Lösungen zum 15. Aufgabenblatt für MfI 2

1. Aufgabe :

   1. Fall:
      $f \equiv 0 \longrightarrow f^{-1}\{0\} = \mathbb{R}$, sowohl offen als auch abgeschlossen.
   2. Fall:
      f besitzt keine Nullstelle, d.h. $f^{-1}\{0\} = \emptyset$, sowohl offen als auch abgeschlossen.
   3. Fall (sonst): **Behauptung:** $f^{-1}\{0\}$ ist abgeschlossen.

      z.z.: $f^{-1}\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist offen.
      Sei $a \in f(\mathbb{R})$, $a \neq 0$. Betrachte $f^{-1}\{a\}$. Sei $x \in f^{-1}\{a\}$; da f stetig ist, gibt es eine offene Kugel $B(x, \varepsilon)$, so dass $f(y) \neq 0\ \forall y \in U(x, \varepsilon)$. D.h. x ist innerer Punkt von $f^{-1}\left\{\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}$. Das gilt für alle $a \in f(\mathbb{R})$, $a \neq 0$ und für alle Urbilder $x \in f^{-1}\{a\}$. Damit besteht $f^{-1}\left\{\mathbb{R}\setminus\{0\}\right\}$ nur aus inneren Punkten, ist also offen.
      $\Longrightarrow f^{-1}\{0\}$ ist abgeschlossen.

2. Aufgabe :

   (a)

   $$f(x) = \sin(x), \quad x \in (0, 2\pi) \quad \Longrightarrow \quad f\left((0, 2\pi)\right) = [-1, 1]$$

   Analog:
   Bild einer abgeschlossenen Menge muss nicht abgeschlossen sein.

   $$f : \underbrace{(0,1)}_{X} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x \quad \text{mit } (0,1) \text{ abgeschlossen in } X!$$

   $\longrightarrow f\left((0,1)\right) = (0,1)$ ist offen in $\mathbb{R}$

   (b) Da $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ und $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ und f stetig ist,

   gilt mit ZWS, dass f mindestens eine reelle Nullstelle besitzt.

3. Aufgabe :
   Sei x_i eine Unstetigkeitsstelle, d.h.

$$\lim_{x \to x_i^{+0}} f(x) \neq \lim_{x \to x_i^{-0}} f(x).$$

   ObdA sei $f(x)$ monoton wachsend. Dann gilt:

$$a_i = \lim_{x \to x_i^{-0}} f(x) < \lim_{x \to x_i^{+0}} f(x) = b_i$$

   Für jede Unstetigkeitsstelle $x_j \to x_i$ gilt wegen Monotonie $b_i > a_j$ und für jede Unstetigkeitsstelle $x_k < x_i$ gilt $b_k < a_i$. Die Intervalle $[a_i, b_i]$ sind also disjunkt. In jedem dieser Intervalle liegt eine rationale Zahl. Hätte $f(x)$ überabzählbar viele Unstetigkeitsstellen, gäbe es überabzählbar viele rationale Zahlen.
   $\Longrightarrow$ Widerspruch !