

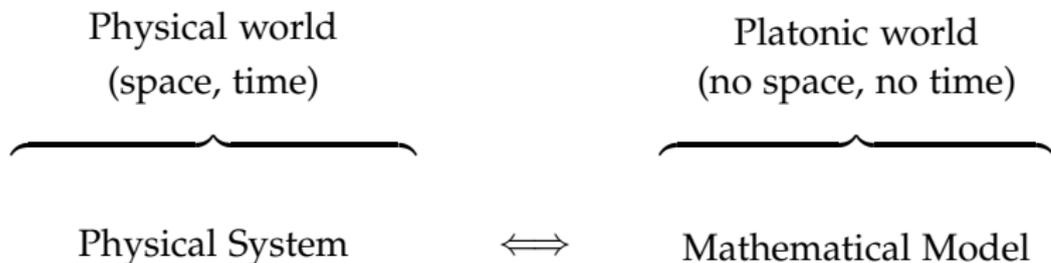
# *Die Rolle der Zeit in der Mathematik*

HOLGER STEPHAN

Weierstraß Institut für Angewandte  
Analysis und Stochastik (WIAS), Berlin

Tag der Mathematik  
10. Mai  $1^3 + 2^3 + \dots + 9^3$ , BHT Berlin

## Zwei Welten



*Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.*

(Albert Einstein)

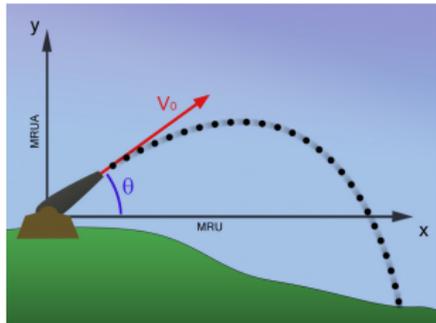
## *Newton über die Zeit*

*Die absolute, wahre und mathematische Zeit verfließt an sich und vermöge ihrer Natur gleichförmig und ohne Beziehung auf irgendeinen äußeren Gegenstand.* (Isaac Newton)

- ▶ Zeit läuft vorwärts. Es gibt Vergangenheit, Gegenwart, Zukunft.
- ▶ Christliches lineares Zeitverständnis:  
Erschaffung der Welt = Urknall,  
Jüngstes Gericht = Wärmetod (2. Hauptsatz der Thermodyn.)
- ▶ Unintuitiv: Wir fühlen keinen Jetztpunkt. (Zenons Paradoxa)
- ▶ Bei den antiken Griechen vier Zeitbegriffe
  - ▶ **Chronos** (vorwärtslaufende, Newtonsche Zeit)
  - ▶ **Kairos** (die dem Menschen entgegenkommende, rückwärtslaufende Zeit)
  - ▶ **Zyclos** (zyklische, wiederkehrende Prozesse)
  - ▶ **Äon** (Ewigkeit, Zeitlosigkeit, der tatsächliche Zustand der Welt)

## Newton bei der Arbeit

Beschreibung der Bewegung eines Körpers (Wurfparabel).



- ▶ Was wird beschrieben?  
Wo ist die Bewegung geblieben?
- ▶ Zeitliches Beschreibung:  
Jetztzeitpunkt bestimmt Zukunft.
- ▶ Räumliche Beschreibung:  
Alle Punkte existieren immer.

- ▶ Geschwindigkeit ist Tangente (Differentialgeometrie)
- ▶  $f = m \cdot a$  (Newton:  $\frac{d}{dt}P = f$ ) Kausalität geht verloren.
- ▶ Apfel: Knospe  $\rightarrow$  Blüte  $\rightarrow$  Frucht

Der Newtonsche (und auch Kantsche) Raum ist das Gefäß,  
indem sich die Dinge befinden.

## *Kardinal- und Ordinalzahlen*

Gibt es mathematische Objekte mit Raum- und Zeitaspekten?

- ▶ Kardinalzahlen
  - ▶ Anzahl von Objekten
  - ▶ Definition durch Äquivalenzrelation
  - ▶ Kann man (im Raum) addieren
  - ▶ Menge (KardinalZ) lebt im Raum.
- ▶ Ordinalzahlen
  - ▶ Nummern von Objekten
  - ▶ Definition durch Ordnungsrelation (Peanosche Axiome)
  - ▶ Kann man nicht addieren
  - ▶ Kann man subtrahieren, Differenz ist eine Kardinalzahl
  - ▶ Zahlenreihe (OrdinalZ) lebt in der Zeit.
- ▶ Mathematik: Identifizierung  $\implies$  Rechenregeln
- ▶ Brauchen wir die Unterteilung in KZ und OZ?

## *Was ist Zählen?*

Wie bestimmt man die Anzahl der Objekte in einer Menge?

Wir zählen in der Zeit an einem räumlichen Punkt und erhalten etwas Räumliches zu einem Zeitpunkt.

*... Aber Zählen ist keine Zahl, so wenig als Zeichnen eine Zeichnung ist.  
Zählen und Zeichnen sind ein Werden, Zahlen und Figuren sind  
Gewordenes.*

(Oswald Spengler

*Der Untergang des Abendlandes 1918 – 1922)*

## *Ergodisches Verhalten*

- ▶ Wir erhalten eine Aussage über den Raum durch Betrachtung in der Zeit.
- ▶ Wolken am Himmel
- ▶ Bäume im Wald
- ▶ Apfel: Knospe → Blüte → Frucht
- ▶ Aber: Kausalität (Begründung) geht im Raum verloren.

## *Zahlenverständnis bei (kleinen) Kindern*

- ▶ Können früh zählen (haben die Ordinalzahlen gelernt)
- ▶ Können aber nicht abzählen. (KardinalZ  $\neq$  OrdinalZ)
- ▶ Benutzen das Abzählen aus eigenem Antrieb sehr spät.
- ▶ Können "vorwärts" nicht bis 1 zählen (wie die Griechen).
- ▶ Kennen keine 0, keine leere Menge.
- ▶ Verstehen keine Erhaltungssätze (Zerlegung in Summe)
- ▶ Verstehen das Kommutativgesetz der Addition (Mengen im Raum)
- ▶ Verstehen im allgemeinen nicht das Kommutativgesetz der Multiplikation (nur im Raum, nicht in der Zeit).  
... wie übrigens auch Erwachsene nicht.

## *Extensive und intensive Größen*

- ▶ Einige Beispiele:
  - ▶ Chemie/Alltag: Alkoholmenge, Alkoholgehalt, Gesamtvolumen
  - ▶ Mechanik: Weg, Geschwindigkeit, Zeitintervall
  - ▶ Ökonomie: Umsatz, Preis (z.B. Aktie), Stückzahl

## Extensive und Intensive Größen

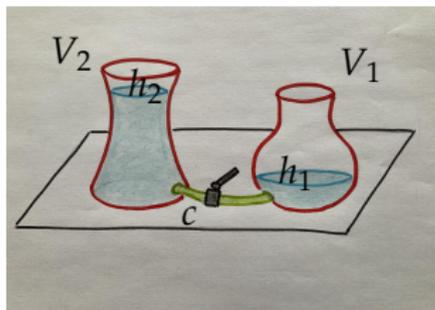
- ▶ Einige Beispiele:
  - ▶ Chemie/Alltag: **Alkoholmenge**, **Alkoholgehalt**, **Gesamtvolumen**
  - ▶ Mechanik: **Weg**, **Geschwindigkeit**, **Zeitintervall**
  - ▶ Ökonomie: **Umsatz**, **Preis** (z.B. Aktie), **Stückzahl**
- ▶ Verhalten sich bei Kontakt mehrerer Körper ist verschieden
- ▶ **Extensive Größen (EG)** addieren (vergrößern) sich.
- ▶ **Intensive Größen (IG)** mitteln sich, gleichen sich aus.
- ▶ Es gibt nur EGs und IGs! Alle anderen sind abgeleitet.
- ▶ Extensive und Intensive Größen (siehe **Vortrag zum TdM 2016**)
- ▶ Galileis Fallgesetz (siehe **“stephan wias galilei”**)

## *Extensive und Intensive Größen und ihre Zahlenwerte*

- ▶ Extensive Größen  $B, C$ 
  - ▶ kann man addieren (addieren sich)
  - ▶ kann man messen (endliche Dezimalbrüche)  
⇒ sind Kardinalzahlen
  - ▶ beschreiben einen Raumaspekt am Zeitpunkt
- ▶ Intensive Größen  $a$ 
  - ▶ kann man (fast) nicht addieren, mitteln sich
  - ▶ kann man berechnen als Quotient  $C = a \cdot B, a = C/B$   
zweier extensiver Größen (gemeine Brüche)  
⇒ sind Ordinalzahlen
  - ▶ beschreiben einen Zeitaspekt am Raumpunkt

Siehe: *Endliche Kardinal- und Ordinalzahlen*. **Vortrag zum TdM 2018**

## Herleitung einer Bilanzgleichung



Es sei  $0 < t_1 < t < t_2$ .

Was ändert sich?

Volumen, kann man addieren

$V$  nachher =  $V$  vorher + was geflossen ist.

Warum fließt etwas?

Höhen möchten sich ausgleichen.

$$V_1(t_2) = V_1(t_1) + c(t_2 - t_1)(h_2(t) - h_1(t))$$

$$V_2(t_2) = V_2(t_1) - c(t_2 - t_1)(h_2(t) - h_1(t))$$

## Herleitung einer Bilanzgleichung (Fortsetzung)

$$V_1(t_2) = V_1(t_1) + c(t_2 - t_1)(h_2(t) - h_1(t))$$

$$V_2(t_2) = V_2(t_1) - c(t_2 - t_1)(h_2(t) - h_1(t))$$

$$\frac{V_1(t_2) - V_1(t_1)}{t_2 - t_1} = +c(h_2(t) - h_1(t))$$

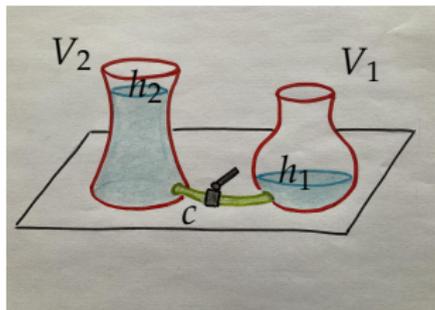
$$\frac{V_2(t_2) - V_2(t_1)}{t_2 - t_1} = -c(h_2(t) - h_1(t))$$

Grenzwert  $t_2 - t_1 \rightarrow 0$  ergibt Zeitableitung

$$V_1'(t) = +c(h_2(t) - h_1(t))$$

$$V_2'(t) = -c(h_2(t) - h_1(t))$$

## Herleitung einer Bilanzgleichung (Fortsetzung 2)



$$V_1'(t) = +c(h_2(t) - h_1(t))$$

$$V_2'(t) = -c(h_2(t) - h_1(t))$$

System ist unvollständig!

$$V(h) = \int_0^h S(h') dh', \quad S \text{ ist Schnittfläche (Cavalieri-Prinzip)}$$

$$V'(t) = \frac{d}{dt} V(h(t)) = \frac{d}{dt} \int_0^{h(t)} S(h') dh' = S(h(t)) h'(t)$$

$$h_1'(t) = + \frac{c}{S_1(h_1(t))} (h_2(t) - h_1(t))$$

$$h_2'(t) = - \frac{c}{S_2(h_2(t))} (h_2(t) - h_1(t))$$

## *Ethische und Goldene Regel der Modellierung*

Goldene Regel der Modellierung:

**Die Ursache der zeitlichen Änderung einer extensiven Größe ist der räumliche Unterschied einer intensiven Größe.**

oder

**Eine räumliche Größe ändert sich in der Zeit weil eine zeitliche Größe im Raum unterschiedlich ist.**

⇒ Modellieren ist zählen.

Ethische Regel der Modellierung:

**Nicht alles was man darf, sollte man auch tun.**

## Wie geht es weiter?

- ▶ Produkt extensiver und intensiver Größen (KZ mal OZ)  
 Extensiv = extensiv mal intensiv + extensiv mal intensiv + ...
  - ▶ Gesamtweg = Geschwindigkeit mal Zeit  
 420 km = 120 km/h · 2 Stunden + 60 km/h · 3 Stunden
  - ▶ Umsatz = Preis mal Stückzahl  
 110 € = 10 Stück zu 5 €/Stück + 20 Stück zu 3 €/Stück

allgemein

$$C = a_1 \cdot B_1 + a_2 \cdot B_2 + \dots + a_n \cdot B_n$$

ist duales Produkt (Lebesgueintegral)  
 zwischen zueinander dualen Banachräumen.

- ▶ Operatoren realisieren Zustandsänderungen in der Zeit:
  - ▶ Für extensive Größen läuft die Zeit vorwärts (Chronos)
  - ▶ Für intensive Größen läuft die Zeit rückwärts (Kairos)