Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 16.01.2002

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 12

21.01. – 25.01.2002

Die Lösung der Aufgabe 1, Abschnitt Konvergenz von Reihen, und der Aufgabe 2, Abschnitt Stetige Abbildungen und Funktionen, sind in der Vorlesung am Donnerstag, dem 24.01.2002, schriftlich abzugeben !

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Stetige Abbildungen und Funktionen

1. Sei $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom ungeraden Grades

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

mit $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Man zeige, daß $f(x)$ wenigstens eine reelle Nullstelle besitzt. **3 Punkte**

2. Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$ eine stetige Abbildung. Man zeige, daß $f(\Omega)$ zusammenhängend ist, d.h. zwischen je zwei Punkten $y_0, y_1 \in f(\Omega)$ gibt es einen Weg in $f(\Omega)$.

3. Man zeige, eine monoton wachsende Funktion $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kann höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzen.
Hinweis: Zuerst überlege man sich, welche Art von Unstetigkeitsstellen eine monotone Funktion überhaupt besitzen kann.

4. Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-x^4 + 5x^2y^2 + 3x^2y + xy}{(x^2+y^2)^2} & x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$. **2 Punkte**

5. Man zeige, daß die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} \dfrac{x_1^2 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } x_1^2 + x_2^2 \neq 0 \\ 0 & \text{für } x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$$

stetig ist.
Hinweis: Die Stetigkeit im Koordinatenursprung erhält man durch geeignete Abschätzungen von $f(x_1, x_2)$ oder durch Übergang zu Polarkoordinaten.

Elementare Funktionen

1. Man zeige mit Hilfe der in der Vorlesung gegebenen Definition der Potenzfunktion

$$\begin{aligned} \log(x^y) &= y \log x, \quad x, y \in \mathbb{R}, x > 0, \\ (a^x)^y &= a^{xy}, \quad a, x, y \in \mathbb{R}, a > 0. \end{aligned}$$

2. Man vereinfache

$$a^{\frac{\log_b \log_b a}{\log_b a}}.$$

3. Sei $z \in \mathbb{C}$. Man zeige mit Hilfe der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und der Eulerschen Identität

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}.$$

4. Mit Hilfe der Additionstheoreme für $\sin(x + y)$ und $\cos(x + y)$ leite man Additionstheoreme für

   a) $\sin(3x)$ als Funktion von $\sin x$,

   b) $\tan(2x)$ als Funktion von $\tan x$

   her.