FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 22.01.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

Serie 12

abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 30.01.2008

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Vergessen Sie bitte nicht, dass zur Zulassung zur Prüfung auch das Vorrechnen von Aufgaben in den Übungen gehört !!!

1. Man beweise die folgenden Aussagen oder man finde ein Gegenbeispiel.

   (a) Seien $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen, dann konvergiert auch die Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die durch
   $$h_k = \max(f_k, g_k) \qquad k \in \mathbb{N}$$
   definiert ist.

   (b) Wenn für die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit
   $$b_k = a_{k+1} - a_k \qquad k \in \mathbb{N}$$
   eine Nullfolge ist, dann konvergiert Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

   (c) Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Wenn für die Folge $(d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit
   $$d_k = c_{k+1} - c_k \qquad k \in \mathbb{N}$$
   die Beziehung
   $$|d_k| \le \frac{1}{k(k+1)}$$
   gilt, dann konvergiert die Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

2. Gegeben sei die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$. Weiterhin definieren wir die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch
   $$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

   (a) Man bestimme einen einfachen Ausdruck für s_n.

   (b) Man bestimme den Grenzwert $s = \lim_{n\to\infty} s_n$.

(c) Man gebe ein $n_0(\varepsilon)$ an, so daß für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ die Beziehung

$$|s - s_n| \leq \varepsilon$$

erfüllt ist.

3. Sei E ein Vektorraum. Man beweise, dass die Abbildung $D\ :\ E \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$D(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ 1 & \text{sonst }, \end{cases}$$

keine Norm auf E definiert. Desweiteren zeige man, dass die durch D induzierte Funktion $d\ :\ E \times E \to \mathbb{R}_0^+$

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } x \neq y, \end{cases}$$

eine Metrik auf E definiert.

4. Man verwende das Quotientenkriterium zur Bestimmung des Konvergenzverhaltens der folgenden Reihen:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(3j)!}{(2j+1)!j!6^j}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^2}{2^{2j-1}+1}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a^j j!}{j^j}, \quad a > 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n n!}{n^n}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j 3^j j!}{j^j}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 n^k}{(2k)!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$