Lösungen zum 33. Aufgabenblatt für MfI 3

1. Aufgabe :
   Nach Definition der Richtungsableitung gilt:

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} \\ &= 0 \\ f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Für $(x,y) \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\left[y\left(x^2-y^2\right)+2x^2y\right]\left(x^2+y^2\right)-2x^2y\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ f_y(x,y) &= \frac{\left(x^3-3xy^2\right)\left(x^2+y^2\right)-2xy^2\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} \\ &= \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} \end{aligned}$$

   Es folgt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_x(h,0)-f_x(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} \\ &= 0 \\ f_{xy}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-\frac{h^5}{h^4}-0}{h} \\ &= -1 \\ f_{yx}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4}-0}{h} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 \\
f_{yy}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_y(0,h) - f_y(0,0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Da $f_{xy} \neq f_{yx}$, gilt der Satz von Schwartz nicht. Dieser gilt für $(x,y) \neq (0,0)$.

2. Aufgabe :

$$
\begin{aligned}
xy + yz + zx &= 1 \\
z(x,y) &= \frac{1-xy}{y+x} \\
&= \frac{1-xy-y^2+y^2}{y+x} \\
z(x,y) &= -y + \frac{1+y^2}{(y+x)} \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{1+y^2}{(y+x)^2} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= 2\frac{1+y^2}{(y+x)^3} \\
\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} &= -6\frac{1+y^2}{(y+x)^4} \\
\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} &= 24\frac{1+y^2}{(y+x)^5} \\
\text{Vermutung :}& \\
\frac{\partial^n z}{\partial x^n} &= (-1)^n \, n! \, (1+y^2)(y+x)^{-(n+1)}
\end{aligned}
$$

Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang:

$$n = 1 : \quad \frac{\partial z}{\partial x} = (-1)\, 1! \, (1+y^2)(y+x)^{-(1+1)} = -(1+y^2)(y+x)^{-2}$$

Induktionsbehauptung:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n} = (-1)^n \, n! \, (1+y^2)(y+x)^{-(n+1)}$$

Induktionsvoraussetzung:

$$\text{Es gelte für ein festes n : } \frac{\partial^n z}{\partial x^n} = (-1)^n \, n! \, (1+y^2)(y+x)^{-(n+1)}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right) &\overset{IV}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left((-1)^n\, n!\,(1+y^2)(y+x)^{-(n+1)}\right) \\
&= (-1)^n\, n!\,(1+y^2)(-(n+1))(y+x)^{-(n+1)-1} \\
&= (-1)^{n+1}\,(n+1)!\,(1+y^2)(y+x)^{-(n+2)} \\
&= \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}
\end{aligned}$$

3. Aufgabe :
   Satz von Taylor:

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}\left(\sum_{i=0}^{k}\left(\binom{k}{i}\right)(x-x_0)^i\,(y-y_0)^{k-i}\,\frac{\partial^k f}{\partial x^i \partial y^{k-i}}(x_0,y_0)\right) + R(x,y)$$

$$\begin{array}{rcll}
f(x,y) &=& x^y & 1 \\
f_x(x,y) &=& yx^{y-1} & 1 \\
f_y(x,y) &=& x^y \ln(x) & 0 \\
f_{xx}(x,y) &=& y(y-1)x^{y-2} & 0 \\
f_{xy}(x,y) &=& x^{y-1} + yx^{y-1}\ln(x) & 1 \\
f_{yx}(x,y) &=& \frac{x^y}{x} + yx^{y-1}\ln(x) & 1 \\
f_{yy}(x,y) &=& x^y \ln^2(x) & 0
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow f(x,y) &\approx 1 + (x-1) + \frac{1}{2}\left(2(x-1)(y-1)\right) \\
&= 1 - y + xy
\end{aligned}$$

Man ermittle Näherungswerte für $\sqrt{1.03}$ und $0.95^{1.3}$ mit Hilfe des Taylorpolynom:

$$\begin{aligned}
\sqrt{1.03} &= 1.014889157 \\
\sqrt{1.03} &= 1.03^{0.5} \\
&\approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1.03}{2} \\
&= 0.5 + 0.515 \\
&= 1.015
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0.95^{1.3} &= 0.935493311 \\
0.95^{1.3} &\approx 1 - 1.3 + 0.95 \cdot 1.3 \\
&= 0.935
\end{aligned}$$