FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 18.12.2007

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

Serie 09

abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 09.01.2008

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Vergessen Sie bitte nicht, dass zur Zulassung zur Prüfung auch das Vorrechnen von Aufgaben in den Übungen gehört !!!

1. Es seien
$$a_n := \frac{1}{n^3}\sum_{\nu=1}^{n-1}\nu^2 \quad b_n := \frac{1}{n^3}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^2 \text{ für } n \in \mathbb{N}.$$
Man zeige, daß $\{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist. Welche reelle Zahl liegt im Durchschnitt aller Intervalle?

2. Man beweise die Schwarzsche Ungleichung
$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\right)^2 \le \left(\sum_{\nu=1}^{n} {a_\nu}^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} {b_\nu}^2\right)$$
für beliebige reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n, \quad b_1, \ldots, b_n$.
Hinweis: Man zeige zuerst die Identität
$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2\right) - \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\right)^2 = \sum_{1\le\mu<\nu\le n} (a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu)^2\,.$$

3. Man beweise für beliebiges $x \in \mathbb{R}, x > 0$ die Ungleichung
$$x + \frac{1}{x} \ge 2.$$
Unter Nutzung dieser Ungleichung zeige man, dass für beliebige positive reelle Zahlen $x_1, x_2, ..., x_n$ die Ungleichung
$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{x_\nu}\right) \ge n^2$$
gilt.

4. Für die Mengen $M = \{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ mit

   (a) $x_n := \frac{1+(-1)^n n}{1+n}$

   (b) $x_n := \sin \frac{\pi}{2n}$

   bestimme man Infimum und Supremum.