Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. H.–Ch. Grunau
Dr. V. John

Magdeburg, 01.11.2001

Seminaraufgaben zum Grundkurs Analysis

Studiengänge Mathematik, Technomathematik,
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Serie 3

05.11. – 09.11.2001

Die Lösung der Aufgabe 3 des Abschnittes natürliche Zahlen ist in der Vorlesung am Donnerstag, dem 08.11.2001, schriftlich abzugeben !

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Reelle Zahlen

1. Man beweise die Ungleichungen :
   (a) Für $r, s \in \mathbb{R}$ mit $0 \le r < s$ gilt
   $$\frac{r}{1+r} < \frac{s}{1+s}.$$
   (b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt
   $$\frac{x+y}{1+|x+y|} \le \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}.$$
2. Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ für die gilt
   (a) $|3x-2| < 5$,
   (b) $\dfrac{x+4}{x-2} < x$,
   (c) $x(2-x) > 1 + |x|$.

Natürliche Zahlen

1. Man zeige mit vollständiger Induktion, daß für ganze nichtnegative Zahlen n der Ausdruck
   $$11^{n+2} + 12^{2n+1}$$
   durch 133 teilbar ist.
2. Man beweise die Gültigkeit der Beziehung
   $$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ mal}} = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}$$
   für alle natürlichen Zahlen n.
3. Man beweise mit vollständiger Induktion, daß für beliebige Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und für jede natürliche Zahl n die Gleichung
   $$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{s} a^{n-s}b^s + \ldots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + b^n,$$
   der sogenannte binomische Satz, gilt. **5 Punkte**