Kapitel 1

Die Exponentialfunktion im Komplexen

Bemerkung 1.1 Motivation. Um die trigonometrischen Funktionen bequem einführen und untersuchen zu können, ist es zweckmäßig, die Exponentialfunktion auch für komplexe Argumente zu definieren. In diesem Kapitel werden die erforderlichen Grundbegriffe dafür zu Verfügung gestellt und die Eigenschaften der komplexen Exponentialfunktion untersucht. □

1.1 Der Körper der komplexen Zahlen

Bemerkung 1.2 Einführung komplexer Zahlen. Beim Rechnen mit reellen Zahlen treten einige Probleme auf:

- Manche Polynome haben in $\mathbb{R}$ keine Nullstellen, zum Beispiel $p(x) = x^2 + 1$.
- Man kann keine Wurzel aus negativen Zahlen ziehen.

Abhilfe kann man schaffen, indem man einen Körper betrachtet, der $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ umfasst. Dazu wird $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ eingettet, indem man $\mathbb{R}$ als x–Achse $\{(a, 0) \ : \ a \in \mathbb{R}\}$ interpretiert. Die Elemente von $\mathbb{R}^2$ müssen nun mit Verknüpfungen ausgestattet werden, welche

1. die Körpereigenschaften erfüllen.

Dieser so erzeugte Körper wird mit dem Symbol $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ bezeichnet. Da die reellen Zahlen eine Teilmenge von $\mathbb{C}$ sind, müssen die Verknüpfungen in $\mathbb{C}$ für die reellen Zahlen die folgenden Bedingungen erfüllen:

2. Addition: $(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$,
3. Multiplikation: $(a, 0) \cdot (c, 0) = (a \cdot c, 0)$.

Um Abhilfe für die Probleme bei den reellen Zahlen zu schaffen, muss letztlich

4. eine Zahl $(a, b) \in \mathbb{C}$ existiert mit $(a, b) \cdot (a, b) = (-1, 0)$.

□

Definition 1.3 Komplexe Zahlen. Auf $\mathbb{R}^2$ sind folgende Verknüpfungen definiert:

1.) Addition
$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d) \ \forall a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

2.) Multiplikation
$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc) \ \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Die Menge $\mathbb{R}^2$ zusammen mit diesen Verknüpfungen werden komplexe Zahlen genannt und mit $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ bezeichnet. $\square$

Bemerkung 1.4 Konsequenzen aus Definition 1.3.

1. Die Einschränkung auf die x–Achse liefert Addition/Multiplikation der reellen Zahlen:

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0), \quad (a, 0) \cdot (c, 0) = (a \cdot c, 0) \ \forall \ a, c \in \mathbb{R}.$$

2. Das neutrale Element der Multiplikation auf $\mathbb{C}$ ist (1,0):

$$(1, 0) \cdot (c, d) = (c, d) \ \forall \ c, d \in \mathbb{R}.$$

3. In $\mathbb{C}$ existiert $\sqrt{-1}$, denn

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

In Bemerkung 2.28 wird gezeigt, dass $\sqrt{-1}$ nicht eindeutig ist. Für (0,1) schreibt man i (imaginäre Einheit). $\square$

Satz 1.5 Körper der komplexen Zahlen. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *bildet einen Körper, den Körper der komplexen Zahlen.*

Beweis: Der Beweis ist elementar, abgesehen von der Existenz des inversen Elements der Multiplikation.

Sei $(a, b) \neq (0, 0)$ und betrachte

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Dann rechnet man mit Hilfe von Definition 1.3 nach

$$(a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0),$$

womit das inverse Elemente zu (a, b) angegeben wurde. $\blacksquare$

Bemerkung 1.6 Zur Anordnungseigenschaft. Die komplexen Zahlen sind nicht angeordnet, dass heißt es gibt keine Relationen wie $\leq, <, \geq, >$ zwischen zwei beliebigen komplexen Zahlen. $\square$

Bemerkung 1.7 Praktisches Rechnen mit komplexen Zahlen. Statt (a, b) schreibe man $z = a + ib$, verwendet $i^2 = -1$ und rechnet ansonsten wie mit reellen Zahlen und mit Polynomen. Damit erhält man direkt aus Definition 1.3

$$\begin{aligned} (a + ib) + (c + id) &= (a + c) + i(b + d), \\ (a + ib)(c + id) &= ac + aid + ibc + \underbrace{i^2}_{-1} bd = (ac - bd) + i(ad + bc). \end{aligned}$$

Der Multiplikationspunkt wird oft weggelassen.

Die Potenz einer komplexen Zahl mit einer natürlichen Zahl n ist mit Hilfe der binomischen Formel angebbar

$$(a + ib)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} (ib)^k.$$

$\square$

Definition 1.8 Betrag, Realteil, Imaginärteil. Zu einer komplexen Zahl $z = a + ib$ definiert man $\overline{z} := a - ib$ als die konjugiert Zahl zu z. Ferner nennt man

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(a+ib)(a-ib)} = \sqrt{a^2 - i^2b^2} = \sqrt{a^2+b^2} \ \in \mathbb{R}.$$

den Betrag von z, siehe auch Bemerkung 2.24. Man nennt $\mathrm{Re}(z) = a \in \mathbb{R}$ den Realteil und $\mathrm{Im}(z) = b \in \mathbb{R}$ den Imaginärteil von z. □

Satz 1.9 Eigenschaften der Konjugation. *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten*

i) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$,
ii) $\overline{\overline{z}} = z$,
iii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$,
iv) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$.

Beweis: Einfaches Nachrechnen. ■

Bemerkung 1.10 Division komplexer Zahlen, Nützlichkeit der konjugiert komplexen Zahl. Die konjugiert komplexe Zahl nutzt man beispielsweise bei der Division zweier komplexer Zahlen $(a + ib)/(c + id)$, $c + id \neq 0$. Indem man mit $c - id$ erweitert, macht man den Nenner reell und kann dann wie bei reellen Zahlen dividieren

$$\begin{aligned}\frac{a+ib}{c+id}\frac{c-id}{c-id} &= \frac{ac - iad + ibc - i^2bd}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2} \\ &= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.\end{aligned}$$

Nun kann man auch die Potenz einer komplexen Zahl mit negativem ganzzahligem Argument erklären. Sie wird auf die Potenzierung mit einer natürlichen Zahl zurückgeführt

$$z^n = \frac{1}{z^{-n}}, \quad n \in \mathbb{Z}, n < 0.$$

□

Satz 1.11 Eigenschaften des Betrags. *Für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten*

i) $|z| \geq 0$, $|z| = 0 \iff z = 0$,
ii) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$,
iii) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, *Dreiecksungleichung.*

Beweis: *i).* Einfaches Nachrechnen.
ii). Es gilt

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z}_1 \overline{z}_2 = (z_1\overline{z}_1)(z_2\overline{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

iii). Zunächst gelten

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z_2\overline{z}_1) &= \mathrm{Re}\left(\overline{z_2\overline{z}_1}\right) = \mathrm{Re}\left(\overline{z}_2 z_1\right), \\ \mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2) &\leq |z_1\overline{z}_2| = |z_1|\,|\overline{z}_2| = |z_1|\,|z_2|.\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 &= (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2) = z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 \\ &= z_1\overline{z}_1 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z_1\overline{z}_2} + z_2\overline{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}\left(z_1\overline{z}_2\right) + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2\,|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 = \left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)^2.\end{aligned}$$

■

1.2 Folgen und Reihen im Komplexen

Bemerkung 1.12 Übertragung von Eigenschaften aus dem Reellen. Nun ist man in der Lage, Konvergenzbetrachtungen vom Reellen ins Komplexe zu übertragen. Alle Behauptungen und Beweise, die nicht von der Anordnung der reellen Zahlen, sondern außer von den Körperaxiomen nur vom Absolutbetrag und seinen Eigenschaften Gebrauch machen, bleiben ohne Änderungen gültig. Im Folgenden werden diese Aussagen ohne weitere Begründungen zusammengestellt. □

Definition 1.13 Konvergente Folge komplexer Zahlen, beschränkte Folge. Seien $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen und $z \in \mathbb{C}$. Die Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen z und z heißt Grenzwert dieser Folge, geschrieben $\lim_{n\to\infty} z_n = z$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \ge n_0$ gilt $|z_n - z| < \varepsilon$. Die Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $|z_n| \le c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. □

Bemerkung 1.14 Zum Grenzwert. Folgende Eigenschaften übertragen sich aus dem Reellen:

- Der Grenzwert ist eindeutig.
- Konvergente Folgen sind beschränkt.
- Rechenregeln für Grenzwerte.

Die Eigenschaft der Monotonie gibt es für Folgen komplexer Zahlen nicht. □

Satz 1.15 Rückführung der Konvergenz auf Konvergenz im Reellen. *Für jede Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ gilt: $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent genau dann wenn $\{\mathrm{Re}(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{\mathrm{Im}(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind.*

Ist $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n).$$

Beweis: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Der Beweis nutzt die elementaren Abschätzungen

$$|a|, |b| \le |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2} \le |a| + |b|.$$

Setzt $z_n = a_n + ib_n$, $z = a + ib$.

$\Longrightarrow$. Seien $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|z - z_n| < \varepsilon$ für alle $n \ge n_0$. Nach der linken obigen Abschätzung gelten insbesondere

$$|a_n - a| \le |z_n - z| < \varepsilon, \quad |b_n - b| \le |z_n - z| < \varepsilon,$$

woraus $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ folgen.

$\Longleftarrow$. Gelten $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon/2$ für $n \ge n_1$ und ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \varepsilon/2$ für $n \ge n_2$. Für $n \ge n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ gilt mit der rechten obigen Ungleichung

$$|z_n - z| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon.$$

Daraus folgt die Behauptung. ■

Definition 1.16 Cauchy–Folge. Die Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt Cauchy–Folge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so gibt, dass für alle $m, n \ge n_0$ gilt $|z_m - z_n| < \varepsilon$. □

Satz 1.17 Rückführung auf reelle Cauchy–Folgen. *Die Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ ist genau dann eine Cauchy–Folge, wenn $\{\mathrm{Re}(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{\mathrm{Im}(z_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy–Folgen sind.*

Beweis: Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 1.15. ■

Satz 1.18 Zusammenhang Konvergenz – Cauchy–Folge. *Ein komplexe Zahlenfolge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy–Folge ist.*

Beweis: Das folgt aus Satz 1.15, Satz 1.17 und dem Cauchy–Konvergenzkriterium für reelle Folgen. ■

Bemerkung 1.19 Reihen. Reihen komplexer Zahlen und ihre Konvergenz werden genau wie im Reellen erklärt. So bezeichnet $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ sowohl die Folge $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k,$$

als auch, wenn die Reihe konvergiert, ihren Grenzwert

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} z_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

□

Definition 1.20 Absolut konvergente Reihe. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$, $z_k \in \mathbb{C}$, heißt absolut konvergent, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$$

konvergiert. □

Bemerkung 1.21 Übertragung von Sachverhalten aus dem Reellen. Folgende Sachverhalte aus dem Reellen lassen sich nun wortwörtlich übertragen:

- Konvergenzkriterium von Cauchy für Reihen,
- absolute Konvergenz $\Longrightarrow$ Konvergenz,
- Umordnungssatz,
- Majorantenkriterium, Minorantenkriterium,
- Quotientenkriterium,
- Wurzelkriterium,
- Cauchy–Produkt (Summierung über die Diagonalen der einzelnen Summanden)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{\infty} b_m = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \right).$$

□

Das Ziel ist nun die Betrachtung der Exponentialreihe mit komplexem Argument.

Definition 1.22 Exponentialreihe. Die Exponentialreihe für komplexes Argument besitzt die Gestalt

$$\exp(z) := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Satz 1.23 Absolute Konvergenz der Exponentialreihe. *Die Exponentialreihe ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent.*

Beweis: Der Beweis erfolgt wie im Reellen, mit dem Quotientenkriterium. ∎

Satz 1.24 Eigenschaften der Exponentialreihe.

i) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $e^{z+w} = e^z e^w$.

ii) Es gilt $e^z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

iii) Es gilt $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

iv) Ist $z \in \mathbb{C}$ rein imaginär, das heißt $z = ib$ mit $b \in \mathbb{R}$, dann ist $|e^z| = 1$.

Beweis: *i).* Mit dem Cauchy–Produkt folgt

$$e^z e^w = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{w^m}{m!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n} \frac{z^m w^{n-m}}{m!(n-m)!}\right).$$

Die Binomische Formel besitzt die Gestalt

$$(z+w)^n = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} z^m w^{n-m} = \sum_{m=0}^{n} n! \frac{z^m w^{n-m}}{m!(n-m)!} = n! \sum_{m=0}^{n} \frac{z^m w^{n-m}}{m!(n-m)!}.$$

Setzt man dies in das Cauchy–Produkt ein, so erhält man die Behauptung

$$e^z e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}.$$

ii). Das folgt aus i) und

$$e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Damit kann keiner der Faktoren Null sein.

iii). Sei $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k/k!$. Dann gilt nach Satz 1.9

$$s_n(\overline{z}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z}^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overline{z^k}}{k!} = \overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \overline{s_n(z)}.$$

Mit Satz 1.15 folgt dann

$$\begin{aligned}
\overline{e^z} &= \overline{\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(s_n(z)) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(s_n(z))} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(s_n(z)) - i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(s_n(z)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\overline{s_n(z)}\right) = \lim_{n\to\infty} s_n(\overline{z}) = e^{\overline{z}}.
\end{aligned}$$

iv). Mit iii) und i) gilt für $b \in \mathbb{R}$

$$\left|e^{ib}\right|^2 = e^{ib}\overline{e^{ib}} = e^{ib}e^{\overline{ib}} = e^{ib}e^{-ib} = e^{ib-ib} = e^0 = 1.$$

∎

Kapitel 2

Die trigonometrischen Funktionen

Bemerkung 2.1 Inhalt. Ziel dieses Kapitels ist es in bequemer Art und Weise den Sinus und den Cosinus einzuführen. Danach wird auf die Zahl π eingegangen. Im Anschluss werden die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen eingeführt. Zum Schluss wird eine geometrische Interpretation der komplexen Zahlen vorgestellt, mit welcher man gewisse Rechenoperationen besser ausführen kann, als mit der bereits bekannten Darstellung. □

2.1 Sinus und Cosinus

Definition 2.2 Sinus, Cosinus. Sei $x \in \mathbb{R}$, dann setzt man

$$\cos x := \operatorname{Re}\left(e^{ix}\right), \quad \sin x := \operatorname{Im}\left(e^{ix}\right).$$

□

Bemerkung 2.3 Einfache Folgerungen. Es gelten also

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \cos x + i \sin x, \\ \cos x &= \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right), \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right). \end{aligned}$$

Die erste Formel heißt Euler[1]sche Formel. Es folgen sofort

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

Mit Satz 1.24 iv), ergibt sich

$$\left|e^{ix}\right|^2 = 1 = \sin^2 x + \cos^2 x \quad \Longrightarrow \quad |\cos x| \le 1, \quad |\sin x| \le 1.$$

□

Satz 2.4 Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen. *Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten*

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

[1]Leonhard Euler (1707 – 1783)

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\cos(x+y)+i\sin(x+y) &= e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}\\ &= (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)\\ &= (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + i(\sin x\cos y + \cos x\sin y).\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt durch Vergleich von Real– und Imaginärteil. ■

Bemerkung 2.5 Andere Additionstheoreme. Aus den eben bewiesenen Additionstheoremen lassen sich alle anderen Addtionstheorem herleiten. Es folgt beispielsweise:

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x+x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x\\ &= (\cos x\cos x - \sin x\sin x)\cos x - (\sin x\cos x + \sin x\cos x)\sin x\\ &= \cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x\\ &= \cos^3 x - 3(1-\cos^2)\cos x\\ &= 4\cos^3 x - 3\cos x.\end{aligned}$$

Weitere Beispiele: Übungsaufgaben. □

Satz 2.6 Reihendarstellungen. *Für $x \in \mathbb{R}$ gelten*

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \ldots\\ \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots.\end{aligned}$$

Die Reihen sind absolut konvergent.

Beweis: Die absolute Konvergenz folgt nach dem Majorantenkriterium aus der absolution Konvergenz der Exponentialreihe. Insbesondere darf die Exponentialreihe umgeordnet werden, ohne dass sich der Reihenwert ändert. Es ist

$$\begin{aligned}\cos x + i\sin x &= e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n x^n}{n!}\\ &= \frac{1}{0!} + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \ldots\\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right).\end{aligned}$$

Satz 1.15 (erste Summe konvergiert gegen $\mathrm{Re}(e^{ix})$, zweite Summe gegen $\mathrm{Im}(e^{ix})$) und der Vergleich von Real– und Imaginärteil ergeben die Behauptung. ■

Die obigen Reihen sind die Taylor–Reihen von $\cos x$ und $\sin x$ im Entwicklungspunkt $x = 0$.

Satz 2.7 Abschätzungen für die Restglieder. *Für die durch*

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+2}(x),\\ \sin x &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2n+3}(x)\end{aligned}$$

definierten Restglieder gelten die Abschätzungen

$$|R_m(x)| < \frac{|x|^m}{m!} \ \textit{für}\ |x| \le m+1,\ m \in \{2n+2, 2n+3\}.$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
|R_{2n+2}(x)| &= \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\left|1-\frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)}+\frac{x^4}{(2n+3)(2n+4)(2n+5)(2n+6)}\mp\ldots\right| \\
&=: \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}\left|1-a_1+a_2\mp\ldots\right|
\end{aligned}$$

mit

$$a_k=\frac{x^{2k}}{(2n+3)\ldots(2n+2k+2)}.$$

Es gilt, mit $a_0=1$, die Rekursion

$$a_k=a_{k-1}\frac{x^2}{(2n+2k+1)(2n+2k+2)},\ k=1,2,3,\ldots.$$

Für $|x|\le 2n+3$ ist der Zähler des obigen Bruches kleiner als der Nenner, woraus

$$0<a_k<a_{k-1},\ k=1,2,3\ldots$$

folgt. Damit gelten

$$\begin{aligned}
1-a_1+a_2-a_3+a_4\mp\ldots &= (1-a_1)+(a_2-a_3)+\ldots>0, \\
1-a_1+a_2-a_3+a_4\mp\ldots &= 1-(a_1-a_2)-(a_3-a_4)-\ldots<1,
\end{aligned}$$

also

$$(1-a_1+a_2-a_3+a_4\mp\ldots)\in(0,1) \quad\Longrightarrow\quad |1-a_1+a_2-a_3+a_4\mp\ldots|<1.$$

Einsetzen in die erste Gleichung vom Beweis ergibt

$$|R_{2n+2}(x)|<\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Der Beweis für das andere Restglied erfolgt analog. ■

Folgerung 2.8 *Es gilt*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Beweis: Nach Satz 2.7 ist

$$|\sin x-x|<\frac{x^3}{6},\quad \text{für } |x|\le 4.$$

Division durch x und Grenzübergang $x\to 0$ ergeben die Behauptung. ■

Satz 2.9 Stetigkeit von Cosinus und Sinus. *Die Funktionen* $\cos x$ *und* $\sin x$ *sind stetig.*

Beweis: Es gilt für $z,w\in\mathbb{C}$ und $|z-w|\le 1$

$$\begin{aligned}
|e^z-e^w| &= |e^w|\left|e^{z-w}-1\right| = |e^w|\left|1+(z-w)+\frac{(z-w)^2}{2!}+\frac{(z-w)^3}{3!}+\ldots-1\right| \\
&= |e^w|\,|z-w|\left|1+\frac{(z-w)}{2!}+\frac{(z-w)^2}{3!}+\ldots\right| \\
&\le |e^w|\,|z-w|\left(1+\frac{|z-w|}{2!}+\frac{|z-w|^2}{3!}+\ldots\right) \\
&\le |e^w|\,|z-w|\left|1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\right| \\
&= |e^w|\,|z-w|\,(e-1)\le 2\,|e^w|\,|z-w|\,.
\end{aligned}$$

Seien $x, x_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}|\cos x - \cos x_0| &= \left|\operatorname{Re}\left(e^{ix}\right) - \operatorname{Re}\left(e^{ix_0}\right)\right| = \left|\operatorname{Re}\left(e^{ix} - e^{ix_0}\right)\right| \le \left|e^{ix} - e^{ix_0}\right| \\ &\le 2\left|e^{ix_0}\right| |ix - ix_0| = 2\left|e^{ix_0}\right| |i|\,|x - x_0| = 2\left|e^{ix_0}\right| |x - x_0|\end{aligned}$$

für $|x - x_0| \le 1$. Nun folgt die Aussage für den Cosinus durch Anwendung der Definition für die Stetigkeit, also Betrachtung von $x \to x_0$. Der Beweis für den Sinus ist analog. ■

2.2 Die Zahl π

Bemerkung 2.10 Motivation. Die Zahl π wird klassisch als das Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser definiert. Hier wird sie in ganz anderer Weise eingeführt. Die nachfolgenden Behauptungen dienen der Vorbereitung. □

Lemma 2.11 *Es gilt* $\sin x > 0$ *für* $x \in (0, 2]$.

Beweis: Nach Satz 2.7 ist

$$\sin x = x\left(1 + \frac{R_3(x)}{x}\right) \quad \text{mit} \quad \left|\frac{R_3(x)}{x}\right| < \frac{|x^2|}{6}$$

für $|x| \le 4$. Für $x \in (0, 2]$ gilt also

$$\left|\frac{R_3(x)}{x}\right| < \frac{2^2}{6} = \frac{2}{3}.$$

Es folgt

$$\sin(x) = x\left(1 + \frac{R_3(x)}{x}\right) > x\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{x}{3} > 0.$$

■

Lemma 2.12 *In* $[0, 2]$ *ist* $\cos x$ *streng monoton fallen.*

Beweis: Setze $u = (x + y)/2$ und $v = (x - y)/2$. Dann folgen aus Satz 2.4

$$\begin{aligned}\cos x &= \cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v, \\ \cos y &= \cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$-\cos x + \cos y = 2 \sin u \sin v = 2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \sin\left(\frac{x - y}{2}\right).$$

Betrachte $0 \le y < x \le 2$. Dann sind

$$\frac{x + y}{2} \in (0, 2), \quad \frac{x - y}{2} \in (0, 1).$$

Nach Lemma 2.11 ist damit die rechte Seite positiv, das heißt

$$-\cos x + \cos y > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos x < \cos y.$$

■

Lemma 2.13 *Es gilt* $\cos 2 < 0$.

Beweis: Nach Satz 2.7 ist

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + R_4(x) \quad \text{mit } |R_4(x)| < \frac{|x|^4}{4!} \text{ für } |x| \le 5.$$

Insbesondere gilt also

$$\cos 2 = 1 - 2 + R_4(2) \quad \text{mit } |R_4(2)| < \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Damit folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 2.14 Direkte Folgerungen. Wir wissen damit über die Funktion $f(x) = \cos x$ in $[0, 2]$:

- $f(x)$ ist stetig,
- $f(0) = \mathrm{Re}(e^{0i}) = \mathrm{Re}(e^0) = \mathrm{Re}(1) = 1$,
- $f(2) < 0$.

Nach dem Zwischenwertsatz existiert damit ein $x_0 \in (0, 2)$ mit $f(x_0) = 0$. Da

- $f(x)$ streng monoton fällt,

gibt es sogar genau eine Nullstelle x_0. □

Definition 2.15 Die Zahl π. Die eindeutig bestimmte Nullstelle der Funktion $\cos x$ im Intervall $(0, 2)$ wird mit $\pi/2$ bezeichnet. □

Bemerkung 2.16 Zur Zahl π.

- Näherungsweise Berechnung ergibt

$$\pi \approx 3.14159265358979323 85.$$

- Aus $\cos(\pi/2) = 0$ ergeben sich einige spezielle Werte für die trigonometrischen Funktionen und die Exponentialfunktion. Es ist nach Bemerkung 2.3

$$\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1.$$

Wegen Lemma 2.11 folgt

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \quad \Longrightarrow \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i.$$

- Daraus folgen

$$e^{\pi i} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^2 = i^2 = -1, \; e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i, \; e^{2\pi i} = 1$$

und hieraus

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0
$\cos x$	1	0	-1	0	1

□

Folgerung 2.17 Spezielle Argumentverschiebungen, Periodiziät. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten*

$$\begin{aligned}
\cos(x + 2\pi) &= \cos x, & \sin(x + 2\pi) &= \sin x,\\
\cos(x + \pi) &= -\cos x, & \sin(x + \pi) &= -\sin x,\\
\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin x, & \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x,\\
\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \sin x, & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos x.
\end{aligned}$$

Beweis: Das folgt mit Hilfe der Additionstheoreme, Übungsaufgabe. ■

Satz 2.18 Nullstellen. *Es gelten*

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} \ : \ \sin x = 0\} &= \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}, \\ \{x \in \mathbb{R} \ : \ \cos x = 0\} &= \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}. \end{aligned}$$

Die Funktionen sind in Abbildung 2.1 dargestellt.

Beweis: Betrachte zunächst den Sinus. Das $\sin(k\pi) = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt ist nach den speziellen Funktionswerten aus Bemerkung 2.16 und der Periodizität aus Folgerung 2.17 klar. Es bleibt zu zeigen, dass es keine weiteren Nullstellen gibt.

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine Zahl mit $\sin x = 0$. Man kann x eindeutig darstellen durch $x = k\pi + x_1$ mit $k \in \mathbb{Z}$ und $x_1 \in [0, \pi)$. Dann ist

$$\sin x_1 = \sin(x - k\pi) = \sin x \cos(k\pi) - \cos x \sin(k\pi) = 0 - 0 = 0.$$

Nach Lemma 2.11 gilt $\sin x_1 > 0$ für $x_1 \in (0, \pi/2)$.

Für $x_1 \in [\pi/2, \pi)$ ist

$$\sin x_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x_1\right) = \cos\left(x_1 - \frac{\pi}{2}\right) > 0$$

wegen $x_1 - \frac{\pi}{2} \in [0, \frac{\pi}{2})$ und der Definition von $\pi/2$ als einzige Nullstelle des Cosinus in $[0, 2]$. Also muss $x_1 = 0$ sein und damit $x = k\pi$.

Wegen $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ folgt die zweite Behauptung aus der ersten. ■

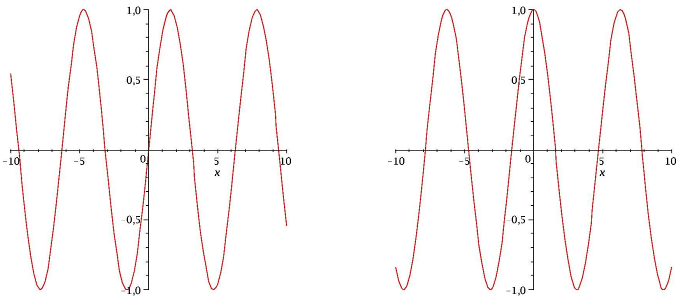

Abbildung 2.1: Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ (links nach rechts).

2.3 Weitere trigonometrische Funktionen, Umkehrfunktionen

Definition 2.19 Tangens, Cotangens. Die Tangensfunktion ist definiert als

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Die Cotangensfunktion ist definiert als

$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Die Funktionen sind in Abbildung 2.2 dargestellt. □

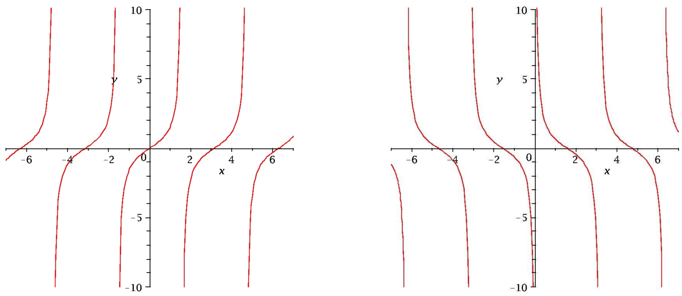

Abbildung 2.2: Funktionen $\tan x$ und $\cot x$ (links nach rechts).

Bemerkung 2.20 Die Wohldefiniertheit des Tangens und des Cotangens sind dadurch gesichert, dass nicht durch Null dividiert wird.

Weitere wichtige Funktionen ergeben sich als Umkehrfunktionen der bisher eingeführten trigonometrischen Funktionen. Da die trigonometrischen Funktionen aber nicht injektiv sind, existieren Umkehrfunktionen nur für geeignete Einschränkungen. □

Satz 2.21 Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen.

i) Die Einschränkung von $\cos x$ *in* $[0, \pi]$ *ist streng monoton fallend und eine bijektive Abbildung auf* $[-1, 1]$*. Die Umkehrfunktion wird mit*

$$\arccos \ : \ [-1,1] \to \mathbb{R} \ ([-1,1] \to [0,\pi]) \quad \textit{Arcus Cosinus}$$

bezeichnet.

ii) Die Einschränkung von $\sin x$ *auf* $[-\pi/2, \pi/2]$ *ist streng monoton wachsend und bijektiv auf* $[-1, 1]$*. Die Umkehrfunktion wird mit*

$$\arcsin \ : \ [-1,1] \to \mathbb{R} \ ([-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]) \quad \textit{Arcus Sinus}$$

bezeichnet.

iii) Die Einschränkung von $\tan x$ *auf* $(-\pi/2, \pi/2)$ *ist streng monoton wachsend und bijektiv auf* $\mathbb{R}$*. Die Umkehrfunktion wird mit*

$$\arctan \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ (\mathbb{R} \to [-\pi/2,\pi/2]) \quad \textit{Arcus Tangens}$$

bezeichnet.

iv) Die Einschränkung von $\cot x$ *auf* $(0, \pi)$ *ist streng monoton fallend und bijektiv auf* $\mathbb{R}$*. Die Umkehrfunktion wird mit*

$$\operatorname{arccot} \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ (\mathbb{R} \to [0,\pi]) \quad \textit{Arcus Cotangens}$$

bezeichnet.

Die Umkehrfunktionen sind in Abbildung 2.3 dargestellt.

Beweis: Der Beweis erfolgt leicht mit Hilfe der bisher bekannten Ergebnisse. ■

2.4 Alternative Darstellung der komplexen Zahlen

Bemerkung 2.22 Motivation. Es wird jetzt noch eine altenative Darstellung von komplexen Zahlen eingeführt, die insbesondere das Potenzieren erleichert. □

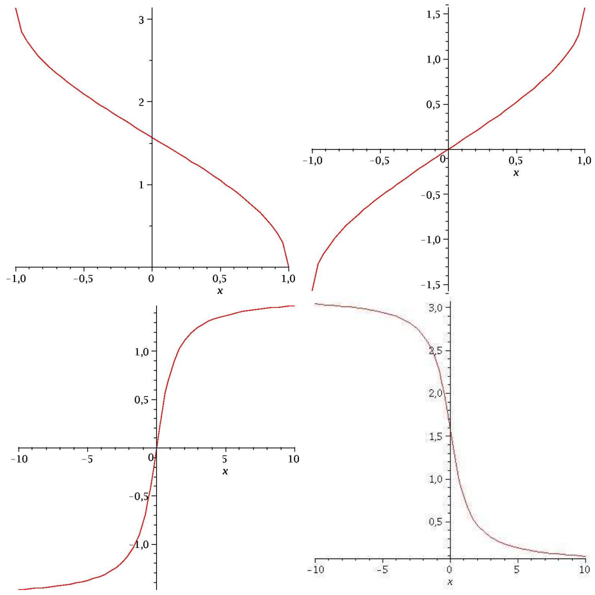

Abbildung 2.3: Funktionen $\arccos(\varphi)$, $\arcsin(\varphi)$, $\arctan(\varphi)$ und $\operatorname{arccot}(\varphi)$ (links nach rechts, oben nach unten).

Satz 2.23 Alternative Darstellung komplexer Zahlen. *Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist darstellbar in der Form*

$$z = re^{i\varphi} = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

mit $r = |z|$ und einer reellen Zahl $\varphi \in [0, 2\pi)$. Man nennt φ das Argument von z. Für $z \neq 0$ ist φ eindeutig bestimmt.

Beweis: Für $z = 0$ ist $z = 0e^{i\varphi}$ mit beliebigem φ.
Seien $z \neq 0$ und $r = |z|$. Dann ist

$$\frac{z}{r} = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } \left|\frac{z}{r}\right| = \frac{r}{r} = 1.$$

Damit folgt $x^2 + y^2 = 1$. Also ist $x \in [-1, 1]$. Daher ist $\alpha = \arccos x \in [0, \pi]$ eindeutig definiert. Wegen $\cos\alpha = x$ ist

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - x^2 = y^2.$$

Damit gilt $\sin\alpha = \pm y$. Setze nun

$$\varphi = \begin{cases} \alpha & \text{falls } \sin\alpha = y, \\ 2\pi - \alpha & \text{falls } \sin\alpha = -y \text{ und } \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Damit ist $\varphi \in [0, 2\pi)$. Dann gelten für die beiden obigen Fälle

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha \\ \sin(2\pi - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha = -(-y) \end{array} \right\} = y, \\ \cos\varphi &= \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos\alpha \end{array} \right\} = x. \end{aligned}$$

Es folgt

$$z = r\,(x + iy) = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

Nun muss noch gezeigt werden, dass das Argument eindeutig ist. Sei $\psi \in [0, 2\pi)$. Aus $e^{i\varphi} = e^{i\psi}$ folgt $e^{i(\varphi-\psi)} = 1$, also $\cos(\varphi - \psi) = 1$ und $\sin(\varphi - \psi) = 0$. Ist o.B.d.A. $\varphi > \psi$, dann folgt aus Satz 2.17 $\varphi - \psi = \pi$ oder $\varphi - \psi = 0$. Die Beziehung für den Cosinus gilt jedoch nur im zweiten Fall, also ist $\varphi = \psi$. ■

Bemerkung 2.24 Geometrische Interpretation. Man kann z als Vektor $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ betrachten. In diesem Zusammenhang nennt man den $\mathbb{R}^2$ auch Gauß[2]sche Zahlenebene. In ihr ist $\overline{z}$ der an der x–Achse gespiegelte Vektor, und $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ ist die Länge des Vektors, siehe Abbildung 2.4. Das Argument ist der Winkel zwischen dem Vektor, der eine komplexe Zahl definiert, und der positiven x–Achse. Das Argument φ wird im Bogenmaß angegeben und es ist nur bis auf eine Periode von 2π bestimmt. Man nennt den Wert φ_0 mit $-\pi < \varphi_0 \le \pi$ den Hauptwert. □

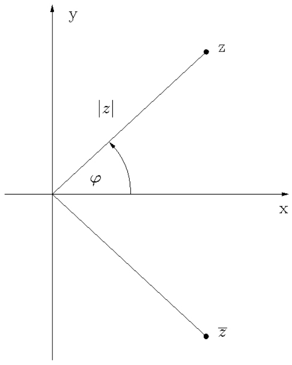

Abbildung 2.4: Geometrische Interpretation von komplexen Zahlen.

Bemerkung 2.25 Umrechnung zwischen den Darstellungen. Die Umrechnungen wurden bereits im Beweis von Satz 2.23 angegeben. Sei eine komplexe Zahl mit Radius r und Argument φ gegeben. Dann erhält man die Größen für die anderen Darstellungen mittels

$$\text{Realteil: } a = r\cos\varphi, \quad \text{Imaginärteil: } b = r\sin\varphi.$$

Andersherum gilt $r = \sqrt{a^2+b^2}$. Aus dem Beweis von Satz 2.23 folgt

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{b}{a} \implies \varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \text{ falls } a \neq 0, \ \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ sonst.}$$

Bei der Berechnung von φ muss man beachten, dass der Arkustangens nur Werte in zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ liefert. Falls der Realteil von z negativ ist, muss man dann noch die Periode π des Tangens addieren um ein Argument zu erhalten. Dann muss man gegebenenfalls noch den Hauptwert bestimmen. □

Bemerkung 2.26 Multiplikation und Division komplexer Zahlen mit Betrag und Argument. Seien zwei komplexe Zahlen $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ gegeben, dann folgt, mit Hilfe der Binomischen Gesetze und von Additionstheoremen von Winkelfunktionen,

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2 \Big[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\Big] \\ &= r_1 r_2 \Big[(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i(\sin(\varphi_1+\varphi_2))\Big]. \end{aligned}$$

Man sieht, die Beträge multiplizieren sich und die Argumente addieren sich.

Sind die beiden Zahlen mit der Eulerschen Zahl gegeben, so gilt mit bekannten Potenzgesetzen

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

[2]Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855)

Die Division wird auch hier auf die Multiplikation zurückgeführt

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{r_1 r_2\Big[(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i(\sin(\varphi_1-\varphi_2))\Big]}{r_2^2} \\ &= \frac{r_1}{r_2}\Big[(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i(\sin(\varphi_1-\varphi_2))\Big].\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.27 Addition komplexer Zahlen mit Betrag und Argument.. Die Addition komplexer Zahlen, die mit Betrag und Argument gegeben sind, kann man nicht einfach darstellen. Man rechnet in diesem Fall die Zahlen erst in die Darstellung mit a und b um und addiert dann. □

Bemerkung 2.28 Potenzierung komplexer Zahlen. Die Potenzierung komplexer Zahlen lässt sich in der Betrag–Argument–Schreibweise einfach ausführen. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten die Formeln

$$\left(r\left(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)\right)\right)^n = r^n\left(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi)\right), \quad \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Diese Formeln werden Moivre[3]'sche Formeln genannt.

Die Potenz mit negativem ganzzahligem Argument wird auf die Potenzierung mit einer natürlichen Zahl zurückgeführt, siehe Bemerkung 1.10. Speziell gilt

$$\left(re^{i\varphi}\right)^n = \frac{1}{\left(re^{i\varphi}\right)^{-n}} = \frac{1}{r^{-n}e^{-in\varphi}} = r^n e^{in\varphi},$$

das heißt, die Moivresche Formel gilt auch in diesem Fall.

Als nächstes wird der gebrochen rationale Exponent $1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$ betrachtet. Man definiert

$$\sqrt[n]{z} := \{w \in \mathbb{C} \ : \ w^n = z\}.$$

Man rechnet für $z = r(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0)$ mit der Moivreschen Formel nach, dass die Lösungen die Gestalt

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{z} &= \left\{\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}\right)\right], k=0,1,\ldots,n-1\right\} \\ &= \left\{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\varphi_0+2k\pi}{n}}, k=0,1,\ldots,n-1\right\}\end{aligned}$$

besitzen. Alle Argumente

$$\frac{\varphi_0+2k\pi}{n} = \frac{\varphi_0}{n} + 2\pi\frac{k}{n}$$

sind verschieden, da $0 \le k/n < 1$ und man innerhalb einer Periode der Winkelfunktionen bleibt. Man hat also n verschiedene Lösungen!

Den allgemeinen gebrochen rationalen Exponenten führt man auf bereits behandelte Fälle zurück

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(z^{\frac{1}{n}}\right)^m.$$

Ist der Exponent irrational, erhält man unendlich viele Lösungen. Dieser Fall ist aber für die Praxis nicht interessant. □

[3] Abraham de Moivre (1667 – 1754)

Beispiel 2.29 Potenzierung mit gebrochen rationalem Exponenten. Betrachte die dritte Wurzel von $z = i$. Zuerst muss man diese Zahl in eine passende Gestalt umrechnen, beispielsweise $z = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$. Das heißt $\varphi_0 = \pi/2$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{i} &= \left\{\cos\left(\frac{\pi/2}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2}{3}\right), \cos\left(\frac{\pi/2+2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2+2\pi}{3}\right),\right. \\
&\quad \left.\cos\left(\frac{\pi/2+4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2+4\pi}{3}\right)\right\} \\
&= \left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right),\right. \\
&\quad \left.\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right\}.
\end{aligned}$$

□

2.5 Bedeutung der komplexen Zahlen

Bemerkung 2.30 Motivation. Nun wird auf die Bedeutung der komplexen Zahlen für die Nullstellen von Polynomen eingegangen. □

Satz 2.31 Fundamentalsatz der Algebra. *Jedes komplexwertige Polynom* $p \in \mathbb{C}[z]$ *mit Grad* $\deg(p) > 0$ *hat eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$. *Man sagt „$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen“.*

Beweis: Siehe Literatur. ■

Folgerung 2.32 *Jedes Polynom* $p \in \mathbb{C}[z]$ *mit* $\deg(p) = n > 1$ *zerfällt in* n *Linearfaktoren, das heißt ist*

$$p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \ a_k \in \mathbb{C}, \ k = 0, \ldots, n, \ a_n \neq 0,$$

dann existieren n *Nullstellen* $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ *von* $p(z)$ *und die Zerlegung*

$$p(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n).$$

Beispiel 2.33 Betrachte das Polynom $p(z) = 2z^2 - 3z + 5$. Dieses besitzt die Nullstellen

$$z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{-31}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{31}\sqrt{-1}}{4} = \frac{3}{4} \pm i\frac{\sqrt{31}}{4},$$

woraus man die Zerlegung

$$p(z) = 2\left(z - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{31}}{4}i\right)\left(z - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{31}}{4}i\right)$$

erhält. □

Bemerkung 2.34 Fazit von Kapitel 1 und 2.

- Es wurde erstmals eine komplexwertige Funktion einer komplexen Veränderlichen betrachtet: die komplexe Exponentialfunktion. Die Untersuchung solcher Funktionen ist ein Teilgebiet der Analysis, die Funktionentheorie.

- Die trigonometrischen Funktionen wurden alternativ zur klassichen Herangehensweise eingeführt.
    - Einige Eigenschaften, wie Nullstellen und Periodizität, erfordern bei der alternativen Einführung etwas mehr Aufwand beim Beweis.
    - Andere Eigenschaften, wie Additionstheoreme, lassen sich wesentlich einfacher beweisen.
- Es wurden zwei Darstellungen für komplexe Zahlen eingeführt. Dabei stellt sich heraus, dass es Operationen gibt, für welche eine der beiden Darstellungen günstiger als die andere ist.

□