



Saarbrücken, 29.10.2008

## Hausübungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker III

### Serie 31

abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 19.11.2008

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

#### Ablauf der Übungen und Kriterien zur Erlangung der Zulassung zur Klausur:

- wurden in der Vorlesung am 22.10.2008 vorgestellt,
- sind auf der Homepage der Vorlesung  
<http://www.math.uni-sb.de/ag/john/LEHRE/lehre1.html>  
abrufbar

1. Man führe die ersten beiden Iterationen des Gauß-Seidel-Verfahrens zur Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 256 \\ 256 \\ 256 \\ 256 \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsiterierten  $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$  durch und berechne den Fehler zur Lösung

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 128 \\ 128 \\ 128 \\ 128 \end{pmatrix}$$

in der euklidischen Norm.

2. Man betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 & -2 \\ -8 & 5 & 1 & -8 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

aus der Präsenzübungsserie 29. Mit Hilfe der Potenzmethode und des Startvektors  $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 1, 1, 1)^T$  berechne man eine Approximation des betragsgrössten Eigenwertes und des zugehörigen Eigenvektors. Man führe fünf Iterationen durch (also bis zu der Iterierten, die man mit  $A^5$  erhält). Zum besseren Vergleich der Ergebnisse normiere man die Vektoren nicht während der Iteration.

Wie groß ist der Fehler von  $\lambda^{(k)}$  zum betragsgrössten Eigenwert für  $k = 1, \dots, 5$ ? Wie groß ist der Winkel zwischen  $\mathbf{x}^{(5)}$  und dem Eigenvektor zum betragsgrössten Eigenwert?

**4 Punkte**

3. (a) Betrachte das Jacobi-Verfahren zur Berechnung von Eigenwerten symmetrischer Matrizen. Man zeige, dass die in der Vorlesung angegebene Transformation  $Q^T A Q$  tatsächlich nur die  $i$ -te und  $j$ -te Zeile und Spalte der Matrix  $A$  modifiziert.
- (b) Man finde eine Givens-Matrix so, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mit der obigen Transformation auf Diagonalgestalt gebracht wird. Wie lauten die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von  $A$ ?

**4 Punkte**

**Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !**