FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 29.05.2008

Hausübungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker II

Serie 22

abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 11.06.2008

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Ablauf der Übungen und Kriterien zur Erlangung der Zulassung zur Klausur:

- wurden in der Vorlesung am 16.04.2008 vorgestellt,
- sind auf der Homepage der Vorlesung
  `http://www.math.uni-sb.de/ag/john/LEHRE/lehre_2.html`
  abrufbar

1. Sei $f(x)$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit $f(0) = 0$. Die Umkehrfunktion von $f(x)$ sei $f^{-1}(x)$. Man zeige, daß für beliebige $a, b \geq 0$, für die die beiden Integrale existieren, die Ungleichung
$$ab \leq \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^b f^{-1}(x)\, dx$$
gilt. Welche bekannte Ungleichung erhält man für den Spezialfall $f(x) = x^2$?
Hinweis: Eine einfache Lösung ergibt sich durch eine geometrische Interpretation der auftretenden Terme als Flächeninhalte ! **4 Punkte**

2. Man berechne die Integrale
$$\iint_{\Omega_1} \frac{1}{2}x^2 + y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \iiint_{\Omega_2} -\frac{5x^3 + 10y^3}{z^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
mit $\Omega_1 = [-1, 1] \times [0, 3]$ und $\Omega_2 = [0, 2] \times [-3, -1] \times [8, 10]$. **4 Punkte**

3.
   (a) Seien V ein K–Vektorraum, $\mathbf{v} \in V$ und $\lambda \in K$. Man zeige, dass aus $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ folgt dass $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ oder $\lambda = 0$ gilt.
   (b) Man untersuche, welche der folgenden Mengen Unterraum des $\mathbb{R}^3$ sind
      i. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$,

ii. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y = 5z\}$,
iii. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 5x - 7y = 14\}$,
iv. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 0\}$.

4 Punkte

Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !