FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 10.05.2005

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Serie 5

abzugeben in der Vorlesung am 23.05.2005

Die Lösungen der Aufgaben 1, 2 sind schriftlich abzugeben, inklusive der Quelltexte der Programme (diese per Email) !

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Zur Lösung der Aufgaben 1, 2 ist das Programm `spd_matrix.sci` (für SCILAB) bzw. `spd_matrix.m` (für MATLAB) von `http://www-ian.math.uni-magdeburg.de/~john/` zu laden. Diese Programme erzeugen eine zufällige symmetrisch positiv definite Matrix A und eine zufällige rechte Seite b. Die Aufrufe sind:

`[A,b]=spd_matrix(n)`

wobei n die Dimension ist.

1. Man programmiere das Jacobi-Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, wobei A und b mit `spd_matrix.sci` oder `spd_matrix.m` erzeugt wurden. Man teste dieses Verfahren für folgende Parameter:

   - Dimension $n = 10$,
   - Startvektor $x^{(0)} = 0$,
   - Abbruch der Iteration falls $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-8}$ oder nach maximal 1000 Iterationen,
   - Dämpfungsparameter $\omega \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$.

   Für alle Dämpfungsparameter überprüfe man, ob das Verfahren konvergiert und in diesen Fällen gebe man die Anzahl der Iterationen an.

2. Man programmiere das SOR-Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, wobei A und b mit `spd_matrix.sci` oder `spd_matrix.m` erzeugt wurden. Man teste dieses Verfahren für folgende Parameter:

   - Dimension $n = 10$,
   - Startvektor $x^{(0)} = 0$,
   - Abbruch der Iteration falls $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-8}$ oder nach maximal 1000 Iterationen,
   - Relaxationsparameter $\omega \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 1.9\}$.

   Für alle Relaxationsparameter gebe man die Anzahl der Iterationen an.

3. Die Iterationsmatrix des gedämpften Jacobi-Verfahrens ist $G(\omega) = I - \omega D^{-1}A$. Es folgt, dass wenn λ ein Eigenwert von $G(1)$ ist, dann ist $\mu = 1 - \omega(1 - \lambda)$ ein Eigenwert von $G(\omega)$. Man betrachte den Fall, dass alle Eigenwerte reell sind und

   $$\lambda_{\min}(G(1)) < -1 < \lambda_{\max}(G(1)) < 1.$$

   Nach dem Satz in der Vorlesung gibt es damit Startwerte, für die das Jacobi-Verfahren mit $\omega = 1$ nicht konvergiert. Wie muss man ω wählen, damit das gedämpfte Jacobi-Verfahren für alle Startwerte konvergiert, d.h. dass $|\mu| < 1$ für alle Eigenwerte von $G(\omega)$ gilt?