Lösungen zu den 23. Aufgabenblatt für MfI 2

1. Aufgabe :

(a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/3 \\ 5/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/6 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/6 \\ 5/6 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$ (nur triviale Kombination möglich):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

(c) $\mathbf{a}_4$ ist eine Linearkombination von $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$. Daher können nur Vektoren aus der von $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ aufgespannten Ebene dargestellt werden.

2. Aufgabe :

- $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$:

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{a}+\mathbf{b} \qquad \text{mit } \lambda = 1,\ \mu = 1$$

- $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$:

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{a}-\mathbf{b} \qquad \text{mit } \lambda = 1,\ \mu = -1$$

- $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$:

$$\lambda\mathbf{a} + \mu(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}-\mathbf{b} \qquad \text{mit } \lambda = 2,\ \mu = -1$$

- $\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$:

$$\lambda\mathbf{b} + \mu(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}+\mathbf{b} \qquad \text{mit } \lambda = 2,\ \mu = 1$$

3. Aufgabe :

(a) i. $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_3$ bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

ii. $\mathbf{b}_4$ ist eine Linearkombination von $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{b}_3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zusätzlich bilden $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{b}_3$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

(b) i. Die Vektoren sind linear abhängig, da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \lambda = -2.$$

$\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ liegen also auf einer Geraden.

ii. Die Vektoren $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ sind linear unabhängig, bilden also im Gegensatz zu $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$, eine Basis des $\mathbb{R}^2$