Kapitel 8

Metrische Räume

8.1 Begriff des metrischen Raumes

Bemerkung 8.1 Motivation. In diesem Abschnitt wird der Begriff des Abstandes zwischen reellen Zahlen verallgemeinert. Das ist notwendig, um Analysis in höherdimensionalen Räumen durchzuführen. Ein metrischer Raum ist nichts weiter als eine Menge, auf der ein Abstandsbegriff definiert ist. □

Beispiel 8.2 Bekannte Abstandsbegriffe.

- *Abstand reeller Zahlen.* Der Abstand zweier reeller Zahlen auf der Zahlengeraden ist eine Abbildung, die zwei reellen Zahlen eine nichtnegative reelle Zahl zuordnet

$$d \;:\; \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \quad (x,y) \mapsto d(x,y) = |x-y|\,.$$

Wesentliche Eigenschaften der Abbildung d sind:

1. $d(x,y) = 0 \iff x = y$,
2. $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}$,
3. $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y) \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$. Das ist die Dreiecksungleichung.

- *Euklidischer Abstand im* $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten die Menge aller Tripel $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3\}$. Dann ist der Euklidische Abstand

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \left(\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

zwischen zwei Punkten $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ eine Abbildung

$$d \;:\; \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_0^+$$

mit den Eigenschaften

1. $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{y}$,
2. $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = d(\mathbf{y},\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$,
3. $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) \le d(\mathbf{x},\mathbf{z}) + d(\mathbf{z},\mathbf{y}) \quad \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$.

Die ersten beiden Eigenschaften sind klar. Der Beweis der dritten Eigenschaft startet mit

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2 &= \sum_{i=1}^3 \left((x_i - z_i) + (z_i - y_i)\right)^2 \qquad (8.1)\\ &= \sum_{i=1}^3 (x_i - z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^3 (x_i - z_i)(z_i - y_i) + \sum_{i=1}^3 (z_i - y_i)^2\,.\end{aligned}$$

Wegen der zweiten binomischen Formel gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$

$$2ab \le a^2 + b^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \le (a-b)^2.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right)^2 \\
&= \quad (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= \quad a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + 2a_1b_1a_3b_3 + 2a_2b_2a_3b_3 \\
&\le \quad a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 + b_1^2a_2^2 + a_1^2b_3^2 + b_1^2a_3^2 + a_2^2b_3^2 + b_2^2a_3^2 \\
&= \quad \left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3} b_i^2\right).
\end{aligned}$$

Setzt man $a_i = (x_i - z_i), b_i = (z_i - y_i)$, dann erhält man aus (8.1)

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{3} (x_i - y_i)^2 \\
&\quad \le \quad \sum_{i=1}^{3} (x_i - z_i)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{3} (x_i - z_i)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{3} (z_i - y_i)^2\right)^{1/2} \\
&\qquad\quad + \sum_{i=1}^{3} (z_i - y_i)^2 \\
&\quad = \quad \left(\left(\sum_{i=1}^{3} (x_i - z_i)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{3} (z_i - y_i)^2\right)^{1/2}\right)^2,
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die erste binomische Formel verwendet wurde. Damit ist die dritte Eigenschaft gezeigt, indem man noch die Wurzel zieht.

□

Bemerkung 8.3 Sprechweise. Die Verallgemeinerung der Eigenschaften und Axiomatisierung führen zum Begriff des metrischen Raumes. Dabei wird die geometrische Sprache, beispielsweise Punkt und Abstand, beibehalten. □

Definition 8.4 Metrischer Raum. Sei E eine nichtleere Menge. Eine Metrik (ein Abstand) auf E ist eine Abbildung $d : E \times E \to \mathbb{R}_0^+$ mit den folgenden Eigenschaften

1.) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
2.) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall \ x, y \in E$ (Symmetrie),
3.) $d(x, y) \le d(x, z) + d(y, z) \ \forall \ x, y, z \in E$ (Dreiecksungleichung).

Das Paar (E, d) heißt metrischer Raum.

Falls es aus dem Zusammenhang klar ist, auf welche Metrik man sich bezieht, schreibt man einfach E für (E, d). □

Beispiel 8.5 Andere Metrik auf $\mathbb{R}^3$, Manhattan–Abstand. Sei $E = \mathbb{R}^3$ und sei für $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) \in E$ eine Abbildung $d : E \times E \to \mathbb{R}_0^+$ durch

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + |x_3 - y_3|$$

definiert. Dann ist (E, d) ein metrischer Raum. Die ersten beiden Eigenschaften der Metrik sieht man sofort. Die dritte Eigenschaft folgt aus der Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}$

$$|x_i - y_i| \le |x_i - z_i| + |z_i - y_i|, \quad i = 1, 2, 3$$

durch Addition.

Der in diesem Beispiel definierte Abstand heißt Manhattan–Abstand. Um vom Punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ zum Punkt $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ zu kommen, muss man folgende Entfernungen zurücklegen, siehe Abbildung 8.1:

$|x_1 - y_1|$ entlang der 3^{rd} avenue, $|x_2 - y_2|$ entlang der 5^{th} street und $|x_3 - y_3|$ von ebener Erde in den 37. Stock.

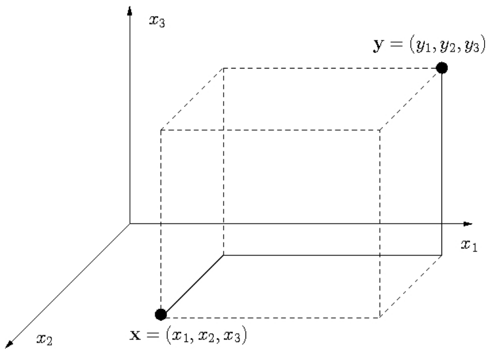

Abbildung 8.1: Manhattan–Abstand zweier Punkte in $\mathbb{R}^3$.

□

Definition 8.6 Beschränkte Abbildung. Sei A eine Menge. Eine Abbildung $f : A \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn das Bild $f(A)$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist. Das heißt, es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ derart, dass $|f(x)| \le C$ für alle $x \in A$. □

Beispiel 8.7 Abstand zwischen beschränkten Abbildungen. Sei $E := \mathcal{B}(A)$ die Menge aller beschränkten Abbildungen von A in $\mathbb{R}$. Sind $f, g \in E$, so ist offenbar auch $f - g \in E$. Wir setzen

$$d(f, g) := \sup_{x \in A} |(f - g)(x)|.$$

Dann ist $(\mathcal{B}(A), d)$ ein metrischer Raum.

Beweis. Wegen des Betrages gilt $d(f, g) \ge 0$. Die in $\mathbb{R}$ beschränkte Menge $|(f - g)(A)|$ hat eine kleinste (endliche) obere Schranke, die nicht negativ ist. Somit ist $d : E \times E \to \mathbb{R}_0^+$.

Die ersten beiden Eigenschaften der Metrik sind für d einfach zu sehen.

Zum Beweis der Dreiecksungleichung wird die Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}$ genutzt, sowie dass $d(f, h)$ und $d(h, g)$ Schranken für $|(f - h)(x)|$ beziehungsweise $|(h - g)(x)|$ für jedes $x \in A$ sind. Deshalb gilt für jedes $x \in A$

$$\begin{aligned} |(f - g)(x)| &= |(f - h)(x) - (h - g)(x)| \le |(f - h)(x)| + |(h - g)(x)| \\ &\le \sup_{x \in A} |(f - h)(x)| + \sup_{x \in A} |(h - g)(x)| = d(f, h) + d(h, g). \end{aligned}$$

Diese Ungleichung bedeutet, dass $d(f, h) + d(h, g)$ eine obere Schranke für das Bild $|(f - g)(A)|$ ist. Die kleinste obere Schranke $d(f, g)$ von $|(f - g)(A)|$ kann jedoch höchstens gleich dieser oberen Schranke sein, sonst wäre es nicht die kleinste, das heißt

$$d(f, g) \le d(f, h) + d(h, g).$$

Dieses Beispiel zeigt, dass man Abstände zwischen Abbildungen definieren kann. Diese Definition basiert letztlich auf der Metrik in $\mathbb{R}$. □

Definition 8.8 Produktmetrik. Es seien (E_i, d_i), $i = 1, \ldots, m$, metrische Räume und E das Produkt $E = E_1 \times \ldots \times E_m$. Dann wird durch

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max_{1 \le i \le m} d_i(x_i, y_i)$$

für $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) \in E$ eine Metrik auf E definiert, die sogenannte Produktmetrik. □

Beispiel 8.9 Dritte Metrik auf $\mathbb{R}^3$. Der durch die Produktmetrik

$$d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \max_{1 \le i \le 3} |x_i - y_i|, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3,$$

erzeugte metrische Raum ist von dem durch den euklidischen Abstand auf $\mathbb{R}^3$ erzeugten metrischen Raum verschieden. Die Metrik $d_\infty(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ misst die längste Kante im Quader von Abbildung 8.1, währenddessen die Euklidische Metrik die Länge der Diagonalen misst.

Am $\mathbb{R}^3$ sieht man, dass man für eine Menge unterschiedliche Abstandsbegriffe verwenden kann, womit man unterschiedliche metrische Räume erhält.

Übungsaufgabe: Metriken des $\mathbb{R}^3$ gegeneinander abschätzen □

Definition 8.10 Induzierte Metrik. Seien (E, d) ein metrischer Raum und $A \subset E$. Dann genügt offenbar die Einschränkung von d auf $A \times A$ den Eigenschaften einer Metrik und $(A, d|_{A \times A})$ ist ein metrischer Raum. Die Einschränkung $d|_{A \times A}$ heißt die von d auf A induzierte Metrik. □

8.2 Kugeln, Sphären, Durchmesser und Abstand von Mengen

Definition 8.11 Kugel, Sphäre. Seien (E, d) ein metrischer Raum, $a \in E$ und $r \in \mathbb{R}^+$. Dann heißen die Mengen

$$\begin{array}{rcll} B(a,r) & := & \{x \in E \ : \ d(x,a) < r\} & \text{offene Kugel,} \\ \overline{B}(a,r) & := & \{x \in E \ : \ d(x,a) \le r\} & \text{abgeschlossene Kugel,} \\ S(a,r) & := & \{x \in E \ : \ d(x,a) = r\} & \text{Sphäre,} \end{array}$$

um a mit Radius r. □

Beispiel 8.12 $\mathbb{R}$. Seien $E = \mathbb{R}$ und $d(x,y) = |x - y|$. Dann stimmen die offene Kugel, die abgeschlossene Kugel beziehungsweise die Sphäre mit folgenden Mengen überein:

$$B(a,r) = (a - r, a + r), \ \overline{B}(a,r) = [a - r, a + r], \ S(a,r) = \{a - r, a + r\}.$$

□

Beispiel 8.13 $\mathbb{R}^2$. Seien $E = \mathbb{R}^2$, d_1 der Manhattan–Abstand und d_2 der euklidische Abstand. Dann sind $B(\mathbf{a}, r)$ in (E, d_2) die Menge aller Punkte im Inneren eines Kreises mit dem Mittelpunkt in $\mathbf{a}$ und dem Radius r. Im Gegensatz dazu sind $B(\mathbf{a}, r)$ in (E, d_1) die Menge aller Punkte im Inneren eines auf die Spitze gestellten Quadrates um $\mathbf{a}$ mit der Seitenlänge $r\sqrt{2}$, vergleiche Abbildung 8.2.

□

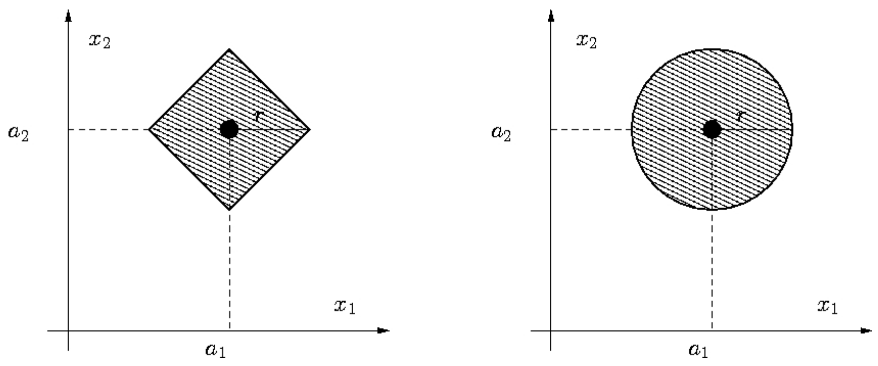

Abbildung 8.2: $B(\mathbf{a}, r)$ in der Manhatten–Metrik $d_1(\cdot,\cdot)$ (links) und in der Euklidischen Metrik $d_2(\cdot,\cdot)$ (rechts).

Definition 8.14 Abstand von Mengen. Seien $A, B \subset E$ und (E, d) ein metrischer Raum. Unter dem Abstand der Mengen A und B versteht man die nichtnegative Zahl

$$d(A, B) := \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y).$$

Falls eine Menge nur aus einem Punkt x besteht, spricht man vom Abstand des Punktes x zur Menge A und man schreibt

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

$\square$

Definition 8.15 Beschränkte Menge, Durchmesser. Eine Teilmenge $A \subset E$ heißt im metrischen Raum (E, d) beschränkt, wenn es eine Konstante $M > 0$ derart gibt, dass $d(x, y) \le M$ für alle $x, y \in A$ gilt. Für eine beschränkte Menge A ist der Durchmesser von A

$$\mathrm{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} d(x, y)$$

endlich. $\square$

8.3 Offene und abgeschlossene Mengen

Definition 8.16 Offene Menge. Eine Teilmenge $A \subset E$ eines metrischen Raumes heißt offen, wenn es zu jedem ihrer Punkte $x \in A$ eine offene Kugel $B(x, r)$ gibt, die ganz in A liegt, das heißt $B(x, r) \subset A$. $\square$

Beispiel 8.17 Die leere Menge $\emptyset$ und E sind in jedem metrischen Raum (E, d) offen. $\square$

Satz 8.18 *Im metrischen Raum (E, d) ist jede offene Kugel eine offene Menge.*

Beweis: Seien $A = B(a, r)$ und $x \in A$ beliebig. Da $d(x, a) < r$, ist $r_1 := r - d(x, a) > 0$. Wir betrachten die Kugel $B(x, r_1)$. Sei $y \in B(x, r_1)$ beliebig, dann gilt wegen der Dreiecksungleichung

$$d(y, a) \le d(y, x) + d(x, a) < r_1 + d(x, a) = r.$$

Also gilt $y \in B(a, r) = A$ und somit $B(x, r_1) \subset B(a, r)$. $\blacksquare$

Satz 8.19 Vereinigung beliebig vieler offener Mengen. *Die Vereinigung jeder Familie* $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, Λ *– Indexmenge, offener Mengen* A_λ *ist offen.*

Beweis: Sei $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Dann gibt es mindestens ein $\lambda_0 \in \Lambda$ mit $x \in A_{\lambda_0}$. Nun ist A_{λ_0} offen, das heißt es gibt eine offene Kugel $B(x,r)$, die ganz in A_{λ_0} enthalten ist. Also gilt

$$B(x,r) \subset A_{\lambda_0} \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda,$$

was zu zeigen war. ■

Satz 8.20 Durchschnitt endlich vieler offener Mengen. *Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.*

Beweis: Ist der Durchschnitt leer, dann ist er offen, siehe Beispiel 8.17.

Seien nun A_i, $i = 1,\ldots,n$, offen und der Durchschnitt dieser Mengen nicht leer. Dann kann man ein beliebiges $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i$ wählen. Da x in jeder der offenen Mengen A_i liegt, gibt es n offene Kugeln $B(x,r_i)$, $i = 1,\ldots,n$, die jeweils ganz in A_i liegen, das heißt $B(x,r_i) \subset A_i$, $i = 1,\ldots,n$. Sei $r := \min_{1\le i\le n} r_i > 0$, dann folgt aus $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset A_i$ für jedes $i = 1,\ldots,n$. Damit gilt

$$B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^n A_i,$$

was zu beweisen war. ■

Beispiel 8.21 Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen. Der Durchschnitt unendlich vieler offener Mengen ist nicht notwendig offen sein. Seien beispielsweise $E = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ und $A_n = (-1/n, 1/n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die offenen Intervalle A_n offen und für den Durchschnitt gilt $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}$. Es gibt jedoch keine offen Kugel $B(0,r)$ die ganz im Durchschnitt der Mengen A_n liegt. □

Definition 8.22 Abgeschlossene Menge. Eine Teilmenge $A \subset E$ eines metrischen Raumes heißt abgeschlossen, wenn das Komplement von A bezüglich E

$$\overline{A}^E := \{x \in E \ : \ x \notin A\}$$

offen ist. □

Folgerung 8.23 Eigenschaften abgeschlossener Mengen. *Die Mengen* $E = \overline{\emptyset}^E$ *und* $\emptyset = \overline{E}^E$ *sind abgeschlossen. Der Durchschnitt einer beliebigen Familie abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen.*

Beweis: Der Beweis der obigen Aussagen basiert auf den de Morgan[1]schen Gesetzen

$$\overline{\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda}^E = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}^E, \qquad \overline{\bigcup_{i=1}^n A_i}^E = \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}^E.$$

■

Bemerkung 8.24 In einem metrischen Raum gibt es Mengen, die

- offen und abgeschlossen sind, zum Beispiel $E, \emptyset$,
- offen und nicht abgeschlossen sind, zum Beispiel $(0,1)$ in $\mathbb{R}$,

[1] de Morgan

- nicht offen aber abgeschlossen sind, zum Beispiel $[0,1]$ in $\mathbb{R}$,
- weder offen noch abgeschlossen sind, zum Beispiel $(0,1]$ in $\mathbb{R}$.

□

Satz 8.25 Abgeschlossene Kugeln, Sphären. *Im metrischen Raum (E,d) sind die abgeschlossenen Kugeln $\overline{B}(a,r)$ und die Sphären $S(a,r)$ abgeschlossene Mengen.*

Beweis: Man muss zeigen, dass die jeweiligen Komplemente offen sind.

Wir betrachten zuerst die abgeschlossene Kugel. Sei $x \in \overline{\overline{B}(a,r)}^E$, das heißt $d(x,a) > r$. Setze $\rho := d(x,a) - r > 0$. Dann ist

$$B(x,\rho) \cup \overline{B}(a,r) = \emptyset,$$

denn für jedes $y \in B(x,\rho)$ gilt

$$d(x,a) \le d(x,y) + d(y,a) < \rho + d(y,a) = d(x,a) - r + d(y,a),$$

woraus durch Umstellen $r < d(y,a)$ folgt. Also gibt es eine offen Kugel um x, die ganz im Komplement von $\overline{B}(a,r)$ liegt.

Das Komplement der Sphäre $S(a,r)$ ist die Vereinigung der offenen Mengen $B(a,r)$ und $\overline{\overline{B}(a,r)}^E$ und somit offen. ■

8.4 Folgen in metrischen Räumen

Bemerkung 8.26 Motivation. Mit Hilfe des Abstandes (der Metrik) kann man in beliebigen metrischen Räumen (E,d) Folgen $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in E$, betrachten. Viele Eigenschaften von Folgen reeller Zahlen übertragen sich fast wörtlich, indem man den Betrag durch die Metrik ersetzt. □

Definition 8.27 Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen. Eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n \in E$, heißt im metrischen Raum konvergent gegen $x_0 \in E$, wenn zu jeder vorgegebenen Toleranzschranke $\varepsilon > 0$ eine Indexschranke $n_0(\varepsilon)$ existiert, so dass für alle $n > n_0(\varepsilon)$ gilt, dass $d(x_n, x_0) < \varepsilon$. Man schreibt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \quad \text{oder} \quad x_n \to x_0 \text{ in } E.$$

□

Beispiel 8.28 Konvergenz von Folgen in metrischen Räumen.

- Die obige Definition wurde bereits bei Folgen komplexer Zahlen angewandt, siehe Kapitel 1.2. Betrachte den Raum $(\mathbb{C}, d)$ mit $d(z_1,z_2) = |z_1 - z_2|$ und die Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$z_n = \frac{n+2}{n+1} + i\frac{2n}{n+2}.$$
Diese Folge konvergiert gegen $z_0 = 1 + 2i$, denn es ist
$$\begin{aligned} d(z_n,z_0) &= \left|\frac{n+2}{n+1} + i\frac{2n}{n+2} - (1+2i)\right| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{4i}{n+2}\right| \\ &= \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{16}{(n+2)^2}} < \sqrt{\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{16}{(n+1)^2}} = \frac{\sqrt{17}}{n+1} < \varepsilon \end{aligned}$$
für $n > \sqrt{17}/\varepsilon - 1$ also $n_0(\varepsilon) = [\sqrt{17}/\varepsilon]$ (größter ganzer Bestandteil).

- Betrachte den metrischen Raum $(\mathbb{R}^2, d_1)$ mit der Folge $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und

$$\mathbf{x}_n = \left(\frac{2n+1}{3n-7}, \frac{n^2+4}{7n^2+5n}\right).$$

Diese Folge konvergiert gegen $\mathbf{x}_0 = (2/3, 1/7)$, denn

$$\begin{aligned} d_1(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_0) &= \left|\frac{2n+1}{3n-7} - \frac{2}{3}\right| + \left|\frac{n^2+4}{7n^2+5n} - \frac{1}{7}\right| \\ &= \left|\frac{2+\frac{1}{n}}{3-\frac{7}{n}} - \frac{2}{3}\right| + \left|\frac{1+\frac{4}{n^2}}{7+\frac{5}{n}} - \frac{1}{7}\right| \to 0 \end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Diese Folge konvergiert in den metrischen Räumen $(\mathbb{R}^2, d_2)$ und $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$ gegen denselben Grenzwert.

□

Satz 8.29 Eigenschaften konvergenter Folgen.

i) *Im metrischen Raum ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt.*

ii) *Im metrischen Raum ist jede konvergente Folge beschränkt.*

iii) *Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in einem metrischen Raum mit dem Grenzwert x_0. Dann ist auch jede Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x_0$.*

Beweis: Die Beweise sind analog zu reellwertigen Folgen, mit dem Betrag ersetzt durch die Metrik, Übungsaufgabe. ■

Definition 8.30 Cauchy–Folge. Eine Folge im metrischen Raum heißt Cauchy–Folge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ existiert, so dass für alle $m, n \ge n_0(\varepsilon)$ gilt $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. □

Satz 8.31 Notwendiges Konvergenzkriterium. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy–Folge.*

Beweis: Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0 konvergent. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon/2)$, so dass für alle $n > n_0$ gilt $d(x_n, x_0) < \varepsilon/2$. Dann folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung für alle $m, n \ge n_0$

$$d(x_m, x_n) \le d(x_m, x_0) + d(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

Beispiel 8.32 Gegenbeispiel für Umkehrung von Satz 8.31. Die Umkehrung von Satz 8.31 gilt nicht. Im metrischen Raum der rationalen Zahlen $\mathbb{Q} := (\mathbb{Q}, |\cdot|)$ sei eine Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \ x_1 = 2,$$

gegeben. Diese Folge konvergiert in Raum der rellen Zahlen gegen $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, Übungsaufgabe. Damit ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$ und somit auch in $\mathbb{Q}$. Sie konvergiert aber nicht in $\mathbb{Q}$, da sie dort keinen Grenzwert besitzt. □

Satz 8.33 Konvergente Teilfolgen von Cauchy–Folgen. *Besitzt eine Cauchy–Folge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent.*

Beweis: Übungsaufgabe. ■

8.5 Vollständige metrische Räume

Definition 8.34 Vollständiger metrischer Raum. Ein metrischer Raum (E, d) heißt vollständig, wenn in ihm jede Cauchy–Folge konvergiert. □

Bemerkung 8.35 Nach Beispiel 8.32 ist der Raum der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ nicht vollständig. □

Satz 8.36 Vollständigkeit der reellen Zahlen. *Der metrische Raum der reellen Zahlen ist vollständig.*

Beweis: Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}$, das heißt für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0(\varepsilon)$ so dass für alle $m, n \ge n_0(\varepsilon)$ gilt $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Mit Hilfe dieser Folge wird nun eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen definiert durch

1. n_1 sei die kleinste Zahl, so dass für alle $m, n \ge n_1$ gilt $|x_m - x_n| < \frac{1}{4}$,
2. $n_2 > n_1$ sei die kleinste Zahl, so dass für alle $m, n \ge n_2$ gilt $|x_m - x_n| < \frac{1}{8}$,

$\vdots$

k. $n_k > n_{k-1}$, so dass für alle $m, n \ge n_k$ gilt $|x_m - x_n| < \frac{1}{2^{k+1}}$.

Betrachte nun die Folge der abgeschlossenen Intervalle

$$I_k := \left[x_{n_k} - \left(\frac{1}{2}\right)^k, x_{n_k} + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right].$$

Nach Definition der n_k gilt, da $n_{k+1} > n_k$ ist,

$$\left|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right| < \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} \quad \Longleftrightarrow \quad x_{n_k} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < x_{n_{k+1}} < x_{n_k} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

Hieraus folgt

$$x_{n_k} - \left(\frac{1}{2}\right)^k = x_{n_k} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = x_{n_k} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < x_{n_{k+1}} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

und analog

$$x_{n_{k+1}} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} < x_{n_k} + \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

Das bedeutet, die linke Grenze des Intervalls I_{k+1} ist größer als die linke Grenze von I_k und die rechte Grenze von I_{k+1} ist kleiner als die rechte Grenze von I_k, also $I_{k+1} \subset I_k$. Weiter gilt $|I_k| \to 0$ für $k \to \infty$. Somit bilden die $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung. Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es genau eine reelle Zahl $x_0 \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Nach Definition liegt x_{n_k} in I_k für jedes k. Wegen

$$|x_{n_k} - x_0| \le \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

konvergiert die Teilfolge $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ der Cauchy–Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x_0 \in \mathbb{R}$. Nach Satz 8.33 konvergiert damit die Cauchy–Folge ebenfalls gegen x_0. ■

Satz 8.37 Vollständigkeit der komplexen Zahlen. *Der metrische Raum der komplexen Zahlen ist vollständig.*

Beweis: Das folgt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ und den Sätzen 1.15 und 1.17. ■

Satz 8.38 Vollständigkeit des Produktraumes. *Seien die metrischen Räume (E_i, d_i), $i = 1, \ldots, s$, vollständig. Dann ist der Produktraum $E = E_1 \times \ldots \times E_s$ bezüglich der Produktmetrik vollständig.*

Beweis: Sei $\{\mathbf{x}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge in (E,d), das heißt für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0(\varepsilon)$, so dass für alle $m,n \geq n_0(\varepsilon)$ gilt $d(\mathbf{x}^m,\mathbf{x}^n) < \varepsilon$. Wegen

$$d_i(x_i,y_i) \leq \max_{1\leq j\leq s} d_j\left(x_j,y_j\right) = d(\mathbf{x},\mathbf{y}), \quad i=1,\ldots,s,$$

hat man für alle $m,n \geq n_0(\varepsilon)$ und für jedes $i=1,\ldots,s$

$$d_i\left(x_i^m,x_i^n\right) < \varepsilon.$$

Das bedeutet, die Folge $\{x_i^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy–Folge in (E_i,d_i) für jedes $i=1,\ldots,s$. Da (E_i,d_i) vollständig ist, gibt es einen Grenzwert in E_i

$$\lim_{n\to\infty} x_i^n = x_i^0 \in E_i, \quad i=1,\ldots,s.$$

Nun zeigt man, dass $\{\mathbf{x}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in E gegen $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right) \in E$ konvergiert. Zu jeder Toleranzschranke $\varepsilon > 0$ gibt es eine Indexschranke $n_{0,i}(\varepsilon)$, $i=1,\ldots,s$, so dass für alle $n \geq n_{0,i}(\varepsilon)$ gilt $d_i\left(x_i^n,x_i^0\right) < \varepsilon$. Setze $N(\varepsilon) = \max_{1\leq i\leq s} n_{0,i}(\varepsilon)$. Dann gilt

$$d(\mathbf{x}^n,\mathbf{x}^0) = \max_{1\leq i\leq s} d_i\left(x_i^n,x_i^0\right) < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N(\varepsilon).$$

■

Folgerung 8.39 Vollständigkeit von $(\mathbb{R}^s,d_\infty)$**.** *Der metrische Raum* $(\mathbb{R}^s,d_\infty)$ *ist vollständig.*

Beispiel 8.40 Die Folge $\{\mathbf{x}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\mathbf{x}^n = \left(1, \frac{n+1}{n}, \frac{1-n}{n}, -2\right)$$

ist eine Cauchy–Folge in $\mathbb{R}^4$. Sei o.B.d.A. $m < n$, dann gilt nämlich

$$\begin{aligned} d_\infty\left(\mathbf{x}^m,\mathbf{x}^n\right) &= \max_{1\leq i\leq 4} |x_i^m - x_i^n| = \max\left\{0, \left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|, \left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|, 0\right\} \\ &= \left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m}+\frac{1}{n} < \frac{2}{m} < \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $m > 2/\varepsilon$. Damit ist sie konvergent. Für den Grenzwert betrachtet man die Folgen der Komponenten, ähnlich wie im Beweis von Satz 8.38. Man erhält $\mathbf{x}^0 = (1,1,-1,-2)$. □

Bemerkung 8.41 Vollständigkeit von $\mathbb{R}^s$ **mit anderen Metriken.** Die Räume $(\mathbb{R}^s,d_1)$ und $(\mathbb{R}^s,d_2)$ sind ebenfalls vollständig. Das liegt daran, dass d_1,d_2,d_∞ äquivalente Metriken des $\mathbb{R}^s$ sind. Äquivalenz zweier Metriken bedeutet, dass man jede der beiden Metriken mit der anderen nach oben und unten abschätzen kann, siehe Übungsaufgaben. Aus der Äquivalenz folgt, dass eine Folge in $(\mathbb{R}^s,d_\infty)$ genau dann eine Cauchy–Folge ist, wenn sie auch in $(\mathbb{R}^s,d_1)$ und $(\mathbb{R}^s,d_2)$ eine Cauchy–Folge ist. Analog ist eine Folge in $(\mathbb{R}^s,d_\infty)$ genau dann konvergent, wenn sie auch in $(\mathbb{R}^s,d_1)$ und $(\mathbb{R}^s,d_2)$ konvergent ist. □

8.6 Normierte Räume

Bemerkung 8.42 Motivation. Bislang wurde auf einer beliebigen Menge E ein Abstand (eine Metrik) definiert. Nun wird der Fall betrachtet, dass E ein Vektorraum ist und man in diesem Raum die Größe eines Elementes definieren will. □

Definition 8.43 Norm. Sei K ein Körper. Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum E ist eine Abbildung $E \to \mathbb{R}_0^+$ mit folgenden Eigenschaften

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, $\forall \, x \in E, \forall \, \lambda \in K$,
3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$, $\forall \, x, y \in E$ (Dreiecksungleichung).

□

Folgerung 8.44 Beziehung zwischen Norm und Metrik. *Ist $x \mapsto \|x\|$ eine Norm auf E, so ist $d \ : \ E \times E \to \mathbb{R}_0^+$ mit $d(x,y) = \|x - y\|$ eine Metrik auf E.*

Beweis: Man prüft die Eigenschaften einer Metrik, Definition 8.4, unmittelbar nach. ■

Beispiel 8.45 Nicht jede Metrik induziert eine Norm, diskreter metrischer Raum. Sei $E = \mathbb{R}$. Die Festsetzung

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } x \neq y, \end{cases}$$

definiert auf $\mathbb{R}$ eine Metrik (Übungsaufgabe) und $(\mathbb{R}, d)$ wird diskreter metrischer Raum genannt. Diese Metrik induziert keine Norm $\| \cdot \|$. Für alle $x \neq 0$ gilt

$$\|x\| = \|x - 0\| = d(x,0) = 1$$

falls $\| \cdot \|$ die induzierte Norm wäre. Nach Eigenschaft 2 einer Norm gilt aber auch

$$\|x\| = \|x \cdot 1\| = |x| \, \|1\| = |x| \neq 1$$

für $|x| \neq 1$. □

Beispiel 8.46 Normen in $\mathbb{R}^n$. Im Raum $\mathbb{R}^n$ werden durch

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i| \, , \quad \|\mathbf{x}\|_2 := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} , \quad \|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

verschiedene Normen eingeführt. Insbesondere induzieren $\|\cdot\|_1$ die Manhattan–Metrik, $\|\cdot\|_2$ die Euklidische Metrik und $\|\cdot\|_\infty$ die Produktmetrik. □

Definition 8.47 Banach–Raum. Ein vollständiger normierter Raum heißt Banach[2]–Raum. □

[2]Stefan Banach (1892 – 1945)

Kapitel 9

Stetigkeit vektorwertiger Funktionen

Bemerkung 9.1 Motivation. Vektorwertige Funktionen mehrerer Variabler treten in der Physik zum Beispiel bei der Betrachtung von Kraftfeldern auf. Dabei wirkt in jedem Punkt eines Gebietes $D \subset \mathbb{R}^3$ eine gerichtete Kraft, die ebenfalls drei Komponenten besitzt. Man hat also eine Abbildung $\mathbf{f} : D \to \mathbb{R}^3$.

Einer vektorwertige Funktion $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ entsprechen genau m skalare Funktionen $f_i : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$,

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(x_1, \ldots, x_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{ccccc} y_1 & = & f_1(\mathbf{x}) & = & f_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ y_m & = & f_m(\mathbf{x}) & = & f_m(x_1, \ldots, x_n) \end{array}.$$

□

Beispiel 9.2 Eine vektorwertige Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^3$ ist beispielsweise gegeben durch $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathbf{f} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 y \sin(xy) \\ x + \cos y \\ e^{xy^2} \end{pmatrix}.$$

□

Definition 9.3 Stetigkeit vektorwertiger Funktionen. Seien $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $\boldsymbol{\xi} \in D$, D offen. Dann heißt $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ im Punkte $\boldsymbol{\xi}$ stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ existiert mit

$$\max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i - \xi_i| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \max_{j \in \{1,\ldots,m\}} |f_j(\mathbf{x}) - f_j(\boldsymbol{\xi})| < \varepsilon,$$

oder in Normschreibweise

$$\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}\|_\infty < \delta \quad \Longrightarrow \quad \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})\|_\infty < \varepsilon.$$

□

Bemerkung 9.4 Grenzwertdefinition. Genauso wie für skalare Funktionen einer reellen Veränderlichen lässt sich die Stetigkeit auch mit Hilfe von Grenzwerten definieren. Eine Funktion $\mathbf{f} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, D offen, ist für $\boldsymbol{\xi} \in D$ stetig, wenn für jede Folge $\{\mathbf{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\mathbf{x}_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$, mit

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_n = \boldsymbol{\xi} \iff \lim_{n\to\infty} \left(\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_{n,i} - \xi_i| \right) = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{x}_n - \boldsymbol{\xi}\|_\infty = 0$$

gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}) \quad &\iff \quad \lim_{n\to\infty} \max_{j\in\{1,\ldots,m\}} |f_j(\mathbf{x}_n) - f_j(\boldsymbol{\xi})| = 0 \\ &\iff \quad \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) - \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi})\|_\infty = 0. \end{aligned}$$

Man kann genauso gut die Euklidische Norm nehmen. Im Unterschied zum Fall $n = 1$, bei welchem sich die Argumente x_n nur auf einer Geraden dem Punkt ξ nähern, nämlich auf der x–Achse, können sich im Fall $n > 1$ die Punkte irgendwie nähern. (Bild) □

Die Stetigkeit vektorwertiger Funktionen lässt sich direkt durch die Stetigkeit der einzelnen Komponenten untersuchen.

Satz 9.5 Stetigkeit ist komponentenweise Stetigkeit. *Die vektorwertige Funktion* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *ist im Punkt* $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ *genau dann stetig, wenn jede Komponente* $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, *in* $\boldsymbol{\xi}$ *stetig ist.*

Beweis: Sei zunächst $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ in $\boldsymbol{\xi}$ stetig. Dann gilt für $\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i - \xi_i| < \delta$

$$\varepsilon > \max_{j\in\{1,\ldots,m\}} |f_j(\mathbf{x}) - f_j(\boldsymbol{\xi})| \ge |f_k(\mathbf{x}) - f_k(\boldsymbol{\xi})|$$

für jede Komponente $f_k(\mathbf{x})$. Damit ist jede Komponente stetig.

Sei umgekehrt jede Komponente $f_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \ldots, m$, eine stetige Funktion. Das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta_k(\varepsilon) > 0$, so dass

$$\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i - \xi_i| < \delta_k(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad |f_k(\mathbf{x}) - f_k(\boldsymbol{\xi})| < \varepsilon.$$

Setzt man $\delta(\varepsilon) := \min_{k\in\{1,\ldots,m\}} \delta_k(\varepsilon)$, so gilt

$$\max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i - \xi_i| < \delta(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \max_{k\in\{1,\ldots,m\}} |f_k(\mathbf{x}) - f_k(\boldsymbol{\xi})| < \varepsilon.$$

Das ist die Stetigkeit von $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ in $\boldsymbol{\xi}$. ■

Beispiel 9.6 Die Funktion aus Beispiel 9.2 ist für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ stetig, weil alle drei Komponenten stetige Funktionen sind. □

Bemerkung 9.7 Rechenregeln für Grenzwerte. Viele Rechenregeln für Grenzwerte übertragen sich von skalaren auf vektorwertige Funktionen. Seien zum Beispiel $\mathbf{f}, \mathbf{g} : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\xi} \in D$, dann gilt

$$\lim_{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}\in D} \big(\alpha\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta\mathbf{g}(\mathbf{x})\big) = \alpha \lim_{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}\in D} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \beta \lim_{\mathbf{x}\to\boldsymbol{\xi},\mathbf{x}\in D} \mathbf{g}(\mathbf{x}).$$

□