Lösungen zum 29. Aufgabenblatt für MfI 3

1. Aufgabe :

   (a) Wenn λ ein Eigenwert von A ist, gilt für die Vektoren $\mathbf{x}_\lambda$ des zugehörigen Eigenraumes
   $$A\mathbf{x}_\lambda = \lambda\mathbf{x}_\lambda.$$
   A als orthogonale Matrix ist nicht singulär, es gilt $A^{-1} = A^T$, und für alle Eigenwerte von A: $\lambda \neq 0$. Somit folgt durch Multiplikation mit A^{-1} von links
   $$A^{-1}A\mathbf{x}_\lambda = \mathbf{x}_\lambda = \lambda A^{-1}\mathbf{x}_\lambda = \lambda A^T\mathbf{x}_\lambda$$
   und weiter
   $$A^T\mathbf{x}_\lambda = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}_\lambda.$$
   Andererseits ist jeder Eigenwert λ von A^T auch Eigenwert von A:
   $$0 = \det(A^T - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I^T) = \det(A - \lambda I)^T = \det(A - \lambda I) = 0$$
   Demnach ist $\frac{1}{\lambda}$ als Eigenwert von A^T auch Eigenwert von A.

   (b) Seien v_1 und v_2 die zu λ_1 und λ_2 gehörenden Eigenvektoren. Dann gilt nach Satz 40.3:
   $$\begin{aligned} & v_1 \cdot v_2 &=& \; (Av_1)\cdot(Av_2) \\ & &=& \; (\lambda_1 v_1)\cdot(\lambda_2 v_2) \\ & &=& \; \lambda_1\lambda_2(v_1\cdot v_2) \\ & &=& \; -(v_1\cdot v_2) \\ \Longrightarrow & v_1 \cdot v_2 &=& \; 0 \\ \Longrightarrow & & & \; v_1, v_2 \text{ sind orthogonal.} \end{aligned}$$

2. Aufgabe :
   Bestimmung der Eigenwerte:
   $$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & \frac{5}{2}-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + \frac{9}{2}\lambda^2 - \frac{27}{2} \\ \lambda_1 &= 3 \quad \text{offensichtliche Lösung} \\ -\lambda^3 + \frac{9}{2}\lambda^2 - \frac{27}{2} &= (\lambda-3)^3\left(\lambda + \frac{3}{2}\right) \\ \lambda_2 &= 3 \\ \lambda_3 &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Der zum doppelten Eigenwert $\lambda_1 = 3$ gehörende Eigenraum U_1 ist zweidimensional, der zum einfachen Eigenwert $\lambda_3 = -\frac{3}{2}$ gehörende Eigenraum U_3 eindimensional. Die reellen Eigenräume U_1 und U_3 erhält man aus

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 I)\,\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{x} \\ &= 0\end{aligned}$$

zu

$$U_1 = \left\{\mathbf{x} : \mathbf{x} = s\,(1,0,-2)^T + t\,(0,1,-2)^T\,, s,t \in \mathbb{R}\right\}$$

bzw. aus

$$\begin{aligned}(A-\lambda_1 I)\,\mathbf{x} &= \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & -2 & -1 \\ -2 & \frac{5}{2} & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x} \\ &= 0\end{aligned}$$

zu

$$U_3 = \left\{\mathbf{x} : \mathbf{x} = u\,(2,2,1)^T\,, u \in \mathbb{R}\right\}.$$

Legt man den euklidischen $\mathbb{R}^3$ zugrunde, dann läßt sich aus der Basis

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

von U_1 eine orthonormierte Basis $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ konstruieren:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{x}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 \\
\mathbf{x}_2 &= -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{Normierung:} \\
\mathbf{x}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \\
\mathbf{x}_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\mathbf{x}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} \\
\mathbf{x}_2 &= \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ein normierter Basisvektor von U_3 ist

$$\mathbf{x}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $X = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ ist orthogonal. Mit ihr gilt:

$$X^T A X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe :
   Eigenwerte der symmetrischen Matrix

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 36 & -12 \\ -12 & 29 \end{pmatrix} \\ |M - \lambda I| &= \lambda^2 - 65\lambda + 900 \\ &= 0 \\ \Longrightarrow \quad \lambda_1 &= 20 \\ \lambda_2 &= 45 \end{aligned}$$

Eigenräume von M:

$$\begin{aligned} V_{20}: \quad \mathbf{x} &= \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ V_{45}: \quad \mathbf{x} &= \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da die Eigenwerte verschieden sind, bilden die Eigenvektoren eine kartesische Basis, deren Determinante allerdings negativ ist. Ersetzt man $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ durch $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und normiert, so erhält man die Drehmatrix

$$\begin{aligned} A &= (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und es ist $A^{-1} = A^T$.
A ist kartesische Basis (= orthogonale Matrix) und $\det(A) > 0$.
Drehwinkel:

$$\cos(\alpha) = 0.6 \quad \text{und} \quad \sin(\alpha) = 0.8 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 53.13^\circ$$

Hauptachsentransformation :

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= A\mathbf{u} \\ 20u^2 + 45v^2 - 180 &= 0 \\ \frac{u^2}{3^2} + \frac{v^2}{2^2} &= 1 \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine Ellipse mit den Halbachsen 3 und 2.

Hauptachsen: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ (nicht normiert).

Das x, y-System geht durch die Drehung um $53.13°$ in das u, v-System über.