Was sind Zahlen?
Intuition oder Axiomatik in der Mathematik

Holger Stephan

Weierstraß Institut für Angewandte
Analysis und Stochastik (WIAS), Berlin

Mathematische Forschung verstehen
30. April $1^3 + 2^3 + ... + 9^3$, FU Berlin

Modellierung ist schwierig

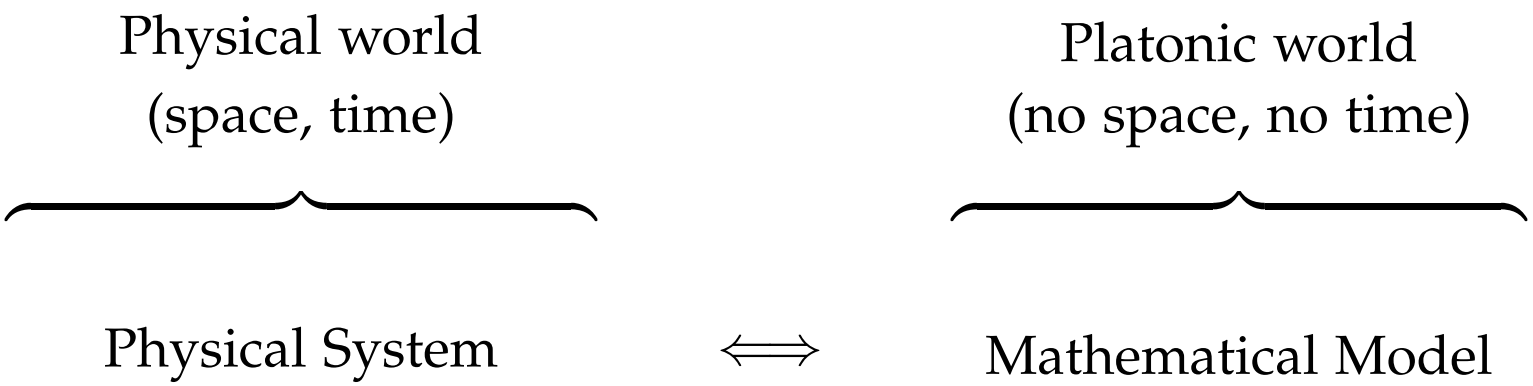
O glücklich, wer noch hoffen kann
Aus diesem Meer des Irrtums aufzutauchen!
Was man nicht weiß, das eben brauchte man,
Und was man weiß, kann man nicht brauchen.

Goethe, Bemerkung von Faust an Wagner

Ideale Modellierung ist prinzipiell nicht möglich

Insofern sich die Sätze der Mathematik
auf die Wirklichkeit beziehen,
sind sie nicht sicher,
und insofern sie sicher sind,
beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.

Albert Einstein



Probleme mit Zahlen

- Zahlkörper. Abgeschlossen bzgl. $+, -, *, /$, Funktionen
- Was sind 5 Meter + 3 Stunden?
- Was sind 3 Birnen + 4 Äpfel?
- Temperaturen addieren
- Wir haben zwei chemische Lösungen: 66.6% und 50.0%.
  Wieviel prozentig ist das Gemisch?
- Addition von Geschwindigkeiten (nicht relativistisch) ist i.O.?
- Wir fahren 2 Stunden mit 60 km/h
  und 3 Stunden mit 100 km/h.
  60 km/h + 100 km/h ist eine sinnvolle Aufgabe??
- Preise: Eine Aktie von A kostet a, eine von B kostet b. $a + b = ?$.

Physikalische Größen

- Einige Beispiele:
  - Chemie/Alltag: Alkoholmenge, Alkoholgehalt, Gesamtvolumen
  - Mechanik: Weg, Geschwindigkeit, Zeitintervall
  - Ökonomie: Umsatz, Preis (z.B. Aktie), Stückzahl

Physikalische Größen

- Einige Beispiele:
  - Chemie/Alltag: Alkoholmenge, Alkoholgehalt, Gesamtvolumen
  - Mechanik: Weg, Geschwindigkeit, Zeitintervall
  - Ökonomie: Umsatz, Preis (z.B. Aktie), Stückzahl
- Verhalten sich bei Kontakt mehrerer Körper ist verschieden
- Extensive Größen (EG) addieren (vergrößern) sich. $A, B, C, \ldots$
- Intensive Größen (IG) mitteln sich, gleichen sich aus. $a, b, c, \ldots$
- Es gibt nur EGs und IGs! Alle anderen sind abgeleitet.
- Galileis Fallgesetz (siehe **“stephan wias galilei”**)

Woher bekommen Physikalische Größen ihre Zahlenwerte?

- Woher bekommen extensive Größen ihre Zahlenwerte?
  Additivität $\Longrightarrow$ Normmaße zählen
- Woher bekommen intensive Größen ihre Zahlenwerte?
- Einige Beispiele:
  - Chemie/Alltag: Alkoholmenge, Alkoholgehalt, Gesamtvolumen
    $A = \% \cdot M \Longrightarrow \% = A/M$
  - Mechanik: Weg, Geschwindigkeit, Zeitintervall
    $L = v \cdot T \Longrightarrow v = L/T$
  - Ökonomie: Umsatz, Preis (z.B. Aktie), Stückzahl
    $U = p \cdot S \Longrightarrow p = U/S$

"Satz": *Es seien* B, C *additive Größen und* $C = f(a, B)$. ...
Dann ist $a = \varphi(C/B)$, φ *affin, z.B.* $\varphi = id$

Extensive und Intensive Größen

a intensiv, B, C extensiv

$$C = a \cdot B \iff a = \frac{C}{B}$$

- Extensive Größen
  - kann man addieren
  - kann man nicht (miteinander) multiplizieren
  - kann man messen (endliche Dezimalbrüche)
  - beschreiben einen Raumaspekt am Zeitpunkt
- Intensive Größen
  - kann man nicht addieren (genauer: selten)
  - kann man multiplizieren (z.B. Anteile)
  - kann man berechnen (gemeine Brüche)
  - beschreiben einen Zeitaspekt am Raumpunkt

Wie "addieren" sich sich intensive Größen?

a_1, a_2 intensive Größen, B_1, B_2, C_1, C_2 extensive Größen.
$a_i = C_i/B_i$, $C_i = a_i \cdot B_i$

Nach Kontakt erhalten wir Summen B, C und ein Mittel $\bar{a}$.

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2,\ B = B_1 + B_2 \\ \frac{C}{B} = \bar{a} &= a_1 \oplus a_2 = \frac{C_1}{B_1} \oplus \frac{C_2}{B_2} = \frac{C_1 + C_2}{B_1 + B_2} \end{aligned}$$

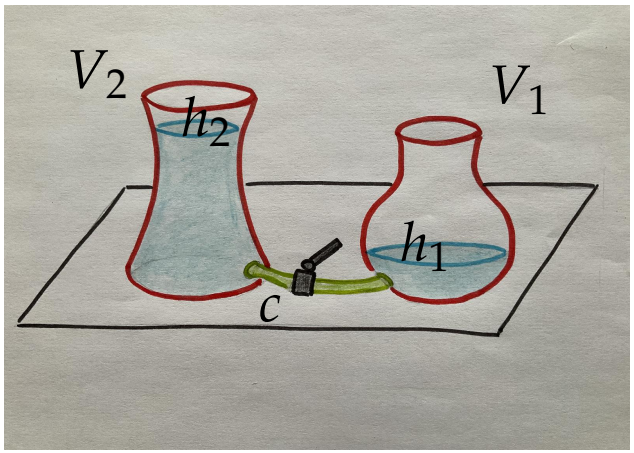
$$\frac{C_1}{B_1} \oplus \frac{C_2}{B_2} = \frac{C_1 + C_2}{B_1 + B_2}$$

Heißt: Chuquet-Mittel, Mediant

Herleitung einer Bilanzgleichung

Typische Bilanzgleichung: $u_t(x,t) = Du_{xx}(x,t)$ (Diffus., Wärmeleit.)

Es sei $0 < t_1 < t < t_2$.



$$
\begin{aligned}
V_1(t_2) &= V_1(t_1) + c(t_2 - t_1)\big(h_2(t) - h_1(t)\big) \\
V_2(t_2) &= V_2(t_1) - c(t_2 - t_1)\big(h_2(t) - h_1(t)\big) \\
&\qquad t_2 - t_1 \to 0 \\
V_1'(t) &= +c\big(h_2(t) - h_1(t)\big) \\
V_2'(t) &= -c\big(h_2(t) - h_1(t)\big)
\end{aligned}
$$

$V = (V_1, \ldots, V_n)$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$, **D**-Inzidenzmatrix $\big(\dim = \binom{n}{2} \times n\big)$

$$
\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad V'(t) &= -\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{D}\, h(t) \\
V_i(h_i) &= \int_0^{h_i} S_i(h')dh', \qquad S_i \text{ ist Schnittfläche (Cavalieri)}
\end{aligned}
$$

Ethische und Goldene Regel der Modellierung

$$V'(t) = -\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{D}\, h(t), \quad V_i(h_i) = \int_0^{h_i} S_i(h')dh'$$

ist die diskrete Verion von

$$\frac{\partial}{\partial t} V(x,t) = \operatorname{div} C(x) \operatorname{grad} h(x,t), \quad V(x) = \Phi\big(h(x)\big)$$

Goldene Regel der Modellierung:
Die Ursache der zeitlichen Änderung einer extensiven Größe ist der räumliche Unterschied einer intensiven Größe.

oder

Eine räumliche Größe ändert sich in der Zeit weil eine zeitliche Größe im Raum unterschiedlich ist.

Ethische Regel der Modellierung:
Nicht alles was man darf, sollte man auch tun.

Mutiplikation

- Zwei Kopfrechenaufgaben
  1) Aufgabe: Wieviel ist 25% von 24 ?
  2) Aufgabe: Wieviel ist 24% von 25 ?
- Die Multiplikation ist kommutativ, gefühlt nichtkommutativ.
- Extensiv = extensiv mal intensiv + extensiv mal intensiv + ...
  - Gesamtweg = Geschwindigkeit mal Zeit
    420 km = 120 km/h $*$ 2 Stunden $+$ 60 km/h $*$ 3 Stunden
  - Umsatz = Preis mal Stückzahl
    110 Eus = 10 Stück zu 5 Eus/Stück + 20 Stück zu 3 Eus/Stück

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \\ &= a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot B_2 + \ldots + a_n \cdot B_n = \\ &= \bar{a} \cdot (B_1 + B_2 + \ldots + B_n) \end{aligned}$$

- Achtung: $a_i \cdot B_i \neq b_i \cdot A_i$

Was sind das für Zahlen,

die man extensiven und intensiven Größen zuordnen kann?

Was sind Zahlen?

- Intuitiv: Zahlen sind Anzahlen, sind Kardinalzahlen (KardZ)
- Addition entspricht Mengenoperationen
- Extensive Größen sind KardZ (endliche Dezimalbrüche)
- Wozu Ordinalzahlen (OrdZ)?
  Ordnung, Nummerierung, kann man nicht addieren
- Intensive Größen sind OrdZ (darauf läuft es hinaus)

Historisches

- Zahlenbenutzung seit $\sim$ 5000 v.Chr. (d.h. schon immer).
- Bei der Griechen drei Sorten von Zahlen:
  Größen (Anzahlen, Längen, Flächen),
  Verhältnisse (Quotienten von Größen) und
  natürliche (abstrakte) Zahlen
- Komplexe Zahlen seit 1545 (Gerolamo Cardano)
- Punkte sind Zahlen (kartesisches Koordinatensystem
  Fermat (1607 – 1665), Descartes (1596 – 1650)
- 1872 – 1887 Axiomatisierung der reellen Zahlen (Dedekind)
- 1889 Axiomatisierung der natürlichen Zahlen (Peano)
  Jede Zahl hat einen Nachfolger. Vollständige Induktion.
  !! OrdZ $\Longrightarrow$ KardZ !! völlig unintuitiv + Identifizierung

Äquivalenz von Kardinal- und Ordinalzahlen

Es werden die Ordinalzahlen (Peano) axiomatisch festgelegt und die Rechengesetze hergeleitet. Um eine Äquivalenz zwischen Kardinal- und Ordinalzahlen herzustellen, werden spezielle Mengen konstruiert:

$$
\begin{aligned}
0 &:= \emptyset \\
1 &:= \{\emptyset\} \\
2 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
3 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \\
4 &:= \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \\
&\vdots \\
n+1 &:= n \cup \{n\}
\end{aligned}
$$

Ist das intuitiv? Ein Sack mit 20 Kartoffeln ist äquivalent zu $2^{19} = 524288$ raffiniert ineinandergelegten leeren Säcken.

Was ist Zählen?

- Ist Identifizierung in der Praxis gerechtferigt?
  Benutzen wir die Identifizierung (unbewußt)?
- Wir zählen in der Zeit an einem räumlichen Punkt und erhalten etwas Räumliches zu einem Zeitpunkt.
- Ergodisches Verhalten (Wolken am Himmel)
- Menge (KardinalZ) lebt im Raum.
  Zahlenreihe (OrdinalZ) lebt in der Zeit.
- Kinder
  - Können früh zählen (haben die Ordinalzahlen gelernt)
  - Können aber nicht abzählen. (KardinalZ $\neq$ OrdinalZ)
  - Benutzen das Abzählen aus eigenem Antrieb sehr spät.
  - Können “vorwärts” nicht bis 1 zählen, nur rückwärts.

Raum- und Zeitaspekt

... Aber Zählen ist keine Zahl, so wenig als Zeichnen eine Zeichnung ist. Zählen und Zeichnen sind ein Werden, Zahlen und Figuren sind Gewordenes.

Oswald Spengler (Der Untergang des Abendlandes 1918 – 1922)

Wie kann man intensive Größen (gemeine Brüche)
als Ordinalzahlen interpretieren?

Nicht natürliche Ordinalzahlen

- IntensiveGr (gemeine Brüche) $\overset{?}{\sim}$ OrdinalZ
- Gibt es eine Operation, bei der sich Ordinalzahlen wie intensive Größen verhalten?
- "Addition" von intensiven Größen (Mediant)

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

- Ordnungszahlen dienen zum Ordnen und Zählen

Wie zählt und ordnet man zeitlich gegebene Objekte?

0, 1, 0.385314, 0.277297, 0.524501, 0.829456, 0.634006,
0.271978, 0.2875, 0.270612, 0.106175, 0.483948, ...

$0 \to \frac{0}{1}., 1 \to \frac{1}{1}.,$

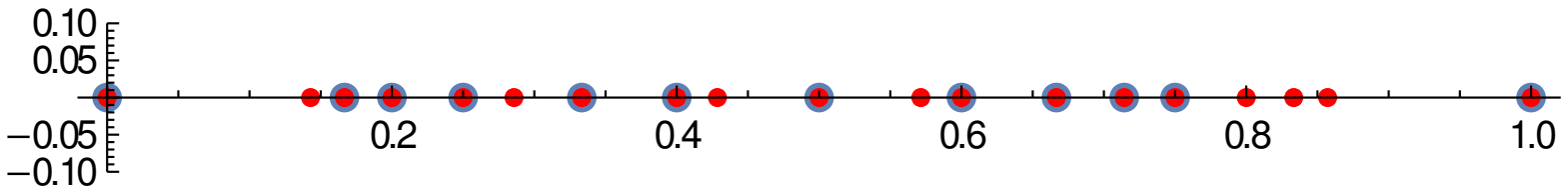
$0.385314 \in [0,1] \to \frac{0}{1}. \oplus \frac{1}{1}. = \frac{1}{2}.$

$0.277297 \in [0, 0.385314] \to \frac{0}{1}. \oplus \frac{1}{2}. = \frac{1}{3}.$

$0.524501 \in [0.385314, 1] \to \frac{1}{2}. \oplus \frac{1}{1}. = \frac{2}{3}.$

$0.829456 \in [0.524501, 1] \to \frac{2}{3}. \oplus \frac{1}{1}. = \frac{3}{4}.$

$0.634006 \in [0.524501, 0.829456] \to \frac{2}{3}. \oplus \frac{3}{4}. = \frac{5}{7}. \quad ...$



Die intensive Addition. Der Mediant

Eigenschaften **ÜA**

- Mediant liegt stets dazwischen.
- Nachbarbrüche (**Euklidischer Alg., Kettenbrüche**)
- Alle Brüche kommen potentiell vor (**Farey-Reihen**)
- Brüche sind stets unkürzbar

Dualität Intensiver und Extensiver Größen

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \\ &= a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot B_2 + \ldots + a_n \cdot B_n = \langle a, B \rangle = \\ &= \bar{a} \cdot (B_1 + B_2 + \ldots + B_n) \end{aligned}$$

Was ist $\langle a, B \rangle$? Skalarprodukt? Achtung: $a_i \cdot B_i \neq b_i \cdot A_i$
Nein, duale Paarung!

Im unendlich-dimensionalen

$$C(\Omega) = \int_\Omega a(z) B(dz) = \bar{a} \int_\Omega B(dz) = \bar{a}\, B(\Omega) \Longrightarrow \bar{a} = \frac{C(\Omega)}{B(\Omega)}$$

$$C(\Omega) = \int_\Omega a(z) B(dz) \quad \Longleftrightarrow \quad a(z) = \left. \frac{C(\Omega)}{B(\Omega)} \right|_{z \in \Omega, \Omega \to \{z\}}$$

Lebesgueintegral Radon-Nikodym Ableitung

?? Was ist a, was ist B, C ??

Banachräume

Lebesgueräume: $L_1 \ldots L_p \ldots L_2 \ldots L_q \ldots L_\infty$

$$L_p^* = L_q,\ L_q^* = L_p,\ p,q > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$L_1^* = L_\infty \quad \text{aber } L_\infty^* \neq L_1$$

Es sei $f \in \mathcal{X}, f = f_+ - f_-,\ |f| = f_+ + f_- = f_+ \vee f_-$.
Es gilt für beliebige Normen ($\vee$ ist sup)

$$\|f_+\| \vee \|f_-\| \leq \|f_+ \vee f_-\| = \| \ |f| \ \| = \|f_+ + f_-\| \leq \|f_+\| + \|f_-\|$$

$$\uparrow \quad = \text{für } L_\infty \qquad\qquad \uparrow \quad = \text{für } L_1$$

Rieszräume (Banachverbände)

$$\|f_+\| \vee \|f_-\| \leq \|f_+ \vee f_-\| = \| \, |f| \, \| = \|f_+ + f_-\| \leq \|f_+\| + \|f_-\|$$

- Riesz-Räume sind Banachräume mit $\geq$, sup und inf
- AM-Räume sind Räume mit $\|f \vee g\| = \|f\| \vee \|g\|, f, g \geq 0$
- AL-Räume sind Räume mit $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|, f, g \geq 0$
- $\mathrm{AM}^* = \mathrm{AL}$, $\mathrm{AL}^* = \mathrm{AM}$
- AM enthält intensive, AL enthält extensive Größen.
- Was für Räume? L_∞ und L_1?

Stetige Funktionen und Radonmaße

- Satz von Kakutani: *Es sei $\mathcal{X}$ ein vollständiger, separabler AM-Raum. Dann existiert ein topologischer Raum $\mathcal{Z}$ der Hausdorff, erstabzählbar und kompakt ist (genannt Stoneraum) mit $\mathcal{X} = \mathcal{C}(\mathcal{Z})$ (Raum stetiger Funktionen).*
- Satz von Satz von Riesz-Markow:
  $\mathcal{C}^*(\mathcal{Z}) = \mathcal{M}(\mathcal{Z}, \mathcal{B})$ (Banachraum der Radonmaße).
- $\mathcal{C}(\mathcal{Z})$ Raum der intensiven Größen (Beobachtungen),
  $\mathcal{M}(\mathcal{Z}, \mathcal{B})$ Raum der extensiven Größen (Zustände).
- Stoneraum läßt sich konstruieren, d.h. zu einer abstrakten Menge $\mathcal{X}$ von Beobachtungen läßt sich ein Raum von Zuständen $\mathcal{Z}$ konstruieren, derart, daß die Beobachtungen als Beobachtungen der Zustände interpretiert werden können.
  Läßt sich die Welt durch Beobachtung erkennen? Jein!

Historisches. Das Jahr der Zahlen

- 1872 – 1887 Axiomatisierung der reellen Zahlen
- 1887 “das Jahr der Zahlen”
  - Hermann von Helmholtz. *Zählen und Messen*
    (Reelle Zahlen = physikalische Größen)
  - Richard Dedekind. *Was sind Zahlen*
    (Dedekindscher Schnitt, ε, δ-Begriffe)
  - Edmund Husserl. *Über den Begriff der Zahl*
  - Leopold Kronecker. *Über den Zahlbegriff*
- 1889 natürliche Zahlen (Peanoschen Axiome)

Paradoxa mit reellen Zahlen

- Gleichheit oder Ungleichheit von reellen Zahlen

  $x = \tan 7.5^\circ, \quad y = \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2, \quad x \stackrel{?}{=} y$

  $x = 0.131652497587395853471526\ldots$

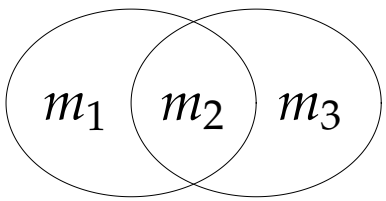
  $y = 0.131652497587395853471526\ldots, \; x = y$ **ÜA**

$\Longrightarrow$ Ungleichheit feststellbar, Gleichheit im allgemeinen nicht.

- **Satz:** Wenn die Summe einer Menge positiver Zahlen endlich ist, können es nur abzählbar viele Zahlen sein. **ÜA**
- Das **Banach-Tarski-Paradoxon** (Auswahlaxion)
- Problem: Überabzählbarkeit (Satz von Cantor: $A \not\Longleftrightarrow 2^A$)
- Es gibt überabzählbar viele Punkte,
  aber (intuitiv) nur abzählbar viele Zahlen!

Helmholtz. Zählen und Messen (1887)

- Helmholtz: Reelle Zahlen sind Meßergebnisse (das ist sein Ziel). Ein Meßinstrument ist ein Gerät, das "unendlich" exakt ist.
- Wir vergleichen mit einer Balkenwaage die Massen dreier Kugeln m_1, m_2 und m_3.
- Ergebnis: $m_1 = m_2$, $m_2 = m_3$. Folgt daraus $m_1 = m_3$?
- Nicht unbedingt: Bei Meßgenauigkeit von 0.5g: $m_1 \neq m_3$ $m_1 = 5.1g,\ m_2 = 5.5g,\ m_3 = 5.9g$.
- Besser: Interpretation von Meßergebnissen als "Enthaltensein in offenen Mengen". $\Longrightarrow$ Topologie.



$$m_1 = m_2,\ m_2 = m_3 \not\Longrightarrow m_1 = m_3$$

Gibt es überhaupt ein Kontinuum?

- Ja! Intensive Größen sind kontinuierlich.
- Besteht das Kontinuum aus Punkten? **Zenons Paradoxa**
- Brauchen wir reelle Zahlen?
  Ja (Zwischenwertsatz, Grenzwerte), aber nicht alle!

Identifizierung von Punkten und Zahlen

Dedekind. Was sind Zahlen. (1887)

Will man nun, **was doch der Wunsch ist**, *alle Erscheinungen in der Geraden auch arithmetisch verfolgen, so ... wird daher unumgänglich notwendig ... eine Schöpfung von neuen Zahlen der Art, daß das Gebiet der Zahlen dieselbe Vollständigkeit oder, wie wir gleich sagen wollen, dieselbe Stetigkeit gewinnt, wie die gerade Linie.*

$\Longrightarrow$ Es geht um die Identifizierung von Punkten und Zahlen!
Punkte sind kontinuierlich, Zahlen sind diskret.

Zusammenfassung

	primale Welt	duale Welt	Identifizierung
Zahlen	Ordinal-	Kardinal-	abstrakte
Relation	Ordnungs-	Äquivalenz-	
Größen	intensive	extensive	
Aspekt	zeitlich	räumlich	
	kontinuierlich	diskret	nath. Punkte
	Beobachtungen	Zustände	
Räume	$C(\mathcal{Z})$	$M(\mathcal{Z}, \mathcal{B})$	(L_2-Räume)
	(stetige Funktionen)	(Radonmaße)	
Kardinalität	(über)abzählbar	abzählbar	
Mengen	Teilmenge	Element	