

## Lösungen zu den 25. Präsenzaufgaben für MfI 2

1. Aufgabe:

Die Mengen der Stoffe  $A_1 - A_4$  sollen mit  $m_1 - m_4$  bezeichnet werden. Aus der Aufgabenstellung läßt sich folgendes Gleichungssystem aufstellen:

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = 9 \quad (1)$$

$$0.06m_1 + 0.01m_2 + 0.04m_3 + 0.03m_4 = 0.04 \cdot 9 \quad \text{bzw.}$$

$$6m_1 + m_2 + 4m_3 + 3m_4 = 36 \quad (2)$$

$$0.01m_1 + 0.03m_2 + 0.04m_4 = 0.02 \cdot 9 \quad \text{bzw.}$$

$$m_1 + 3m_2 + 4m_4 = 18 \quad (3)$$

Außerdem gilt:

$$m_i \geq 0 \quad \forall i \quad (4)$$

Man erhält ein unterbestimmtes Gleichungssystem, d.h. man muss sich eine Variable fest vorgeben, um die anderen in Abhängigkeit von dieser berechnen zu können. Durch die Aufgabenstellung bietet sich,  $m_2$  vorzugeben. Das Gleichungssystem sieht dann folgendermassen aus:

$$m_1 + m_3 + m_4 = 9 - m_2 \quad (5)$$

$$6m_1 + 4m_3 + 3m_4 = 36 - m_2 \quad (6)$$

$$m_1 + 4m_3 + 2m_4 = 18 - 3m_2 \quad (7)$$

Die Lösung erfolgt mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. (5) wird mit 4 multipliziert und davon (6) subtrahiert:

$$\begin{array}{r} 4m_1 + 4m_3 + 4m_4 = 36 - 4m_2 \\ -( 6m_1 + 4m_3 + 3m_4 = 36 - m_2 ) \\ \hline -2m_1 \qquad \qquad \qquad + m_4 = -3m_2 \end{array} \quad (8)$$

(7) wird mit 2 multipliziert und dann addiert

$$\begin{array}{r} -2m_1 + m_4 = -3m_2 \\ +( 2m_1 + 8m_4 = 36 - 6m_2 ) \\ \hline 9m_4 = 36 - 9m_2 \end{array} \quad (9)$$

$m_4$  wird in (8) eingesetzt und dann werden  $m_1$  und  $m_4$  in (5) eingesetzt:

$$m_4 = 4 - m_2$$

$$m_1 = 2 + m_2$$

$$m_3 = 3 - m_2$$

Durch die Lösung ist ersichtlich, dass es einen Fall gibt, bei welchem  $A_2$  nicht eingesetzt werden muss; nämlich beim Einsatz von 2g  $A_1$ , 3g  $A_3$  und 4g  $A_4$ . Zur Vollständigkeit noch die Lösungen bei der Wahl eines anderen Stoffes als Parameter, die auf die gleiche Weise wie oben gefunden werden können.

$m_1$	$m_3$	$m_4$
$m_2 = m_1 - 2$	$m_1 = 5 - m_3$	$m_1 = 6 - m_4$
$m_3 = 5 - m_1$	$m_2 = 3 - m_3$	$m_3 = m_4 - 1$
$m_4 = 6 - m_1$	$m_4 = 1 + m_3$	$m_2 = 4 - m_4$

Es ist zu beachten, dass kein Term in den gefundenen Lösungstripeln kleiner Null sein darf (4).

2. Aufgabe:

(a) Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt mit Hilfe der Eliminationsmethode:

$$\left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 11 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 11 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 11 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 7 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & 7 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -9/5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 19/5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7/5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -44/5 & 0 \end{array} \right)$$

Es folgt als Lösung:

$$u = 3$$

$$v = 4$$

$$x = 2$$

$$y = 1$$

$$z = 0$$

(b) Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt mit Hilfe der Eliminationsmethode:

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -4 & 1 \\ -3 & 1 & -5 & -7 & -2 \\ -4 & 3 & -8 & -10 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & 10 & -8 & -4 & -2 \\ 0 & 15 & -12 & -6 & -3 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4/5 & 6/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -24 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7/5 & -13/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & -4/5 & 6/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Das System liegt in Stufenform vor. Die 4. Zeile ist belanglos geworden. Die Lösung des Gleichungssystems lautet:

$$\begin{aligned}u &= -\frac{3}{5} - \frac{7}{5}t \\x &= -\frac{1}{5} + \frac{4}{5}t \\y &= t \\z &= 0\end{aligned}$$

Eine der vier Variablen kann frei gewählt werden.