Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 09.04.2002

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis 2

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 1

08.04. – 12.04.2002

Die Lösung der Aufgaben 2, 3 und 4, Abschnitt Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen, sind in der Vorlesung am Mittwoch, dem 17.04.2002, schriftlich abzugeben ! Eine spätere Abgabe der Lösung wird nur in begründeten Ausnahmefällen akzeptiert !!! (Krankenschein)

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Lokale Extrema, Mittelwertsatz, Konvexität

1. Sei $t \in \mathbb{R}, t > 0$ gegeben. Man führe eine Kurvendiskussion der Funktionenschar

$$f(x) = \frac{4}{9}t^2x^3 + tx^2 - \frac{4}{3}x$$

durch (Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte, konvex/konkav).

2. Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $f(x) \geq 0$ für alle $x > 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = 0$. Schließlich gebe es eine einzige Stelle $x_0 \in (0,\infty)$ mit $f'(x_0) = 0$. Man zeige, daß x_0 die einzige globale und lokale Extremstelle von f ist und daß gilt $f(x_0) > f(x)$ für alle $x \in (0,\infty) \setminus \{x_0\}$.

Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen

1. Man zeige, daß jede der Funktionen $f_k, k \in \mathbb{N}$,

$$f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1/k \\ 1 - k|x| & |x| < 1/k \end{cases}$$

stetig ist. Man berechne die $C^0([-1/k, 1/k])$–Norm der Funktion f_k.

2. Wir betrachten die Funktionenfolge $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_k(x) = x^k.$$

Man untersuche die punktweise Konvergenz von $\{f_k(x)\}$ für $k \to \infty$. Konvergiert die Funktionenfolge auch gleichmäßig ? (Begründung !) **3 Punkte**

3. Wir betrachten die Funktionenfolge $\{f_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_k : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \frac{x}{1 + k^2x^2}.$$

Man zeige, daß die Funktionenfolge für $k \to \infty$ gleichmäßig gegen $f \equiv 0$ konvergiert. Beim Beweis verwende man die Definition der gleichmäßigen Konvergenz.
Hinweis: Man erweitere $f_k(x)$ mit $2k/(2k)$. **2 Punkte**

4. Sei
$$C^1([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ ist stetig differenzierbar}\}.$$
Man zeige, daß
$$\|f\|_{C^1([a,b])} := \|f\|_{C^0([a,b])} + \|f'\|_{C^0([a,b])}$$
eine Norm in $C^1([a,b])$ definiert. Definiert
$$|||f||| := \|f\|_{C^0([a,b])}$$
ebenfalls eine Norm in $C^1([a,b])$? Welche Eigenschaft der Raumes $C^1([a,b])$ ändert sich wenn man ihn mit $|||\cdot|||$ anstelle mit $\|\cdot\|_{C^1([a,b])}$ ausstattet ? (kein Beweis) **5 Punkte**

5. Man bestimme die Konvergenzradien ρ der folgenden Potenzreihen und untersuche die Konvergenz in den Punkten $z = \rho$ und $z = -\rho$!
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! z^n}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 5^{(n^2)} z^{(n^2)}.$$
Hinweis: Potenzreihen sind spezielle Reihen. Damit können alle bekannten Konvergenzkriterien von Reihen genutzt werden.

6. Man bestimme den Konvergenzradius von
$$\sum_{l=0}^{\infty} z^l.$$
Für alle z innerhalb des Konvergenzkreises multipliziere man die obige Potenzreihe mit sich selbst und vereinfache das Ergebnis soweit wie möglich. Dabei nutze man das Cauchy–Produnkt für Potenzreihen
$$\left(\sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l\right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j z^j\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{l} a_j b_{l-j}\right) z^l.$$