Fakultät für Mathematik
Institut für Analysis und Numerik
Prof. Dr. L. Tobiska
Dr. V. John

Magdeburg, den 22.11.2000

Leistungskontrolle Nr. 2, Gruppe A
Grundkurs Analysis
Studiengänge Mathematik, Technomathematik
Wirtschaftsmathematik, Physik und Lehramt

Name:

Studiengang:

Matrikelnummer:

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen und Nebenrechnungen sind abzugeben. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte, die nicht ausdrücklich bewiesen werden sollen, können vorausgesetzt werden.

1. Gegeben sei eine Menge A. Was bedeutet, daß A abzählbar ist ? Man beschreibe einen Weg, auf dem man zeigen kann, daß die Menge $\mathbb{Q}^+$ der positiven rationalen Zahlen abzählbar ist. **2 Punkte**

2. Man vereinfache
$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_{i+2}.$$
1 Punkt

3. Man berechne
$$\left|(1-2i)^2\right| \ \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right) + \mathrm{Im}\left(\frac{\pi}{10} + 4i\right) \ \arg(-5i).$$
Beim Argument nehme man den Hauptwert. **2 Punkte**

4. Man untersuche ob $(\mathbb{R}^2, d)$ mit
$$d(x,y) = x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2, \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$
ein metrischer Raum ist. **2 Punkte**

5. Man zeige, daß $(\mathbb{R}^n, d)$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ und
$$d(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$
ein metrischer Raum ist. **5 Punkte**

6. Gegeben sei der metrische Raum $(\mathbb{R}^2, d)$ mit
$$d(x,y) = \max\left\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\right\}, \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2).$$
Man gebe den abgeschlossenen Kreis mit dem Mittelpunkt $(1,3)$ und dem Radius 2 an (Angabe als Menge und Skizze). **2 Punkte**

7. Sei (E, d) ein metrischer Raum, A eine offene Menge und B eine abgeschlossene Menge. Man zeige, daß $A \setminus B$ offen ist.
Hinweis: Man überlege sich, in welcher Beziehung $A \setminus B$ mit A und $C_E B$ steht. **3 Punkte**