Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 18.12.2001

# Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

## Serie 10

07.01. – 11.01.2002

**Die Lösung der Aufgabe 2 ist in der Vorlesung am Donnerstag, dem 10.01.2002, schriftlich abzugeben !**

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

## Konvergenz von Reihen

1. Man beweise das Wurzelkriterium. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge positiver reeller Zahlen.

   i) Gibt es ein $q$ mit $0 \le q < 1$ sowie ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $k \ge k_0$ gilt
   $$\sqrt[k]{a_k} \le q,$$
   so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent.

   ii) Gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$, so daß für alle $k \ge k_0$ gilt
   $$1 \le \sqrt[k]{a_k},$$
   so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

   *Hinweis: Zum Beweis der ersten Aussage nutze man das Majorantenkriterium und die geometrische Reihe.*

2. Man untersuche die folgenden Reihen, mit Hilfe der in der Vorlesung bewiesenen Kriterien, auf Konvergenz:
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n-1}.$$

   **5 Punkte**

3. Man bestimme die Summe der Reihen
   $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}.$$

4. Man untersuche die folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz:
   $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}.$$

5. Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

(a) Man zeige: Die Reihe ist alternierend und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Man zeige $a_{2k} + a_{2k+1} > \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1}$ und beweise mit Hilfe dieser Ungleichung die Divergenz der Reihe.

(c) Warum ist das Leibniz–Kriterium nicht anwendbar ?

6. Aus der Vorlesung ist bekannt, daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$$

und daß diese Reihe nicht absolut konvergent ist. Man finde eine Umordnung der Reihe, sodaß der Reihenwert $1.5\ln(2)$ beträgt.
*Hinweis: Man kann wie folgt vorgehen: Man setze*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

*und betrachte dann*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n.$$