Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 23.01.2002

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 13

28.01. – 01.02.2002

Die Lösung der Aufgabe 5 ist in der Vorlesung am Donnerstag, dem 31.01.2002, schriftlich abzugeben !

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Stetigkeit und Differentiation von Funktionen

1. Sei $S_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ die Einheitssphäre
$$S_1(0) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x_1^2 + x_2^2 = 1\}.$$
Gegeben sei die Abbildung
$$\begin{array}{rcl} f : [0, 2\pi) & \to & S_1(0) \\ x & \to & \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}. \end{array}$$
Man untersuche, ob die Umkehrabbildung existiert. Falls ja, ist diese stetig?

2. Mit Hilfe des Satzes über die Ableitung der Umkehrfunktion berechne man die Ableitungen von
$$\begin{array}{rcl} \arcsin & : & (-1, 1) \to \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right), \\ \arccos & : & (-1, 1) \to (0, \pi)\,. \end{array}$$

3. Man zeige mit Hilfe des Differenzenquotienten, daß
$$\frac{d}{dx} \cos x = - \sin x.$$

4. Seien $f(x), g(x)$ in (a,b) differenzierbar und $f(x) > 0$. Man leite eine allgemeine Formel für
$$\frac{d}{dx} \left(f(x)^{g(x)} \right)$$
her.

5. Regel von Bernoulli – de l'Hospital. Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ seien in einer Umgebung $U(x_0)$ von $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Ferner seien $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ in $U(x_0)$. Man zeige, daß dann
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

5 Punkte