Mathematik und Erkenntnistheorie

HOLGER STEPHAN

Weierstraß Institut für Angewandte
Analysis und Stochastik (WIAS), Berlin

Lange Nacht der Wissenschaften
22. Juni 2024

Woher kommt unser Wissen?

- Jean Piaget (1950):
  Das zentrale Problem der Erkenntnistheorie hat schon immer in der Existenz einer mathematischen Wissenschaft bestanden, die einerseits streng deduktiv ist und andererseits auch genau mit dem Experiment übereinstimmt.
- Wir können uns darauf verlassen, daß $a + b = c$.
  wenn es stimmt, dann ist es auch beim Nachzählen richtig.
- Deduktion: gegebenen Voraussetzungen $\Longrightarrow$ Folgerungen
- Induktion: wenige Beobachtungen $\Longrightarrow$ allgemeine Erkenntnis
- **Ziel des Vortrages**
  - Beobachtung (Daten) schaffen kein Wissen
  - Wissenschaftliche Erkenntnisse sind mathematische Erkenntnisse
  - Die Mathematik beschreibt nicht die physische Realität

Etwas Geschichte

- um 300 v.Chr.: Platon: Wissenschaft ist das Erkennen von Ideen. Ideen leben außerhalb von Raum und Zeit (überall und ewig). Mittler zwischen Beobachtungen und Ideen ist die Mathematik. Beispiel: Das Rad.
- um 1500: Descartes, Kopernikus
  Siegeszug der Mechanik. Determinismus.
  Beobachtungen (Experimente) sind die Grundlage des Wissens.
- Das Induktionsproblem (Humesches Problem)
  laut Wikipedia (David Hume 1740):

  Ist ein Schluss durch Induktion von Einzelfällen auf ein allgemeingültiges Gesetz zulässig?

Beobachtung (Daten) führen zu Wissen?

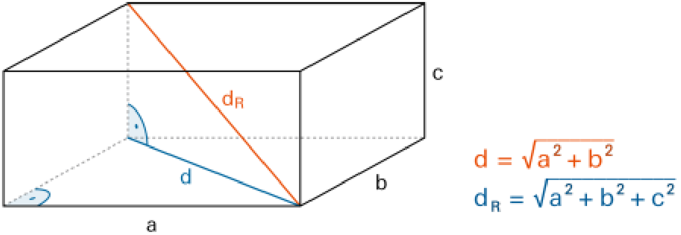
- Noch heute wird gefragt: Wie ist Induktion mögich?
- Karl Popper: Experimente dienen der Falsifizierung
- Energieerhaltungssatz (Wikipedia)
  Der Energieerhaltungssatz ... drückt die Erfahrungstatsache aus, dass die Energie eine Erhaltungsgröße ist, dass also die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems sich nicht mit der Zeit ändert.
- Naturgesetz (Wikipedia)
  In der Physik nennt man einen Lehrsatz auch ein Naturgesetz oder Physikalisches Gesetz. Im Unterschied zur Mathematik spielt hier der Bezug zur Wirklichkeit eine entscheidende Rolle. Der Lehrsatz muss durch Experimente als adäquat nachgewiesen werden.
- Schlagworte der heutigen Wissenschaft
  Studien, data mining, Statistik, Künstliche Intelligenz
  Sammeln von Daten in der Hoffnung schlauer zu werden.
- Keiner fragt nach den Gründen (dem Wesen, der Idee) dahinter.

Was kennzeichnet die Mathematik?

- Mathematik ist das Finden und Beweisen von Sätzen/Theoremen.
- Wikipedia (mathematische Methode):
  Ein Satz oder Theorem ist in der Mathematik eine widerspruchsfreie logische Aussage, die mittels eines Beweises als wahr erkannt, das heißt, aus Axiomen, Definitionen und bereits bekannten Sätzen hergeleitet werden kann.
- Beispiel: Euklidische Axiome $\Longrightarrow$ Satz des Pythagoras
- Ewige Wahrheit, außerhalb von Raum und Zeit:
  $a^2 + b^2 = c^2 + \varepsilon(x, t)$.
- Spielt sich nur im Kopf ab
- Es gibt keine Beobachtungen, auch keine überlieferten.
  Jeder kann – zumindest im Prinzip – alles selbst nachvollziehen.

Deduktion = Wissen aus dem Nichts?!

Der Satz des Pythagoras im Raum



Beweis: 2 Dimensionen $\Longrightarrow$ 3 Dimensionen

Satz des Pythagoras in der Ebene:

$$d^2 = a^2 + b^2,\ d_R^2 = d^2 + c^2 \quad \overset{\text{einsetzen}}{\Longrightarrow} \quad d_R^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Beweis: 3 Dimensionen $\Longrightarrow$ 2 Dimensionen: Setze $c = 0$.

2D und 3D sind äquivalent, obwohl 3D “mehr ist”.

Intuition in der Mathematik?

Aufgabe: Beeren trocknen
1 kg Beeren haben einen Wassergehalt von 99%.
Nach einer Weile trocknen ist der Wassergehalt auf 98% gesunken.
Wieviel wiegen die Beeren jetzt?

A) $1000\text{ kg} \cdot 98/99 = 989{,}899\text{ kg}$
B) $1000\text{ kg} \cdot 98/100 = 980{,}000\text{ kg}$
C) $1000\text{ kg} \;/\; \big((100+2)/100 \big) = 980{,}392\text{ kg}$
D) nichts dergleichen

Ergebnis: **500 g**

Beweis: Beeren bestehen aus Wasser und “Feststoff”.
Vor dem Trocknen 1% = 10 g Feststoff.
Nach dem Trocknen sollen die 10 g Feststoff 2% sein.
Das ergibt 500 g.

Aristoteles und Galilei

- Das Fallgesetz sinngemäß:
  Im Vakuum fallen alle Körper gleichschnell.
  ... unabhängig von Material, Masse und Form des Körpers.
- Aristoteles:
  Ein doppelt so schwerer Körper fällt doppelt so schnell.
- Galileo Galilei: Das ist falsch. Alle Körper fallen gleichschnell.
  Beweis nicht experimentell! Sondern als Gedankenexperiment.
- Galileo Galilei:
  Discorsi e dimostrazioni matematiche, Leiden 1638
  "Unterredung und mathematische Demonstration über zwei neue Wissenszweige die Mechanik und die Fallgesetze betreffend"

Galileis Beweis

- Es sei $v(A)$ die Geschwindigkeit (z.B. beim Auftreffen aus gegebener Höhe) eines Körpers mit der Masse A.
- Annahme: Es sei $v(A) < v(B)$, falls $A < B$.
- Wir verbinden die Körper mit einem idealen Strick.
- Die Geschwindigkeiten mitteln sich, Massen addieren sich:
  $v(A) < v(A+B) < v(B)$
  Die Geschwindigkeit der verbundenen Körper liegt dazwischen.
- Aber der verbundenen Körper $A+B$ ist schwerer als B.
  Es sollte $v(A+B) > v(B)$ sein.
- Widerspruch! Deshalb: Annahme $v(A) < v(B)$ ist falsch.
- Also: $v(A) = v(B)$.

Indirekte Annahmen. Galileis Vorurteile

- Galilei interessiert das Fallverhalten.
- Aristoteles:
  Ein doppelt so schwerer Körper fällt doppelt so schnell.
- Wie ist der Zusammenhang von Geschwindigkeit und Masse?
- Gedankenexperiment führt auf Widerspruch zu Aristoteles.
  Das ist tatsächlich ein logisch einwandfreier Beweis!
- Benutzt: Massen addieren sich. Geschwindigkeiten mitteln sich.
- Was wird nicht benutzt: Vakuum, Bewegungsgesetze, ...
- Der selbe Gedankengang beweist vieles anderes.
- Siehe Artikel: Holger Stephan (2021).
  Galileis Fallgesetz und andere Naturgesetze.

Warum ist Galileis Gedankengang überzeugend,
obwohl das Ergebnis falsch ist?

... intuitiv?

- Zahlen sind Anzahlen von Elementen von Mengen
  Addition entspricht Vereinigung von Mengen.
  Es gilt das Kommutativitätsgesetz
  $\Longrightarrow$ Zahlen verhalten sich (sind!) Kardinalzahlen (KZ)
  (Kardinalzahlen sind Anzahlen von Elementen von gleichmächtigen Mengen.)
- Was bedeutet Zählen?
  Zeitlicher Prozeß (Zählen) ergibt Ergebnis im Raum (Zahl)
- Ordinalzahlen = Kardinalzahlen (Identifizierung)

... historisch?

- Werden seit Ewigkeiten benutzt.
- Griechen: Es gibt Größen, Verhältnisse und Zahlen.
- Kinder: Zählen, Rechnen noch vor Lesen.
- Seit dem späten Mittelalter komplexe Zahlen.
  Gerolamo Cardano, Lösungsformel für Gleichungen dritten Grades 1545 veröffentlicht.
- 1872 – 1887 Dedekindsche Schnitte.
  Axiomatisierung der reellen Zahlen.
- 1889 Peanoschen Axiome.
  Axiomatisierung der natürlichen Zahlen.

... mathematisch?

- Mit Kardinalzahlen lassen sich keine Operationen definieren.
- Der Weg in der Mathematik:
  - Definition der Ordinalzahlen
  - Definition von speziellen Mengen
  - Definition der Kardinalzahlen als Elementeanzahl dieser Mengen.
  - Ordinalzahlen = Kardinalzahlen, sind abstrakte Zahlen (AZ)
  - Definition von Addition und Multiplikation mit Rechenregeln
  - Das alles betrifft nur die natürlichen Zahlen
    Alle weiteren Zahlen (negative, gebrochene, reelle, komplexe) werden als Erweiterungen definiert, zum Teil unintuitiv.
- Wir haben KZ, OZ und AZ
- Reelle Zahlen gibt es zu viele.
  Kontinuum besteht nicht aus Punkten.
- Wie passen die Zahlen zu physikalischen Größen?
  Warum passen diese abstrakten Objekte zur physischen Realität? **... und passen sie überhaupt?**

Was für Größen interessieren uns eigentlich?

- Thermodynamik: Volumen, Temperatur
- Chemie/Alltag: Alkoholgehalt, Alkoholmenge, Gesamtvolumen
- Mechanik: Weg, Geschwindigkeit, Zeitintervall, Impuls, Masse, Kraft, Arbeit, Energie
- E-Technik: Spannung, Strom, Widerstand, Ladung, Kapazität, Induktivität
- Ökonomie: Umsatz, Preis, Stückzahl, Mitarbeiteranzahl, Produktivität

- Was interessiert uns nicht? Beispiele:
  - Wurzel aus der Länge eines Objektes
  - Das Produkt aus Weg und Zeit

Zwei Sorten von physikalischen Größen

- Was passiert bei Kontakt?
  - Größen addieren, erhalten sich $\Longrightarrow$ extensiv
  - Größen mitteln sich, gleichen sich aus $\Longrightarrow$ intensiv
- Beispiele für intensive Größen:
  Temperatur, Alkoholgehalt, Geschwind., Kraft, Druck, Preise
  $\Longrightarrow$ Kann man direkt wahrnehmen und vergleichen!
- Beispiele für extensive Größen:
  Zeitintervall, Länge (Breite, Höhe), Fläche, Volumen, Masse, Ladung, Impuls, Energie, Stückzahl, Geld
- Was machte Galilei?
  - Massen addieren sich
  - Geschwindigkeit mittelt sich

Zwei Kopfrechenaufgaben

- Wie wirkt sich die Unterscheidung in extensive und intensive Größen auf die entsprechenden Zahlen aus?
- Können wir mit realen Größen wie mit Zahlen rechnen?
- Zwei Kopfrechenaufgaben
  1) Aufgabe: Wieviel ist 25% von 24 ?
  2) Aufgabe: Wieviel ist 24% von 25 ?
- Die Multiplikation ist kommutativ, aber gefühlt asymmetrisch:

$$25\% \text{ von } 24 = \frac{25}{100} \cdot 24 = \frac{25 \cdot 24}{100} = \frac{24 \cdot 25}{100} = \frac{24}{100} \cdot 25 = 24\% \text{ von } 25$$

- Warum fühlen sich – zahlenmäßig – verschiedene reale Größen verschieden an?
- Wie kommt man von Größen zu Zahlen?

Wo steckt der Fehler?

$$
\begin{aligned}
15 &= 15 \\
15 \text{ Euro} &= 15 \text{ Euro} \\
3 \cdot 5 \text{ Euro} &= 5 \cdot 3 \text{ Euro} \\
3 \text{ Kilogramm} \cdot 5 \ \frac{\text{Euro}}{\text{Kilogramm}} &= 5 \text{ Kilogramm} \cdot 3 \ \frac{\text{Euro}}{\text{Kilogramm}}
\end{aligned}
$$

3 kg “teures” Mehl = 5 kg “billiges” Mehl

Es gilt kein Kommutativgesetz der Multiplikation!
(Falls man Zahlen anwenden möchte.)

Wie bekommen extensive Größen ihre Zahlenwerte?

- Sollte mit den Rechenoperationen zusammenpassen.
- Wie addieren sich EG? Wie KZ (Mengenvereinigung).
  EG erhalten ihre Zahlenwerte durch Zählen
  Messen ist Zählen von Einheiten.
- Addition, Subtraktion problemlos.
- EGs dürfen nur ganz selten multipliziert werden.
  (z.B. Länge mal Länge = Flächeninhalt.)
- Kinder lernen multiplizieren OZ mal KZ:
  $3 \cdot 5 =$ 1. Mal 5 + 2. Mal 5 + 3. Mal 5.
  Kein Kommutativgesetz!
- Später: Kinder lernen die Multiplikationstabelle.
- Was ist $3/7$ mal 5? Was ist (-3) mal (-5)?

Addition von Kardinalzahlen

- Papa hat ein Auto mit 7 Sitzen, Opa eins mit 5 Sitzen. Wieviel Menschen können gemeinsam wegfahren.
  $5 + 7 = 12$ ist eine sinnvolle Aufgabe.
- Wir hatten früher ein Auto mit 5 Sitzen. Das haben wir verschrottet und uns ein neues mit 7 Sitzen gekauft.
  $5 + 7$ ist keine sinnvolle Aufgabe. Warum?

$\Longrightarrow$ Kardinalzahlen zu verschiedenen Zeitpunkten darf man nicht addieren?

- Auf einem Bauernhof haben die Hühner gestern 12 Eier und heute 15 Eier gelegt.
  $12 + 15$ ist eine sinnvolle Aufgabe, obwohl es Kardinalzahlen zu verschiedenen Zeitpunkten sind.

$\Longrightarrow$ Vorsicht beim Addieren von Kardinalzahlen, die in einem Kausalverhältnis stehen.

Wie bekommen intensive Größen ihre Zahlenwerte?

- IG kann man nicht direkt (d.h. durch Zählen) messen!
- Jeder int. Größen kann man zwei ext. Größen zuordnen:
  - Geschwindigkeit: Weg und Zeit $L = v \cdot T \Longrightarrow v = L/T$
  - Prozente: Anteil und Gesamtmenge $A = \% \cdot M \Longrightarrow \% = A/M$
  - Preis: Umsatz und Stückzahl $U = p \cdot S \Longrightarrow p = U/S$
- Intensive Größen kann man berechnen
  Intensive Größen sind Verhältnisse extensiver Größen. IG = $\mathrm{EG}_1/\mathrm{EG}_2$
- Ist eindeutig bis auf Verschiebung und Skalierung.

Addition intensiver Größen

- Was heißt addieren? Zusammenlegen!
- Wir haben zwei chemische Lösungen: 66.6% und 50.0%. Wieviel prozentig ist das Gemisch?

$$66.6\% \ \triangleq \ \frac{2L_{C_2H_5OH}}{3L_{H_2O}}, \quad 50.0\% \ \triangleq \ \frac{1L_{C_2H_5OH}}{2L_{H_2O}} \quad \Longrightarrow \quad \text{Gemisch}$$

$$\frac{2L_{C_2H_5OH}}{3L_{H_2O}} \oplus \frac{1L_{C_2H_5OH}}{2L_{H_2O}} = \frac{2L_{C_2H_5OH} + 1L_{C_2H_5OH}}{3L_{H_2O} + 2L_{H_2O}} = \frac{3L_{C_2H_5OH}}{5L_{H_2O}} \triangleq 60\%$$

- Intensive Größen sind Brüche und werden so addiert:

$$x \oplus y = \frac{A}{B} \oplus \frac{C}{D} = \frac{A+C}{B+D} = z$$

Intensive Größen sind (gebrochene) Ordinalzahlen

- Wie nummeriert man beliebig viele Objekte
  ohne die Nummern zu ändern?
- Wir starten mit 0, 1
- Dann kommt 1/2,
- Dann kommen 1/4, 3/4, 3/8, ...
- Nachteile:
  - Nachteil 1: Die Nenner werden groß (Zweierpotenzen 2^k)
  - Nachteil 2: Es werden nicht alle Brüche gebraucht
- Besser ist:
  - Wir starten mit $\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$
  - Dann kommt $\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$
  - Dann kommen $\frac{0}{1} \oplus \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{1} = \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \oplus \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$
- Alle Brüche kommen vor!
  Eigenschaft der Ordinalzahlen ist Lückenlosigkeit.

Das Problem ist die Multiplikation

- Was multiplizieren wir?
- Länge mal Länge = Flächeninhalt (selten).
- IG mal EG (meistens):
  - Umsatz = Preis mal Stückzahl
  - Weg = Geschwindigkeit mal Zeit
  - Anteil = Prozente mal Gesamtmenge

Probleme in der höheren Mathematik

- Punkte sind keine Vektoren
- Hilbertraum (ist der Standardraum) ist nicht Banachraum (wird selten verwendet)
- Skalarprodukt (kommutatives Produkt im Hilbertraum) ist nicht duale Paarung (nichtkommutatives Produkt zwischen einem Banachraum und seinem dualen)
- Riemannintegral ist nicht gleich Lebesgueintergral
- Ableitung (im differentialgeometrischen Sinn) ist nicht gleich Ableitung (im Radon-Nikodym Sinn)
- Eine Gleichung beschreibt die Änderung von etwas: Zeitliche Änderung einer EG = räumliche Änderung einer IG.

- Wir interessieren uns nicht für alles, sondern nur für extensive (additive, messbare) und intensive (mittelnde, beobachtbare, berechenbar) Größen.
- Um mathematische Aussagen anwenden zu können, muß die Identifizierung von KZ und OZ aufgehoben werden.
  IG = OZ, EG = KZ
- Mathematische Sätze, die man unter bestimmten Bedingungen anwenden kann, heißen Naturgesetze. Sie gelten ewig.
- Die materielle Welt verändert sich – soweit sie nicht dem menschlichen Willen unterworfen ist – weil sich intensive Größen ausgleichen wollen.
  Gleichgewicht bedeutet konstante intensive Größen.