# Kapitel 4

# Der Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung

**Bemerkung 4.1 Motivation.** Die Integrationstheorie wurde im letzten Kapitel recht weit entwickelt. Nun wird ein Werkzeug bereitgestellt, mit welchem man Integrale auch wirklich berechnen kann. □

**Satz 4.2 Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung, 1. Version.** *Sei $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist das unbestimmte Integral*

$$F\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}, \quad F(x) := \int_a^x f(t)\ dt$$

*stetig differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$.*

**Beweis:** Seien $x \in [a,b]$ und $h \neq 0$, so dass $x + h \in [a,b]$. Dann gilt nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung, Satz 3.45,

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt = \int_x^{x+h} f(t)\ dt = hf(\xi_h),$$

mit $\xi_h$ zwischen $x$ und $x + h$. Mit $h \to 0$ ist $\xi_h \to x$ und da $f(x)$ stetig ist, folgt $f(\xi_h) \to f(x)$.

Das zeigt insbesondere the Existenz des folgenden Grenzwerts

$$f(x) = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x),$$

nach Definition der Ableitung. ■

**Bemerkung 4.3** Die bloße Riemann–Integrierbarkeit von $f(x)$ reicht nicht für den Hauptsatz. Man braucht mehr, etwa Stetigkeit von $f(x)$. □

**Satz 4.4 Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung, 2. Version.** *Seien $F\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar mit $F'(x) = f(x)$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

*Ist $G(x)$ eine weitere differenzierbare Funktion mit $G'(x) = f(x)$, so existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in [a,b]$ gilt $G(x) = F(x) + c$.*

**Beweis:** Sei $Z\ :\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = b$ irgendeine Zerlegung von $[a,b]$. Dann gilt (Teleskopsumme, Zieharmonikasumme)

$$F(b) - F(a) = \sum_{j=1}^{k} (F(x_j) - F(x_{j-1})) = \sum_{j=1}^{k} \frac{F(x_j) - F(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} (x_j - x_{j-1}) .$$

Nun kann man die Differenzenquotienten mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung umschreiben. Betrachte $[x_{j-1}, x_j]$, dann exisitiert ein $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, so dass

$$\frac{F(x_j) - F(x_{j-1})}{x_j - x_{j-1}} = F'(\xi_j) = f(\xi_j).$$

Mit den Stützpunkten $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ erhält man also

$$F(b) - F(a) = \sigma(f, Z, \boldsymbol{\xi}).$$

Mit $\delta(Z) \to 0$ liefert Satz 3.32 auf Grund der vorausgesetzten Riemann–Integrabilität von $f(x)$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\ dx.$$

Die Eindeutigkeit der Stammfunktion bis auf eine additive Konstante ergibt sich aus $(F - G)'(x) = f(x) - f(x) = 0$. In Analysis I wurde gezeigt, dass nur bei konstanten Funktionen die Ableitung verschwindet (Folgerung aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung). Also ist $(F - G)(x) = c$. ■

**Definition 4.5 Stammfunktion, unbestimmtes Integral.** Sei $f\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann–integrierbar. Dann nennt man jede differenzierbare Funktion $F\ :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktion von $f(x)$. Unter dem unbestimmten Integral von $f(x)$ versteht man auch

$$\int f(x)\ dx = \{F\ :\ [a,b] \to \mathbb{R},\ F(x) \text{ ist Stammfunktion von } f(x)\}$$

und schreibt lax

$$\int f(x)\ dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

wobei $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist. □

**Beispiel 4.6 Beispiele von unbestimmten Integralen.**

- Für $F(x) = \exp(x^2)$ ist $F'(x) = 2x\exp(x^2)$, also gilt

  $$\int xe^{x^2}\ dx = \frac{1}{2}\exp(x^2) + c.$$

  Nach dem Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung folgt insbesondere

  $$\int_0^1 xe^{x^2}\ dx = \left(\frac{1}{2}\exp(1^2) + c - \left(\frac{1}{2}\exp(0^2) + c\right)\right) = \frac{1}{2}(e-1).$$

  Die Funktion $F(x)$ ist nicht elementar integrierbar.
- Es gilt

  $$\int \tan x\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\ dx = -\ln(|\cos x|) + c,\ x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

- Liste von Grundintegralen:

$$
\begin{array}{lcll}
\displaystyle\int x^n \; dx & = & \displaystyle\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c, & n \neq -1, \\
\displaystyle\int \frac{1}{x} \; dx & = & \ln|x| + c, & x \neq 0, \\
\displaystyle\int \sin x \; dx & = & -\cos x + c, & \\
\displaystyle\int \cos x \; dx & = & \sin x + c, & \\
\displaystyle\int \tan x \; dx & = & -\ln|\cos x| + c, & \cos x \neq 0, \\
\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x} \; dx & = & \tan x + c, & x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \in \mathbb{Z}, \\
\displaystyle\int e^{ax} \; dx & = & \displaystyle\frac{1}{a}e^{ax} + c, & a \neq 0, \\
\displaystyle\int \ln x \; dx & = & x(\ln x - 1) + c, & x > 0, \\
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \; dx & = & \arcsin x + c, & |x| < 1, \\
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \; dx & = & \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c, & |x| > 1, \\
\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \; dx & = & \ln\left|x + \sqrt{1+x^2}\right| + c, & \\
\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \; dx & = & \arctan x + c, & \\
\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2} \; dx & = & \displaystyle\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c, & |x| \neq 1.
\end{array}
$$

Die Richtigkeit dieser Formel kann man einfach durch Differentiation der Stammfunktion überprüfen. Weitere Beispiele findet man in Formelsammlungen, zum Beispiel im Bronstein u.a. *Taschenbuch der Mathematik*.

Beim Integrieren kann man sich leicht verrechnen. Darum führt man immer die Probe aus, indem man die berechnete Stammfunktion differenziert ! □

**Bemerkung 4.7 Integration rationaler Funktionen.** Bei der Integration (echter) rationaler Funktionen ist die Herangehensweise relativ klar. Mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung wird das Integral auf eine Summe von Integralen mit linearen und quadratischen Termen im Nenner zurückgeführt. Dann kann man für die einzelnen Terme Stammfunktionen finden, die Logarithmen oder den Arcustangens enthalten. □

**Beispiel 4.8 Integration rationaler Funktionen.** Betrachte

$$\int \frac{1}{x^2 - 5x + 6} \; dx.$$

Zunächst muss man die Nullstellen des Nenners berechnen. Man erhält $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, woraus die Faktorisierung $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ folgt. Das führt zu folgendem Ansatz

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)(x-3)} = \frac{(A+B)x + (-3A-2B)}{x^2 - 5x + 6}.$$

Die unbekannten Koeffizienten $A$, $B$ kann man durch Koeffizientenvergleich bestimmen

$$A + B = 0, \quad -3A - 2B = 1 \quad \Longrightarrow \quad B = 1, A = -1.$$

Man hat also ein lineares Gleichungssystem zu lösen. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2-5x+6} &= \frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3} \quad \Longrightarrow \\
\int \frac{1}{x^2-5x+6}\ dx &= -\int \frac{1}{x-2}\ dx + \int \frac{1}{x-3}\ dx \\
&= -\ln|x-2| + \ln|x-3| + c \\
&= \ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + c \quad x \notin \{2,3\}.
\end{aligned}$$

□

**Satz 4.9 Partielle Integration.** *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx = \underbrace{\left(f(x)g(x)\right)\Big|_{x=a}^{x=b}}_{f(b)g(b)-f(a)g(a)} - \int_a^b f(x)g'(x)\ dx.$$

**Beweis:** Das Produkt $(fg)(x)$ ist stetig differenzierbar und nach der Produktregel gilt

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Die rechte Seite ist in $[a,b]$ stetig, insbesondere nach Satz 3.27 Riemann–integrierbar. Nach Satz 4.4 ist $(fg)(x)$ die Stammfunktion von $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ und es gilt

$$\int_a^b f'(x)g(x)\ dx + \int_a^b f(x)g'(x)\ dx = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

■

**Beispiel 4.10 Partielle Integration.**

- $$\int \underbrace{x}_{g}\underbrace{e^x}_{f'}\ dx = \underbrace{x}_{g}\underbrace{e^x}_{f} - \int \underbrace{1}_{g'}\underbrace{e^x}_{f}\ dx = xe^x - e^x + c.$$
- $$\int \ln x\ dx = \int \underbrace{1}_{f'}\underbrace{\ln x}_{g}\ dx = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\ dx = x\ln x - x + c.$$
- $$\begin{aligned}
\int \sin^2 x\ dx &= \int \underbrace{\sin x}_{g}\underbrace{\sin x}_{f'}\ dx = \sin x(-\cos x) + \int \cos^2 x\ dx \\
&= -\sin x\cos x + \int \left(1-\sin^2 x\right)\ dx
\end{aligned}$$

  Man bringt nun das Integral mit $\sin^2 x$ auf die linke Seite und erhält

  $$\begin{aligned}
2\int \sin^2 x\ dx &= -\sin x\cos x + \int dx \quad \Longrightarrow \\
\int \sin^2 x\ dx &= -\frac{1}{2}\sin x\cos x + \frac{x}{2} + c.
\end{aligned}$$

- Hierbei handelt es sich um einen unangenehmen Grundtyp von rationalen Funktionen. Sei $k \in \mathbb{N}$, $k > 1$:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{(x^2+1)^k}\,dx \\
&= \int \frac{1+x^2}{(x^2+1)^k}\,dx - \int \frac{2x}{(x^2+1)^k}\frac{x}{2}\,dx \\
&= \int \frac{1}{(x^2+1)^{k-1}}\,dx \\
&\quad - \left[\frac{1}{-(k-1)(x^2+1)^{k-1}}\frac{x}{2} - \int \frac{1}{-(k-1)(x^2+1)^{k-1}}\frac{1}{2}\,dx\right] \\
&= \int \frac{1}{(x^2+1)^{k-1}}\,dx + \frac{x}{2(k-1)(x^2+1)^{k-1}} \\
&\quad - \frac{1}{2(k-1)}\int \frac{1}{(x^2+1)^{k-1}}\,dx \\
&= \frac{2k-3}{2k-2}\int \frac{1}{(x^2+1)^{k-1}}\,dx + \frac{x}{2(k-1)(x^2+1)^{k-1}}.
\end{aligned}
$$

  Auf diese Art und Weise kann man sich im Prinzip bis auf $k = 1$ herunterhangeln. Da hat man dann das Grundintegral

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c.$$

$\square$

**Satz 4.11 Substitutionsregel.** *Seien $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx.$$

**Beweis:** Sei $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Diese gibt es auf Grund der an $f(x)$ vorausgesetzten Stetigkeit. Dann folgt mit Kettenregel

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Damit ist $(F \circ \varphi)(x)$ die Stammfunktion für die rechte Seite der Substitutionsregel. Zweimalige Anwendung des Hauptsatzes der Differential– und Integralrechnung, Satz 4.4, liefert

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = (F \circ \varphi)\Big|_a^b = F\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\,dy.$$

$\blacksquare$

**Bemerkung 4.12 Zu den Integrationsregeln.**

- Für die Regel der partiellen Integration und die Substitutionsregel gibt es auch Versionen für unbestimmte Integrale, siehe in den Beispielen.
- Für die Substitutionsregel ist keine strenge Monotonie (Bijektivität) von $\varphi(x)$ erforderlich.
- Bei streng monotonem (bijektivem) $\varphi(x)$ kann man mittels Riemannscher Summen die Substitutionsregel auch für lediglich integrierbares $f(x)$ zeigen.

$\square$

**Beispiel 4.13 Substitutionsregel.** Manchmal ist relativ klar, wie man substituieren muss, oft ist dies aber nicht der Fall. Da hilft dann nur probieren oder in entsprechenden Fachbüchern nachschlagen.

- Betrachte
$$\int e^{\sqrt{x}}\ dx.$$
Hier substituiert man $z = \sqrt{x}$. Dann berechnet man formal
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2z} \quad \Longrightarrow \quad dx = 2z\ dz.$$
Nun kann man im ursprünglichen Integral alle Terme substituieren
$$\int e^{\sqrt{x}}\ dx = \int e^z 2z\ dz \overset{\text{Bsp. 4.10}}{=} 2\left(ze^z - e^z\right) + c = 2\left(\sqrt{x}e^{\sqrt{x}} - e^{\sqrt{x}}\right) + c.$$
Die Rücksubstitution am Ende nicht vergessen !
- Betrachte
$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx.$$
Das ist die Fläche unter dem halben Einheitskreis oberhalb der $x$–Achse. Die geeignete Substitution für dieses Integral ist
$$x = \cos z \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = -\sin z \quad \Longrightarrow \quad dx = -\sin z\ dz.$$
Man erhält, wobei man die Substitution in den Integrationsgrenzen beachten muss,
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\ dx \quad &= \quad \int_{z=-\pi}^{z=0} \sqrt{1-\cos^2 z}\,(-\sin z)\ dz \\
&= \quad -\int_{-\pi}^{0} \sqrt{\sin^2 z}\sin z\ dz = -\int_{-\pi}^{0} |\sin z| \sin z\ dz \\
&= \quad -\int_{-\pi}^{0} (-\sin z)\sin z\ dz = \int_{-\pi}^{0} \sin^2 z\ dz \\
&\overset{\text{Bsp. 4.10}}{=} \quad -\frac{1}{2}\sin z\cos z + \frac{1}{2}z\Big|_{-\pi}^{0} \\
&= \quad 0 + 0 - \left(0 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$
Alternativ ist es auch möglich, das Integral unbestimmt zu berechnen, mit Rücksubstitution, und dann den Hauptsatz der Differential– und Integralrechnung mit den Integrationsgrenzen für $x$ anzuwenden.

□

**Bemerkung 4.14 Zur Integration.**

- Explizites Integrieren, als Umkehroperation zur Differentiation, ist eine Kunst. Vom numerischen als auch vom theoretischen Standpunkt ist die Integration jedoch des Einfachere.
- Nicht alle Integrale lassen sich analytisch lösen, obwohl sie zum Teil einfach aussehen, beispielsweise
$$\int_0^x e^{-t^2}\ dt.$$
Dieses Integral ist jedoch so wichtig, dass man dafür eine eigene Funktion definiert hat, die sogenannte Fehlerfunktion $\operatorname{erf}(x)$. Diese Funktion ist tabelliert, beziehungsweise numerisch approximierbar.

□

# Kapitel 5

# Uneigentliche Integrale

**Bemerkung 5.1 Motivation.** In Anwendungen können Integrale vorkommen,

- bei denen über ein unendliches Intervall integriert wird,

$$\int_a^\infty f(x)\ dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)\ dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)\ dx,$$

- oder bei denen unbeschränkte Funktionen integriert werden,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx.$$

Solche Integrale heißen uneigentliche Integrale. Es stellt sich nun die Frage, unter welchen Bedingungen die Berechnung solcher Integrale möglich ist. Das heißt, unter welchen Bedingungen ist der Wert dieser Integrale eine reelle Zahl. □

**Definition 5.2 Uneigentlich Riemann–integrierbare Funktion.** Eine Funktion $f\ :\ [a,\infty) \to \mathbb{R}$ heißt uneigentlich Riemann–integrierbar auf $[a,\infty)$, falls für jedes $b > a$ die Einschränkung $f(x)|_{[a,b]}$ Riemann–integrierbar ist und falls

$$\lim_{b_k\to\infty} \int_a^{b_k} f(x)\ dx$$

für jede Folge mit $\{b_k\} \to \infty$ exisitiert. Entsprechend definiert man diese Eigenschaft für $f\ :\ (-\infty,b] \to \mathbb{R}$.

Ist $f\ :\ (a,b] \to \mathbb{R}$ für jedes $\varepsilon \in (0, b-a)$ auf $[a+\varepsilon, b]$ Riemann–integrierbar und existiert

$$\lim_{\varepsilon_k\to+0} \int_{a+\varepsilon_k}^{b} f(x)\ dx$$

für jede Folge $\{\varepsilon_k\} \to +0$, so nennt man $f(x)$ auf $(a,b]$ uneigentlich Riemann–integrierbar. Man setzt

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\ dx.$$

Entsprechend definiert man dies für Funktionen $[a,b) \to \mathbb{R}$.

Ist schließlich $f\ :\ (a,b) \to \mathbb{R}$, so nennt man $f(x)$ auf $(a,b)$ uneigentlich Riemann–integrierbar, falls für ein $c \in (a,b)$ sowohl $f(x)|_{(a,c]}$ als auch $f(x)|_{[c,b)}$ uneigentlich Riemann–integrierbar sind. In diesem Fall setzt man

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx.$$

Man sagt auch, die uneigentlichen Integrale konvergieren beziehungsweise divergieren. □

**Bemerkung 5.3 Zum Fall $f : (a,b) \to \mathbb{R}$.** Gibt es ein $c \in (a,b)$ mit der in der Definition erwähnten Eigenschaft, so gilt diese Eigenschaft für alle $c \in (a,b)$. Angenommen, sie gelte (o.B.d.A.) für $c < d < b$ nicht und sei beispielsweise $f(x)|_{(a,d]}$ nicht uneigentlich Riemann–integrierbar. Da $f(x)|_{(a,c]}$ uneigentlich Riemann–integrierbar ist, ist demzufolge $f(x)|_{(c,d]}$ nicht uneigentlich Riemann–integrierbar. Nach Voraussetzung ist jedoch $f(x)|_{[c,b)}$ uneigentlich Riemann–integrierbar. Nach Definition muss damit $f(x)|_{[c,d]}$ Riemann–integrierbar sein. Demzufolge kann es solch einen Punkt $d$ nicht geben. □

**Beispiel 5.4 Unbeschränktes Integrationsgebiet.**

- Betrachte
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\, dx$$
mit $s > 0$. Zur Beantwortung der Frage, für welche Parameter dieses uneigentliche Integral konvergiert, betrachtet man für $b > 1$ und $s \neq 1$
$$\int_1^b \frac{1}{x^s}\, dx = \int_1^b x^{-s}\, dx = \frac{1}{1-s}\frac{1}{x^{s-1}}\bigg|_1^b = \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{b^{s-1}}\right).$$
Für $s > 1$ gilt
$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{s-1}} = 0,$$
woraus
$$\int_1^\infty \frac{1}{x^s}\, dx = \frac{1}{s-1}$$
folgt. Für $0 < s < 1$ gilt jedoch
$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{s-1}} = \lim_{b\to\infty} b^{1-s} = \infty,$$
das Integral divergiert. Es divergiert auch für $s = 1$, da die Stammfunktion in diesem Fall $\ln(x)$ ist.
- Der Integrand in diesem Beispiel ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Betrachte
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\, dx &= \lim_{b\to-\infty}\int_b^0 \frac{dx}{1+x^2} + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{b\to-\infty} \arctan x\,\bigg|_b^0 + \lim_{b\to\infty} \arctan x\,\bigg|_0^b \\ &= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi.\end{aligned}$$

□

**Beispiel 5.5 Unbeschränkte Integranden.** Betrachte die Konvergenz von
$$\int_0^1 \frac{1}{x^s}\, dx$$
für $s > 0$. Es gilt für $s \neq 1$
$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^s}\, dx = \frac{1}{1-s}x^{1-s}\bigg|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-s}\left(1 - \varepsilon^{1-s}\right).$$

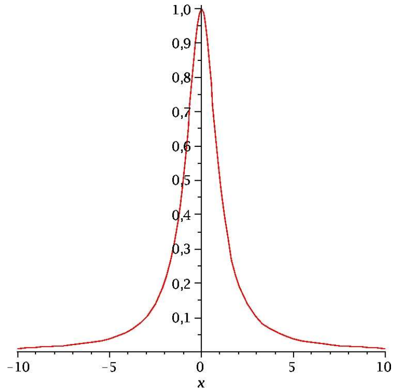


Abbildung 5.1: Integrand im Beispiel 5.4.

Daraus folgt die Konvergenz für $s < 1$ und die Divergenz für $s > 1$ wegen

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{1-s} = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < s < 1, \\ \infty & \text{für } s > 1. \end{cases}$$

Für $s = 1$ gilt

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \ln(x)|_\varepsilon^1 = 0 - \lim_{\varepsilon\to 0} \ln(\varepsilon) = \infty,$$

also Divergenz. □

**Satz 5.6 Cauchy–Kriterium für uneigentliche Integrale.** *Sei $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ integrierbar auf jedem endlichen Intervall $[a, b]$. Dann existiert das Integral*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx$$

*genau dann wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists C > a : \quad \left| \int_{z_1}^{z_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \quad \forall z_1, z_2 > C,$$

*„im Unendlichen muss das bestimmte Integral beliebig klein werden".*

**Beweis:** Setze $F(z) = \int_a^z f(x)\,dx$. Nach Voraussetzung ist diese Funktion wohldefiniert. Der Grenzwert $\lim_{z\to\infty} F(z)$ existiert genau dann, wenn für jede Folge $\{z_k\} \to \infty$ und für jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$ ein Index $\tilde{k}$ existiert, so dass

$$|F(z_k) - F(z_l)| < \varepsilon \quad \forall\ k, l > \tilde{k},$$

wobei $z_k, z_l \ge z_{\tilde{k}}$ sind. Das ist das Cauchysche Konvergenzkriterium für Zahlenfolgen. Die obige Ungleichung ist äquivalent zu

$$\left| \int_a^{z_k} f(x)\,dx - \int_a^{z_l} f(x)\,dx \right| = \left| \int_{z_l}^{z_k} f(x)\,dx \right| < \varepsilon \quad \forall\ k, l > \tilde{k}$$

oder $z_k, z_l \ge z_{\tilde{k}}$. Wähle $C = z_{\tilde{k}}$. Da die Zahlenfolge beliebig ist, folgt damit die Aussage des Satzes. ■

**Beispiel 5.7 Cauchy–Kriterium für uneigentliche Integrale.** Betrachte das uneigentliche Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$. Für $0 < z_1 < z_2$ erhält man mit partieller Integration

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{-\cos x}{x}\Big|_{x=z_1}^{x=z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{-\cos x}{-x^2}\, dx.$$

Schätzt man den Betrag des Kosinus nach oben ab, erhält man

$$\left|\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin x}{x}\, dx\right| \le \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} = \frac{2}{z_1}.$$

Dieser Wert ist kleiner als jedes vorgegebene $\varepsilon > 0$, sofern $z_1$ hinreichend groß ist. Also konvergiert das uneigentliche Integral. □

**Satz 5.8 Majorantenkriterium.** *Sei $-\infty \le a < b \le \infty$ und sei $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $a < \tilde{a} < \tilde{b} < b$ die Einschränkung $f(x)|_{[\tilde{a},\tilde{b}]}$ Riemann–integrierbar ist und dass für alle $x \in (a,b)$ gilt $0 \le |f(x)| \le g(x)$. Dann sind auch $f(x)$ und $|f(x)|$ auf $(a,b)$ uneigentlich Riemann–integrierbar und es gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx.$$

**Beweis:** Es wird beispielhaft der Fall $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$ betrachtet. Sei $\{b_k\} \to \infty$ eine beliebige Folge. Dann muss gezeigt werden, dass

$$\int_a^{b_k} f(x)\, dx, \quad \int_a^{b_k} |f(x)|\, dx$$

konvergieren.

Zur Konvergenz wird das Cauchy–Kriterium genutzt. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert, da $g(x)$ uneigentlich integrierbar ist, ein $k_0$, so dass für alle $k, l \ge k_0$ mit $b_k < b_l$ gilt

$$\int_{b_k}^{b_l} g(x)\, dx < \varepsilon.$$

Aus der Dreiecksungleichung, Satz 3.43, und der Monotonie des Riemann–Integrals, Satz 3.35, ergibt sich

$$\left|\int_{b_k}^{b_l} f(x)\, dx\right| \le \int_{b_k}^{b_l} |f(x)|\, dx \le \int_{b_k}^{b_l} g(x)\, dx < \varepsilon.$$

Damit folgt die Konvergenz.

Der Grenzwert ist eindeutig. Sei etwa für eine andere Folge $\{c_k\} \to \infty$ der Grenzwert anders als für $\{b_k\} \to \infty$. Dann zeigt man die Konvergenz für die zusammengesetzte Folge $\{b_k, c_k\} =: \{d_l\} \to \infty$ genauso wie oben (Reißverschlussprinzip). Da aber eine konvergente Folge einen eindeutigen Grenzwert besitzt, können die Grenzwerte für die Teilfolgen $\{b_k\}$ und $\{c_k\}$ nicht unterschiedlich sein. ■

**Beispiel 5.9 Majorantenkriterium.**

- Beispiel 5.4 und das Majorantenkriterium zeigen, dass für $s > 1$ folgende Integrale existieren:

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^s}\, dx, \quad \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^s}\, dx, \quad \int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^s}\, dx, \quad \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^s}\, dx.$$

- Sei nun $s > 0$. Dann folgt mit partieller Integration
$$\int_1^b \frac{\sin x}{x^s}\,dx = -\frac{\cos x}{x^s}\bigg|_{x=1}^{x=b} - \frac{1}{s}\int_1^b \frac{\cos x}{x^{s+1}}\,dx.$$
Der erste Term auf der rechten Seite konvergiert für $b \to \infty$ gegen Null, da der Zähler beschränkt ist und der Nenner unbeschränkt wächst. Da $s+1 > 1$ ist, konvergiert das Integral auf der rechten Seite nach dem ersten Teil des Beispiels.
Mit erheblichem Aufwand lässt sich zeigen, dass für $s \in (0,1]$
$$\int_1^b \frac{|\sin x|}{x^s}\,dx$$
nicht konvergiert.

□

**Bemerkung 5.10 Unterschiede zu bestimmten Integralen.** Bei uneigentlichen Integralen werden viele Teile von Satz 3.39 falsch. Insbesondere sind im allgemeinen mit $f(x)$ und $g(x)$ nicht auch $|f(x)|$, $f^+(x)$, $f^-(x)$, $(fg)(x)$ und $1/f(x)$ uneigentlich Riemann–integrierbar. □

**Satz 5.11 Integralvergleichskriterium.** *Sei $f\ :\ [1,\infty) \to (0,\infty)$ monoton fallend. Dann konvergiert $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ genau dann, wenn $\int_1^\infty f(x)\,dx$ als uneigentliches Riemann–Integral existiert.*

**Beweis:** $\Longrightarrow$ Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann kann man ein $K_0$ so bestimmen, dass für alle $K_0 \le K \le L$ gilt (Cauchy–Konvergenzkriterium für Reihen)
$$0 \le \sum_{k=K}^{L} f(k) \le \varepsilon.$$
Hierbei nutzt man die Positivität von $f(x)$. Für alle $K_0 \le a \le b$ gilt dann
$$0 \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_{K_0}^{[b]+1} f(x)\,dx,$$
wobei wieder $f(x) > 0$ genutzt wurde unf $[b]$ der ganzzahlige Anteil von $b$ ist. Aufspaltung in Teilintervalle und Monotonie von $f(x)$ ergeben
$$0 \le \sum_{k=K_0}^{[b]} \int_k^{k+1} f(x)\,dx \le \sum_{k=K_0}^{[b]} f(k)\cdot 1 \le \varepsilon.$$
Das Cauchy–Kriterium, Satz 5.6, zeigt die Konvergenz des uneigentlichen Riemann–Integrals.

$\Longleftarrow$ Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert nach dem Cauchy–Kriterium ein $a_0$, dass für alle $a_0 \le a < b$ gilt
$$0 \le \int_a^b f(x)\,dx \le \varepsilon.$$
Sei $K_0 \ge a_0 + 1$, dann gilt für alle $K_0 \le L \le K$
$$0 \le \sum_{k=K}^{L} f(k) \le \sum_{k=K}^{L} \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx = \int_{K-1}^{L} f(x)\,dx \le \varepsilon.$$
In der Abschätzung wurde die Monotonie von $f(x)$ verwendet. Das Cauchy–Kriterium für Reihen zeigt die Konvergenz der Reihe. ■

**Beispiel 5.12 Integralvergleichskriterium.** Aus Beispiel 5.4 erhält man, dass die Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 0,$$

genau dann konvergiert, wenn $s > 1$ ist. Diese Reihe wird auch Riemannsche Zetafunktion genannt. □

**Beispiel 5.13 Gamma–Funktion.** Diese Funktion wurde von Leonhard Euler untersucht. Sie ist definiert durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt \quad \text{für } x > 0.$$

Die Untersuchung der Konvergenz dieses Integral beinhaltet beide Schwierigkeiten, die bei uneigentlichen Integralen auftreten können:

- Für $0 < x < 1$ divergiert der Integrand in $t = 0$.
- Die obere Integrationsgrenze ist $\infty$.

Man spaltet daher auf

$$\Gamma(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt + \int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

und behandelt beide Probleme getrennt.

Betrachte $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1}\, dt$ für $0 < x < 1$. Wegen

$$0 \le e^{-t} t^{x-1} \le t^{x-1}$$

hat dieses Integral nach Beispiel 5.5 die konvergente Majorante $\int_0^1 \frac{1}{t^{1-x}}\, dt$.

Betrachte nun $\int_1^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$. Es existiert ein $c > 0$ mit

$$0 \le e^{-t} t^{x-1} \le \frac{c}{t^2} \quad \Longleftrightarrow \quad t^{x+1} \le c e^t,$$

da die Exponentialfunktion schneller wächst als jede Potenzfunktion. Somit ist $\frac{c}{t^2}$ nach Beispiel 5.4,1 eine konvergente Majorante.

Also existiert $\Gamma(x)$ für alle $x > 0$, siehe Abbildung 5.2.

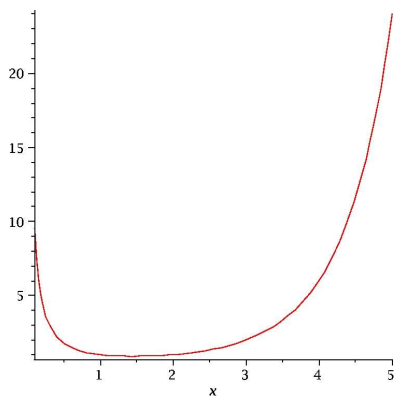


Abbildung 5.2: Die Gamma–Funktion.

Zwei wichtige Eigenschaften der Gamma–Funktion sind

- $$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big|_0^\infty = -0 + 1 = 1.$$

- $$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^\infty \underbrace{e^{-t}}_{u} \underbrace{t^{x-1}}_{v'}\, dt = \underbrace{e^{-t}\frac{1}{x}t^x\Big|_{t=0}^{t=\infty}}_{0} + \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-t}t^x\, dt \\ &= \frac{1}{x}\Gamma(x+1), \end{aligned}$$

  also
  $$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1).$$

Durch Induktion findet man, dass wegen dieser beiden Eigenschaften die Gammafunktion die Fakultät interpoliert.

$$\Gamma(n+1) = n!$$

□