Lösungen zu den 21. Präsenzaufgaben für MfI 2

1. Aufgabe:
   Formel:
   $$x^2 + y^2 = R^2 \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{R^2 - x^2}$$
   Rotation des Viertelkreises um die x-Achse ergibt das Volumen einer Halbkugel:
   $$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^R \left[\sqrt{R^2 - x^2}\right]^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^R R^2 - x^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \left(\left[R^2 x\right]_0^R - \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^R \right) \\ &= \pi \left(R^3 - \frac{1}{3}R^3 \right) \\ &= \frac{2}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$
   $\Longrightarrow V = \frac{4}{3}\pi R^3$, ist das Volumen einer Kugel.

2. Aufgabe:
   Rotation der Funktion um die x-Achse:
   $$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^1 \left[\sqrt{x}\right]^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi \int_0^1 x \mathrm{d}x \\ &= \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$
   Volumen eines Paraboloiden: $V = \frac{1}{2}\pi R^2 H$, hier mit $H = 1$ und $R = 1$

3. Aufgabe:
   Hinweis:
   Zur Vereinfachung des Integranten forme man $\cos(t)$ in eine Funktion mit $\sin(t/2)$ um (Additionstheorem).

$$x(t) = r(t - \sin(t)), \qquad y(t) = r(1 - \cos(t)), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi \quad \text{und} \quad r > 0$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} r(1 - \cos(t)) \\ r\sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
|\dot{\mathbf{x}}(t)| &= \sqrt{r^2(1 - \cos(t))^2 + r^2\sin^2(t)} \\
&= r\sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} \\
&= r\sqrt{2 - 2\cos(t)} \\
&= r\sqrt{2\,(1 - \cos(t)))} \\
&= r\sqrt{2\left(1 - \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right)\right)} \\
&= r\sqrt{2\left(1 - \left[\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\right)} \\
&= r\sqrt{2\left(1 - \left[\left(1 - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right]\right)} \\
&= r\sqrt{2\left(1 - 1 + 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right)} \\
&= r\sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \\
&= 2r\sin\left(\frac{t}{2}\right)
\end{aligned}$$

Länge der Zykloide:

$$\begin{aligned}
l &= \int_0^{2\pi} 2r\sin\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t \\
&= 2r\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t \\
&= 4r\left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} \\
&= 4r\,(-\cos(\pi) + \cos(0)) \\
&= 8r
\end{aligned}$$