aus zwei Gitterzellen mit $x_1 = \pi/2$ und den Polygonzug

$$p_2 = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{2}{\pi}x, & x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \\ -\dfrac{2}{\pi}x + 2, & x \ \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \end{array} \right. \in S_2,$$

siehe Abbildung 1.3, so erhält man

$$\begin{aligned} & \|\sin(x) - p_2\|_{L^2} \\ = & \left(\int_0^{\pi/2} \left(\sin(x) - \frac{2}{\pi}x\right)^2 \, \mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\sin(x) + \frac{2}{\pi}x - 2\right)^2 \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \end{aligned}$$

[1]Pafnuti Lwowitsch Tschebyscheff (1821 – 1894)

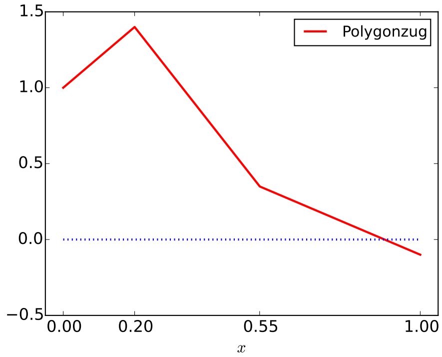

Abbildung 1.2: Funktion aus S_3 bezüglich des Gitters mit den Punkten $\{0, 0.2, 0.55, 1\}$.

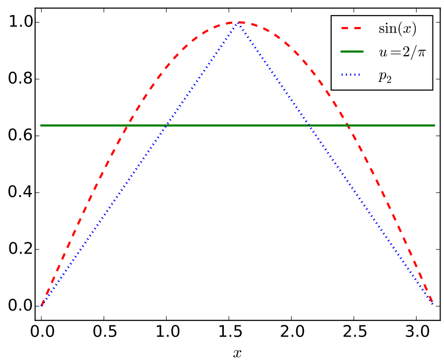

Abbildung 1.3: Beispiel 1.9. Approximation von $\sin(x)$ in $[0, \pi]$: Bestapproximation durch eine konstante (bzw. lineare) Funktion und Approximation durch p_2.

$$= \quad 0.2674224922.$$

Das ist schon nur noch etwa der halbe Fehler im Vergleich zur Bestapproximation mit einer globalen linearen Funktion. Im Raum S_2 ist es jedoch noch nicht der bestmögliche Wert. Dessen Berechnung wird in Beispiel 1.43 erklärt. □

1.2 Bestapproximation in normierten Räumen und Prä-Hilbert-Räumen

Bemerkung 1.10 *Inhalt.* In diesem Abschnitt werden zunächst Aussagen zur Existenz einer Lösung des Problems der Bestapproximierenden und deren Eindeutigkeit im Rahmen von allgemeinen normierten Räumen vorgestellt. (Prä-)Hilbert-Räume sind spezielle normierte Räume, für die man die Bestapproximierende genauer charakterisieren kann. □

Definition 1.11 Normierter Raum. Ein linearer Raum V heißt normiert, wenn es eine Abbildung $\|\cdot\|_V : V \to \mathbb{R}$ gibt, die folgenden Bedingungen genügt:
i) $\|v\|_V \geq 0$ für alle $v \in V$, wobei $\|v\|_V = 0$ genau dann, wenn $v = 0$,
ii) $\|\alpha v\|_V = |\alpha| \, \|v\|_V$ für alle $v \in V$ und für alle $\alpha \in \mathbb{R}$,

iii) Dreiecksungleichung: $\|v_1 + v_2\|_V \le \|v_1\|_V + \|v_2\|_V$ für alle $v_1, v_2 \in V$.

$\square$

Bemerkung 1.12 *Bestapproximations-Aufgabe.* Die allgemeine Aufgabe der Bestapproximation (1.1) wird etwas konkretisiert. Anstelle einer beliebigen Menge U wird nun der Fall betrachtet, dass $U \subset V$ ein endlich-dimensionaler Teilraum ist. Ansonsten ändert sich die Bestapproximations-Aufgabe nicht. Sei $f \in V$ gegeben, finde $u \in U$, so dass

$$\|f - u\|_V \le \|f - v\|_V \quad \forall\, v \in U. \tag{1.4}$$

$\square$

Satz 1.13 Existenz einer Lösung der Bestapproximations-Aufgabe. *Die Bestapproximations-Aufgabe* (1.4) *besitzt eine Lösung.*

Beweis: Definiere die Abbildung $g\ :\ U \to \mathbb{R}$ durch $g(v) = \|f - v\|_V$ für alle $v \in U$. Die Funktion $g(v)$ ist wegen $g(v) \ge 0$ nach unten beschränkt. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erhält man

$$|g(v) - g(w)| = \left|\|f - v\|_V - \|f - w\|_V\right| \le \|v - w\|_V \quad \forall\, v, w \in U, \tag{1.5}$$

da beispielsweise gilt

$$\begin{aligned} \|f - v\|_V - \|f - w\|_V &= \|(f - w) - (v - w)\|_V - \|f - w\|_V \\ &\le \|f - w\|_V + \|v - w\|_V - \|f - w\|_V = \|v - w\|_V\,, \end{aligned}$$

und analog der andere Fall. Da die Norm eine stetige Funktion ist, folgt aus (1.5), dass auch $g(v)$ eine stetige Abbildung ist.

Betrachte nun eine Kugel, welche nur Funktionen aus U bis zu einer bestimmten Norm enthält

$$B = \left\{v \in U\ :\ \|v\|_V \le 2\,\|f\|_V\right\}.$$

Da U ein Unterraum ist, ist $0 \in U$ und offenbar auch $0 \in B$. Zunächst wird gezeigt, dass kein Minimum von $g(v)$ außerhalb von B liegen kann. Betrachte dazu ein $v \in U$ mit $v \notin B$, also $\|v\|_V > 2\,\|f\|_V$. Dann folgt mit Dreiecksungleichung

$$g(v) = \|f - v\|_V \ge \|v\|_V - \|f\|_V > 2\,\|f\|_V - \|f\|_V = \|f\|_V = g(0).$$

Es ist auch anschaulich klar, dass der Mittelpunkt der Kugel eine bessere Approximation als v ist, falls v eine Norm hat, die den doppelten Abstand von f zum Mittelpunkt übersteigt.

Somit reduziert sich die Bestapproximations-Aufgabe zu: Finde $u \in B$, so dass

$$g(u) \le g(v) \quad \forall\, v \in B.$$

Die Kugel B ist abgeschlossen, da der Rand $\|v\|_V = 2\,\|f\|_V$ mit zu B gehört, und beschränkt. Nun benötigt man die Eigenschaft, dass U endlich-dimensional ist. In endlich-dimensionalen Räumen ist eine abgeschlossene und beschränkte Menge auch kompakt. Nach dem Satz von Weierstraß[2]) nimmt eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ihre Extremwerte an. Damit existiert ein $u \in B$, so dass

$$g(u) = \inf_{v \in B} g(v) = \min_{v \in B} g(v) = \min_{v \in U} g(v)$$

ist. $\blacksquare$

Bemerkung 1.14 *Zum Beweis.* Der Beweis ist nicht konstruktiv, das heißt, es wird nicht angegeben, wie eine Lösung konstruiert werden kann. $\square$

[2] Karl Weierstraß (1815 – 1897)

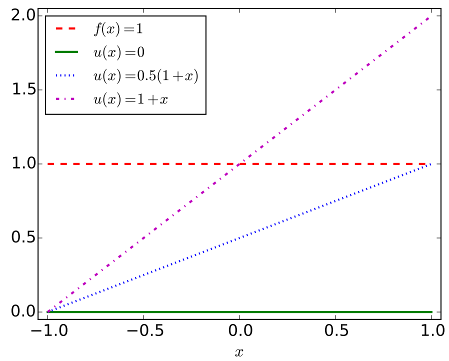

Abbildung 1.4: Beispiel 1.15. Bestapproximation von $f(x) = 1$ durch unterschiedliche Funktionen der Form $\alpha(1+x)$ bezüglich $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_\infty$.

Beispiel 1.15 *Nichteindeutigkeit der Bestapproximation.* Seien $V = C([-1,1])$ ausgestattet mit $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_\infty$, $f(x) = 1$ und $U = \{p_\alpha : p_\alpha(x) = \alpha(1+x), \alpha \in \mathbb{R}\}$. Man rechnet direkt nach, dass U ein 1-dimensionaler Unterraum von V ist.

Die Differenz zwischen $f(x)$ und einer beliebigen Funktion aus U gegeben durch

$$\|f - p_\alpha\|_\infty = \max_{x\in[-1,1]} |1 - \alpha(1+x)| = \max_{x\in[-1,1]} |-\alpha x + (1-\alpha)| = g_\alpha(x).$$

Im Betrag steht eine lineare Funktion. Solche Funktionen nehmen ihren betragsmäßig größten Wert in einem der Intervallenden an. Es gelten

$$g_\alpha(-1) = 1, \quad g_\alpha(1) = |1 - 2\alpha|.$$

Damit folgt

$$\|f - p_\alpha\|_\infty = \begin{cases} 1, & \alpha \in [0,1], \\ |1-2\alpha|, & |\alpha - 0.5| > 0.5 \ (\Longleftrightarrow \ \alpha \neq [0,1]). \end{cases}$$

Es gilt $|1-2\alpha| > 1$ für $|\alpha - 0.5| > 0.5$. Damit sind alle Geraden $p_\alpha(x)$ mit $\alpha \in [0,1]$ eine Bestapproximation, vergleiche Abbildung 1.4. □

Definition 1.16 Streng normierter Raum. Ein linearer normierter Raum V heißt streng normiert, wenn aus $\|v+w\|_V = \|v\|_V + \|w\|_V$ folgt, dass $v = \alpha w$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Satz 1.17 Eindeutigkeit der Lösung der Bestapproximations-Aufgabe in streng normierten Räumen. *Sei V ein streng normierter Raum. Dann existiert genau eine Lösung der Bestapproximations-Aufgabe* (1.4).

Beweis: Die Existenz der Lösung wurde bereits in Satz 1.13 gezeigt. Es bleibt, die Eindeutigkeit zu beweisen.

i) $f \in U$. Ist $f \in U$, so ist $u = f$ die eindeutige Lösung, denn dann gilt wegen der ersten Normeigenschaft

$$0 = \|f - u\|_V < \|f - v\|_V \quad \forall\, v \in U, v \neq u.$$

i) $f \notin U$. Indirekter Beweis. Sei $f \notin U$ und seien $u_1 \neq u_2$ zwei Lösungen von (1.4). Dann folgt mit Dreiecksungleichung

$$\left\| f - \frac{1}{2}(u_1 + u_2)\right\|_V \le \left\|\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}u_1\right\|_V + \left\|\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}u_2\right\|_V = \frac{1}{2}\|f-u_1\|_V + \frac{1}{2}\|f-u_2\|_V.$$

Da sowohl u_1 als auch u_2 Bestapproximierende sind, sind die Normen auf der rechten Seite der Ungleichung gleich und es folgt

$$\left\| f - \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \right\|_V \le \|f - u_1\|_V = \|f - u_2\|_V .$$

Da u_1 nach Voraussetzung eine Bestapproximierende ist, kann nur das Gleichheitszeichen gelten und demzufolge ist auch $\frac{1}{2}(u_1 + u_2)$ eine Bestapproximierende. Es folgt also

$$\|f - u_1\|_V + \|f - u_2\|_V = 2 \left\| f - \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \right\|_V = \|(f - u_1) + (f - u_2)\|_V .$$

Da V streng normiert ist, gibt es nun ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $f - u_1 = \alpha(f - u_2)$. Das ist äquivalent zu

$$(1 - \alpha)f = u_1 - \alpha u_2 \in U. \tag{1.6}$$

Da $u_1, u_2 \in U$ ist auch die rechte Seite dieser Gleichung Element von U. Da $f \notin U$ ist und U ein linearer Raum ist, kann (1.6) nur gelten, wenn $1 - \alpha = 0$, also $\alpha = 1$ ist. Dann folgt

$$0 = u_1 - u_2 \quad \Longleftrightarrow \quad u_1 = u_2.$$

Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass u_1 und u_2 verschieden sind. Demzufolge ist die Lösung von (1.4) eindeutig. ■

Beispiel 1.18 *Raum mit strenger Norm.* Seien $V = \mathbb{R}^N$ und $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm. Dann folgt aus der Bedingung für einen streng normierten Raum $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2 + \|\boldsymbol{y}\|_2$ durch quadrieren

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_2^2 = \|\boldsymbol{x}\|_2^2 + \|\boldsymbol{y}\|_2^2 + 2\,\|\boldsymbol{x}\|_2\,\|\boldsymbol{y}\|_2 .$$

Mit der Definition der Euklidischen Norm mit dem Skalarprodukt von Vektoren erhält man aber auch

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|_2^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|_2^2 + \|\boldsymbol{y}\|_2^2 + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Es folgt, dass $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|_2\,\|\boldsymbol{y}\|_2$. Nun gilt für den Winkel γ zwischen den Vektoren $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{y}$

$$\cos(\gamma) = \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{\|\boldsymbol{x}\|_2\,\|\boldsymbol{y}\|_2} = 1.$$

Also ist $\gamma = 0$ und es folgt $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{y}$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}$, sogar $\alpha > 0$. Die Eigenschaft der strengen Norm ist offensichtlich auch erfüllt, falls einer der Vektoren der Nullvektor ist, das heißt für $\alpha = 0$. □

Definition 1.19 Skalarprodukt, Prä-Hilbert-Raum. Sei V ein reeller linearer Raum. Eine Abbildung $(\cdot, \cdot) \ : \ V \times V \to \mathbb{R}$ heißt Skalarprodukt, wenn für alle $u, v, w \in V$ und für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
i) Symmetrie: $(u, v) = (v, u)$,
ii) Linearität: $(\alpha u + \beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$,
iii) positive Definitheit: $(v, v) \ge 0$ und $(v, v) = 0$ genau dann wenn $v = 0$.
Wird der Raum V mit der Norm

$$\|v\|_V = (v, v)^{1/2}$$

versehen, so wird er Prä-Hilbert-Raum genannt. □

Beispiel 1.20 *Prä-Hilbert-Raum.* Sei $V = C([a, b])$. Dann definiert die Abbildung

$$(u, v)_{L^2} = \int_a^b u(x)v(x)\ \mathrm{d}x \tag{1.7}$$

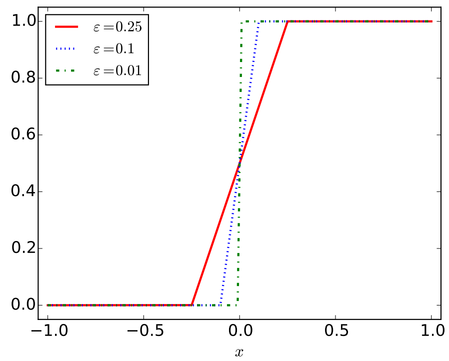

Abbildung 1.5: Beispiel 1.20. Funktionen $f_\varepsilon(x)$ für verschiedene ε.

ein Skalarprodukt von V, was man einfach nachrechnen kann. Demzufolge ist $(V, \|\cdot\|_{L^2})$ ein Prä-Hilbert-Raum.

Dieser Raum ist aber nicht vollständig in dieser Norm. Betrachte zum Beispiel das Intervall $[-1, 1]$ und die Funktionen

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1, -\varepsilon), \\ x/(2\varepsilon) + 1/2, & x \in [-\varepsilon, \varepsilon), \\ 1, & x \in [\varepsilon, 1], \end{cases} \qquad \text{mit } \varepsilon > 0,$$

siehe Abbildung 1.5. Es gilt

$$\int_{-1}^{1} f_\varepsilon^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2\varepsilon}{3} + (1 - \varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Demzufolge gilt für alle Funktionen $f_\varepsilon \in (V, \|\cdot\|_{L^2})$.

Sei nun $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$. Dann ist

$$\|f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^{1} \left(f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}\right)^2\,\mathrm{d}x = \int_{-\varepsilon_2}^{\varepsilon_2} \left(f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}\right)^2\,\mathrm{d}x \le 2\varepsilon_2,$$

da $\left(f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}\right)^2 \le 1$. Damit ist $\{f_\varepsilon\}$ eine Cauchy[3]-Folge in $(V, \|\cdot\|_{L^2})$ für $\varepsilon \to 0$, aber die Grenzfunktion ist eine unstetige Funktion.

Vervollständigt man $(V, \|\cdot\|_{L^2})$, so erhält man $L^2(-1, 1)$. □

Definition 1.21 Hilbert-Raum. Ein vollständiger Prä-Hilbert-Raum wird Hilbert-Raum genannt. □

Beispiel 1.22 *Hilbert-Raum.* Hilbert-Räume sind zum Beispiel:

- $\mathbb{R}^N$ ausgestattet mit dem Euklidischen Skalarprodukt,
- $L^2(a, b)$ ausgestattet mit dem Skalarprodukt (1.7).

□

Satz 1.23 Prä-Hilbert-Raum ist streng normiert. *Jeder Prä-Hilbert-Raum V ist streng normiert.*

Beweis: Analog zu Beispiel 1.18 erhält man für $u, v \in V$ mit $\|u + v\|_V = \|u\|_V + \|v\|_V$, dass

$$(u, v) = \|u\|_V \|v\|_V$$

[3]Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)

gilt. Dass man aus dieser Aussage folgern kann, dass u ein Vielfaches von v ist folgt aus einer Eigenschaft, welche man beim Beweis der Cauchy-Schwarz[4]-Ungleichung

$$(u, v) \leq \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall\, u, v \in V \tag{1.8}$$

als Nebenprodukt erhält, siehe Literatur oder unten.

Für Interessenten: Beweis von (1.8). Ist $(u, v) = 0$, dann gilt (1.8) offensichtlich. Sei nun $(u, v) \neq 0$. Dann ist $\beta = (u, v)/\left|(u, v)\right|$ wohldefiniert. Nach Eigenschaft iii) des Skalarproduktes gilt für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\beta u + \lambda v, \beta u + \lambda v) = \beta^2(u, u) + 2\lambda\beta(u, v) + \lambda^2(v, v) \\ &= (u, u) + 2\lambda\beta(u, v) + \lambda^2(v, v), \end{aligned} \tag{1.9}$$

da $\beta^2 = 1$. Das ist eine quadratische Funktion in λ, welche keine negativen Werte annehmen darf. Das ist genau dann der Fall, wenn die Diskriminante nicht-positiv ist

$$\frac{\beta^2(u, v)^2}{(v, v)^2} - \frac{(u, u)}{(v, v)} \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (u, v)^2 \leq (u, u)(v, v) \quad \Longleftrightarrow \quad |(u, v)| \leq \|u\|_V \|v\|_V .$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn eine Nullstelle angenommen wird. Nach (1.9) muss dann

$$0 = (\beta u + \lambda v, \beta u + \lambda v) = \|\beta u + \lambda v\|_V$$

gelten, woraus nach einer Normeigenschaft

$$\beta u + \lambda v = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u = -\frac{\lambda}{\beta} v$$

folgt. Also ist v ein Vielfaches von u. ■

Folgerung 1.24 Eindeutigkeit der Lösung der Bestapproximations-Aufgabe im Prä-Hilbert-Raum. *Im Prä-Hilbert-Raum besitzt die Bestapproximations-Aufgabe* (1.4) *eine eindeutige Lösung.*

Beweis: Die Aussage folgt sofort durch Kombination der Sätze 1.17 und 1.23. ■

Bemerkung 1.25 *Charakterisierung der Bestapproximierenden in Prä-Hilbert-Räumen.* In Prä-Hilbert-Räumen kann die Bestapproximierende mit Hilfe des Skalarproduktes charakterisiert werden. Diese Charakterisierung ist auch für die praktische Berechnung der Bestapproximierenden nützlich. □

Satz 1.26 Charakterisierung der Bestapproximierenden in Prä-Hilbert-Räumen. *Sei V ein Prä-Hilbert-Raum. Dann ist die Bestapproximations-Aufgabe* (1.4) *äquivalent zur Lösung der Aufgabe: Finde $u \in U$, so dass*

$$(f - u, v) = 0 \quad \forall\, v \in U. \tag{1.10}$$

Beweis: Zum Beweis des Satzes müssen zwei Aussagen gezeigt werden.

i) Zu zeigen: Ist $u \in U$ die Lösung von (1.4)*, dann löst u auch* (1.10). Wegen der Monotonie der Wurzelfunktion kann man das Quadrat der Norm, anstelle der Norm selbst, betrachten. Sei $\alpha \neq 0$ beliebig gewählt und sei $v \in U$ beliebig aber fest gewählt. Da u die Lösung von (1.4) ist, folgt

$$\|f - u\|_V^2 \leq \|f - (u + \alpha v)\|_V^2 = \|(f - u) - \alpha v)\|_V^2 = \|f - u\|_V^2 - 2\alpha(f - u, v) + \alpha^2 \|v\|_V^2 .$$

Demzufolge ist

$$0 \leq -2\alpha(f - u, v) + \alpha^2 \|v\|_V^2 .$$

Division durch $\alpha > 0$ und Grenzübergang $\alpha \to 0$ liefert

$$0 \leq -2(f - u, v).$$

[4] Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921)

Führt man dieselben Operationen für $\alpha < 0$ durch, erhält man

$$0 \geq -2(f-u,v).$$

Die beiden Ungleichungen können nur gemeinsam gelten, wenn

$$0 = (f-u,v).$$

Da $v \in U$ beliebig gewählt war, löst u (1.10).

ii) Zu zeigen: Ist $u \in U$ die Lösung von (1.10)*, dann löst u auch* (1.4). Sei $v \in U$, $v \neq 0$, beliebig aber fest gewählt. Dann folgt, wegen Normeigenschaft i),

$$\|f-(u+v)\|_V^2 = \|f-u\|_V^2 - 2(f-u,v) + \|v\|_V^2 = \|f-u\|_V^2 + \|v\|_V^2 > \|f-u\|_V^2 .$$

Damit löst u die Bestapproximations-Aufgabe (1.4). ■

Definition 1.27 Orthogonalität. Sei V ein Prä-Hilbert-Raum, dann heißen die Elemente $u, v \in V$ zueinander orthogonal, wenn $(u,v) = 0$ ist. In Anlehnung an endlich-dimensionale Räume sagt man auch, dass u und v senkrecht aufeinander stehen. □

Bemerkung 1.28 *Berechnung der Bestapproximierenden mit Hilfe von* (1.10)*.* Aus (1.10) folgt, dass der Raum U, und insbesondere die Bestapproximierende u, und der Fehler $f-u$ orthogonal zueinander sind.

Die Gleichung (1.10) ist der Ausgangspunkt bei der praktischen Berechnung der Bestapproximierenden. Sei U ein n-dimensionaler Raum. Dann wird U mit einer Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ausgestattet. Damit existiert die eindeutige Darstellung

$$u = \sum_{j=1}^{n} u_j \varphi_j$$

mit zu berechnenden Koeffizienten $u_j \in \mathbb{R}$. Man kann zeigen, dass (1.10) genau dann für alle $v \in U$ erfüllt ist, wenn es für alle Basisfunktionen von U erfüllt ist (Übungsaufgabe). Damit erhält man n Gleichungen

$$(u,\varphi_i) = (f,\varphi_i) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} (\varphi_j,\varphi_i) u_j = (f,\varphi_i), \quad i = 1,\ldots,n. \tag{1.11}$$

Setzt man

$$\begin{aligned} A &= \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}, a_{ij} = (\varphi_j,\varphi_i), \qquad (1.12)\\ \boldsymbol{b} &= (b_i)_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n, b_i = (f,\varphi_i),\\ \boldsymbol{u} &= (u_i)_{i=1}^{n} \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

so lässt sich (1.11) als lineares Gleichungssystem

$$A\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} \tag{1.13}$$

schreiben. Dieses System wird Normalgleichungen genannt. Die in (1.12) definierte Matrix A wird Gram[5]sche Matrix genannt. Sie ist symmetrisch und positiv definit (Übungsaufgabe). □

[5] Jørgen Pedersen Gram (1850 – 1916)