Zahlentheorie, Geometrie und Physik

Holger Stephan

Weierstraß Institut für Angewandte
Analysis und Stochastik (WIAS), Berlin

27. Tag der Mathematik
4. Mai 2024, TU Berlin

Worum geht es?

- Zahlentheorie: Das Rechnen mit ganzen oder rationalen Zahlen.
- Geometrie: Hier: euklidische (keine analytische) Geometrie
- Physik: In der Geometrie finden wir die physikalischen Gesetze
  Gerade = gleichförmige Bewegung
  Kreis = Rotation
  Flächeninhalt = Abstand mal Geschwindigkeit
  = Radius mal Umfang

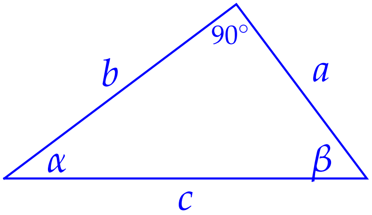
Zahlentheorie

- Am wenigsten nützlich?
- Gauß: Königin der Mathematik
- Typische Aufgabe: Diophantische Gleichungen.
  Beschränkung auf (ganze oder) rationale Zahlen.
- Probleme mit reellen Zahlen:
  - Überabzählbarkeit: $x = y$ im allgemeinen nicht berechenbar!
  - Numerik: $0 = 10^{-16}$?
- Vorteile von rationalen Zahlen:
  - Lineare Gleichungssysteme sind lösbar
  - Lösungen enthalten mehr Information (weniger ist mehr!)
  - Nachteil: Nullstellen von Polynomen (Wurzelziehen) geht nicht!?

Der Satz des Pythagoras

In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Zahlentheorie sucht nach ganzzahligen Lösungen der Gleichung.

Verallgemeinerungen des Satzes des Pythagoras:

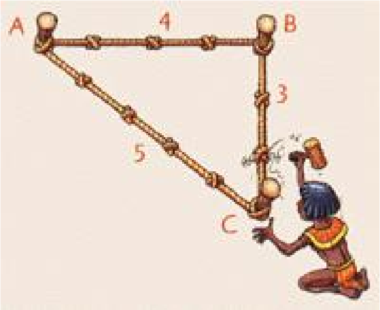
$$d^2 = a_1^2 + \ldots + a_n^2 \qquad \text{Diagonale im Quader}$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a_1^2} + \ldots + \frac{1}{a_n^2} \qquad \text{Höhe im rechtwinkligen Simplex}$$

$$A^2 = A_1^2 + \ldots + A_n^2 \qquad \text{Flächen des rechtwinkligen Simplex}$$

Der Satz des Pythagoras in der Anwendung

Ägyptischer Ingenieur (Harpedonapt, Seilspanner) bei der Arbeit



Heute: Handwerker legen einen rechten Winkel
mit drei Zollstöcken: 2.00m, 1.60m, 1.20 m

Parametrischen Lösung der diophantischen Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$

Alle Lösungen (a, b, c) ergeben sich aus zwei Parametern u und v als

im Reellen	im Natürlichen
$a = a$	$a = u^2 - v^2$
$b = b$	$b = 2uv$
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$c = u^2 + v^2$

Probe: $a^2 + b^2 \stackrel{?}{=} c^2$

$$\begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & c^2 \\ (u^2 - v^2)^2 & + & (2uv)^2 & = & (u^2 + v^2)^2 \\ (u^4 - 2u^2v^2 + v^4) & + & (4u^2v^2) & = & (u^4 + 2u^2v^2 + v^4) \end{array}$$

Na und?

Bedeutung einer parametrischen Lösung

$$\begin{array}{ccccc} a^2 & + & b^2 & = & c^2 \\ (u^2-v^2)^2 & + & (2uv)^2 & = & (u^2+v^2)^2 \end{array}$$

- Ein quadratischer Ausdruck zweier Parameter u und v ergibt eine Länge $\Longrightarrow$ u und v haben eine physikalische Einheit: Wurzel aus einer Länge: $[\sqrt{cm}]$
- Eine verborgene Struktur:
  Wenn man aus zwei Größen u und v mit der Einheit $[\sqrt{cm}]$ mit Hilfe quadratischer Ausdrücke drei Längen bildet,
  $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ und $c = u^2 + v^2$,
  dann kann man daraus ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren.
- Jeder quadratische Ausdruck aus u und v ist eine Länge!!!
- Parameter müssen nicht ganzzahlig sein!!!

Weitere ganzzahlige Größen

Jeder quadratische Ausdruck von u und v ist eine Länge.

"Einfache quadratische Ausdrücke sind leicht zu findende Längen."

$$
\begin{array}{lcll}
a & = & 2uv & \text{1. Kathete} \\
b & = & u^2 - v^2 = (u+v)(u-v) & \text{2. Kathete} \\
c & = & u^2 + v^2 & \text{Hypotenuse} \\
R & = & \frac{1}{2}(u^2 + v^2) & \text{Umkreisradius (Satz d. Thales)} \\
p & = & \frac{1}{2}(a+b+c) = u(u+v) & \text{Halber Umfang} \\
r & = & \frac{1}{2}(b+c-a)\tan\frac{\alpha}{2} = v(u-v) & \text{Inkreisradius} \\
S & = & \frac{1}{2}ab = uv(u+v)(u-v) & \text{Flächeninhalt in } [cm^2] \\
  & = & pr &
\end{array}
$$

Geometrie des rechtwinkligen Dreiecks

Das rechtwinklige Dreieck $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ Satz des Pythagoras
$\Longrightarrow$ diophantische Gleichung
$\Longrightarrow$ parametrische Lösung
$\Longrightarrow$ innere Struktur im rechtwinkligen Dreieck
$\Longrightarrow$ weitere Eigenschaften, Zusammenhänge

Wie geht es weiter?

Heronische Dreiecke

- Allgemeines Dreieck mit drei ganzzahligen Seiten?
- Berechnung des Flächeninhaltes mit Heronischer Formel:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

(Heron von Alexandria, vermutlich 1.Jh.n.Chr.)

- Ergibt diophantische Gleichung

$$\begin{aligned} 16S^2 &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = \\ &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 \end{aligned}$$

Parametrische Lösung von Brahmagupta (598 – 668 n.Chr.)

$$\begin{aligned} a &= n(m^2+k^2) \\ b &= m(n^2+k^2) \\ c &= (m+n)(mn-k^2) \\ \Longrightarrow \quad S &= mnk(m+n)(mn-k^2) \end{aligned}$$

Unschön?!

Gebrochene *oder* **ganze** *Zahlen?*

- Die Griechen kannten zwei Sorten von Zahlen:
  Größen und **Verhältnisse**.
- Streckenlängen (natürliche Zahlen mit Einheit)
  kann man nur addieren.
  Multiplikation von Längen ergibt eine neue Einheit (Fläche).
  Physikalisch: **Extensive Größen**
- Streckenverhältnisse (rationale Zahlen) haben keine Einheit.
  Man kann sie multiplizieren (manchmal auch addieren).
  Physikalisch: **Intensive Größen**
- **Kardinalzahlen** und **Ordnungszahlen**

Größen	und	**Verhältnisse**	
Extensive	und	**Intensive**	Größen

Winkelfunktionen ...

... sind Streckenverhältnisse und sind rational, wenn die Seitenlängen natürliche Zahlen sind.

- Definition von Sinus und Cosinus

$$\text{Winkel:}\quad \begin{aligned} \frac{AK}{H} &= \cos\alpha = \frac{b}{c} \\ \frac{GK}{H} &= \sin\alpha = \frac{a}{c} \end{aligned}$$

- Trigonometrischer Satz des Pythagoras:

$$a^2 + b^2 = c^2 \iff \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1 \iff \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

- Mathematisch äquivalente Aufgabe:
  Finde Winkel α derart, daß $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ rational sind.

Ganze Winkel $\Longleftrightarrow$ *Halbe Winkel*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \iff \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = (1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$$
$$\iff \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \tan\frac{\alpha}{2}$$

In unserem Fall:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{2uv}{u^2+v^2}, \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2} \implies \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{u}$$

Umkehrung gilt auch:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \implies \sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}, \quad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

Erkenntnis: Dreieck ist pythagoräisch $\iff \tan\frac{\alpha}{2}$ ist rational.

Gute Idee (merken!): Tangens des halben Winkel ist rational.

Die Gaußsche Idee

Carl Friedrich Gauß (1777–1855):
Winkelfunktionen rational $\Longrightarrow$ Strecken ganzzahlig
Tangens vom halben Winkel rational $\Longrightarrow$ Winkelfunktionen rational

Sinussatz: $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \qquad (2\times\text{Umkreisradius})$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R}\,, \quad \sin\beta = \frac{b}{2R}\,, \quad \sin\gamma = \frac{c}{2R}$$

Ansatz: $$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{u}, \quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{s}{t},$$

Ist auch $\tan\frac{\gamma}{2}$ rational? (Es gilt stets: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$)

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \tan\frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} = \ldots = \frac{su - tv}{tu + sv}$$

Wann sind die Seiten ganzzahlig?

Wenn der Tangens von allen halben Winkeln rational ist, dann sind auch die Sinuswerte der Winkel rational.

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{u},\quad \tan\frac{\beta}{2} = \frac{s}{t},\quad \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{su-tv}{tu+sv}$$

$$\sin\alpha = \frac{2uv}{u^2+v^2},\quad \sin\beta = \frac{2st}{s^2+t^2},\quad \sin\gamma = \frac{2(tu+sv)(su-tv)}{(s^2+t^2)(u^2+v^2)}$$

$$\text{Sinussatz:}\qquad \sin\alpha = \frac{a}{2R}\ ,\quad \sin\beta = \frac{b}{2R}\ ,\quad \sin\gamma = \frac{c}{2R}$$

$\Longrightarrow$ Die Seiten sind ganzzahlig wenn Umkreisradius = Hauptnenner

$$4R = (s^2+t^2)(u^2+v^2)$$

Die Gaußsche parametrische Lösung

$$a = 2R \sin\alpha, \quad b = 2R\sin\beta, \quad c = 2R\sin\gamma, \quad 4R = (s^2+t^2)(u^2+v^2)$$

$$\sin\alpha = \frac{2uv}{u^2+v^2}, \; \sin\beta = \frac{2st}{s^2+t^2}, \; \sin\gamma = \frac{2(tu+sv)(su-tv)}{(s^2+t^2)(u^2+v^2)}$$

$$\begin{aligned} a &= uv(s^2+t^2) \\ b &= st(u^2+v^2) \\ c &= (tu+sv)(su-tv) \end{aligned}$$

Ist auch der Flächeninhalt ganzzahlig?

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

Heronische Formel

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} = \\ &= p \cdot p_A \cdot p_B \cdot p_C \end{aligned}$$

$$a = uv(s^2+t^2),\ b = st(u^2+v^2),\ c = (tu+sv)(su-tv)$$

$$\begin{aligned} p &= su(tu+sv) \\ p_A &= tu(su-tv) \\ p_B &= sv(su-tv) \\ p_C &= tv(tu+sv) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{p \cdot p_A \cdot p_B \cdot p_C} = \\ &= \sqrt{(stuv)^2(tu+sv)^2(su-tv)^2} = stuv(tu+sv)(su-tv) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ Der Flächeninhalt ist ganzzahlig.

Interessante Größen im Dreieck ...

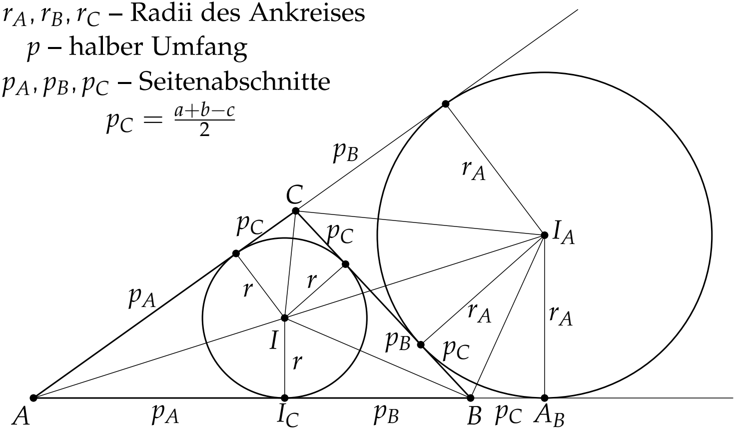
r – Radius des Inkreises

r_A, r_B, r_C – Radii des Ankreises

p – halber Umfang

p_A, p_B, p_C – Seitenabschnitte

$$p_C = \frac{a+b-c}{2}$$



... und ihre Längen

$$
\begin{aligned}
a &= uv(s^2+t^2) \\
b &= st(u^2+v^2) \\
c &= (tu+sv)(su-tv) \\
4R &= (s^2+t^2)(u^2+v^2) \\
S &= stuv(tu+sv)(su-tv) \\
p &= su(tu+sv) \\
p_A &= tu(su-tv) \\
p_B &= sv(su-tv) \\
p_C &= tv(tu+sv)
\end{aligned}
$$

- Parametrisierung mit vier Parametern u, v, s, t.
- Einheiten: $s, t = [A]$, $u, v = [B]$, Länge $= [A^2B^2]$
  Jede neu gefundene Länge muß die Einheit $[A^2B^2]$ haben.

Weitere Produkte für den Flächeninhalt

Flächeninhalt S setzt sich aus Produkten zusammen, z.B.

$$S = stuv(tu+sv)(su-tv) \quad = \quad \Big(su(tu+sv)\Big)\Big(tv(su-tv)\Big)\Big(tu(su-tv)\Big)\Big(sv$$

$$\boxed{S = pr = p_A r_A = p_B r_B = p_C r_C}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
p & = & su(tu+sv) & \Longrightarrow & r & = & tv(su-tv) \\
p_A & = & tu(su-tv) & \Longrightarrow & r_A & = & sv(tu+sv) \\
p_B & = & sv(su-tv) & \Longrightarrow & r_B & = & tu(tu+sv) \\
p_C & = & tv(tu+sv) & \Longrightarrow & r_C & = & su(su-tv)
\end{array}$$

Herleitung von Formeln

$$r_A + r_B + r_C - r = s^2u^2 + t^2v^2 + s^2v^2 + t^2u^2 = (s^2 + t^2)(u^2 + v^2) = 4R$$

$$\boxed{r_A + r_B + r_C = 4R + r}$$

Geometrisch schwer zu beweisen, aber jetzt sehr einfach:

Weitere Formeln (h sind die Höhen):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_C} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

Summe inverser extensiver Größen? Kennen wir doch irgendwoher?

Parallel geschaltete Widerstände: $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}$

Badewannenaufgabe: $\dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{T_1} + \dfrac{1}{T_2} + \dfrac{1}{T_3}$

Weitere Zusammenhänge

- Heronische Gleichung

$$\begin{aligned} 16S^2 &= (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = \\ &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 \end{aligned}$$

- Physikalische Aufgabe:

  Beschreibe die zyklische Durchmischung zwischen drei Töpfen.

  Wenn die Mischungsraten a^2, b^2 und c^2 sind, dann entstehen (gedämpfte) Oszillationen mit der Frequenz S (Imaginärteil der entsprechenden Eigenwerte).

Was stört die Ästhetik?

- Asymmetrie in den Winkeln:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{u}, \ \tan\frac{\beta}{2} = \frac{s}{t}, \ \tan\frac{\gamma}{2} = \frac{su - tv}{tu + sv}$$

- Asymmetrie in den Seiten:

$$\begin{aligned} a &= uv(s^2+t^2),\ b = st(u^2+v^2),\ c = (tu+sv)(su-tv) \\ S &= stuv(tu+sv)(su-tv) \end{aligned}$$

- Besser sieht folgende Parametrisierung von Winkel aus:

$$\tan\frac{\psi}{2} = \frac{v}{u}\ , \quad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{t}{s}\ , \quad \tan\frac{\varphi}{2} = \frac{y}{x}$$

... und der Flächeninhalt sei $S = stuvxy$

Wir suchen jetzt das geometrische Objekt und die dazugehörenden Gleichung zur gegebenen Parametrisierung.

Eine symmetrische Parametrisierung

- Parametrisierung der Winkel:

$$\tan\frac{\psi}{2}=\frac{v}{u}\,,\quad \tan\frac{\theta}{2}=\frac{t}{s}\,,\quad \tan\frac{\varphi}{2}=\frac{y}{x}$$

  Flächeninhalt: $S = stuvxy$
- Einheit von u, v sei $[A]$, von t, s sei $[B]$ von y, x sei $[C]$.
- Einheit des Flächeninhaltes: $[A^2B^2C^2]$
- Einheit einer Länge: $[ABC]$
- Es gibt 8 Möglichkeiten, aus u, v, t, s, y, x Längen zu bilden:

$$\begin{aligned} p_a &= tvy & \qquad r_a &= sux \\ p_b &= svx & r_b &= tuy \\ p_c &= tux & r_c &= svy \\ p_d &= suy & r_d &= tvx \end{aligned}$$

$$\boxed{S = p_a \cdot r_a = p_b \cdot r_b = p_c \cdot r_c = p_d \cdot r_d = \sqrt{p_a \cdot p_b \cdot p_c \cdot p_d}}$$

Heronische Formel im Sehnenviereck

Im Dreieck:

$$\begin{aligned} 16S^2 &= (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c) = \\ &= 2p_A \cdot 2p_B \cdot 2p_C \cdot 2p = \\ &= 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4 \end{aligned}$$

Im Sehnenviereck:

$$\begin{aligned} 16S^2 &= (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d) = \\ &= 2p_a \cdot 2p_b \cdot 2p_c \cdot 2p_d \\ &= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2d^2 + 2b^2d^2 + 2c^2d^2 + \\ &+ 8abcd - a^4 - b^4 - c^4 - d^4 \end{aligned}$$

Parametrische Lösung einer diophantischen Gleichung

$$p_a = tvy, \quad p_b = svx, \quad p_c = tux, \quad p_d = suy$$

$$\begin{aligned}
p_a &= \tfrac{1}{2}(-a+b+c+d)\\
p_b &= \tfrac{1}{2}(+a-b+c+d)\\
p_c &= \tfrac{1}{2}(+a+b-c+d)\\
p_d &= \tfrac{1}{2}(+a+b+c-d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a &= \tfrac{1}{2}(-p_a+p_b+p_c+p_d) = \tfrac{1}{2}(-tvy+svx+tux+suy)\\
b &= \tfrac{1}{2}(+p_a-p_b+p_c+p_d) = \tfrac{1}{2}(+tvy-svx+tux+suy)\\
c &= \tfrac{1}{2}(+p_a+p_b-p_c+p_d) = \tfrac{1}{2}(+tvy+svx-tux+suy)\\
d &= \tfrac{1}{2}(+p_a+p_b+p_c-p_d) = \tfrac{1}{2}(+tvy+svx+tux-suy)
\end{aligned}$$

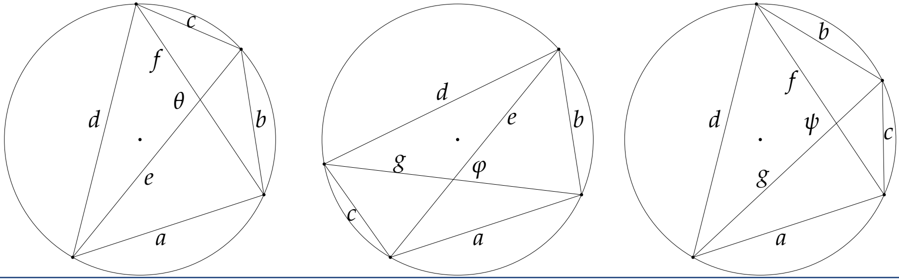
$$16S^2 = (-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$$

Probe klappt!

Was sind ψ, θ, φ für Winkel im Sehnenviereck?

$$\tan\frac{\psi}{2} = \frac{v}{u}\,, \quad \tan\frac{\theta}{2} = \frac{t}{s}\,, \quad \tan\frac{\varphi}{2} = \frac{y}{x}$$

Aus vier Strecken a, b, c, d kann man drei nichtkongruente Sehnenvierecke mit gleichem Flächeninhalt bilden. Jedes dieser drei Sehnenvierecke besitzt zwei von drei Diagonalen e, f, g, die sich unter einem der Winkel φ, θ, ψ schneiden.



Weitere ganzzahlige Längen?

- Sind auch die Diagonalen ganzzahlig?
  ... und der Umkreisradius?
- Satz des Ptolemäus in drei Sehnenvierecken:
  (Claudius Ptolemäus, der Astronom, etwa 100 – 160 n.Chr.)

$$\begin{aligned} ef &= ac + bd = uvxy(s^2 + t^2) \\ eg &= ad + bc = stuv(x^2 + y^2) \\ fg &= ab + cd = stxy(u^2 + v^2) \end{aligned}$$

$$e^2 = \frac{ef \cdot eg}{fg} = \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{ab + cd} = u^2v^2 \frac{(s^2 + t^2)(x^2 + y^2)}{(u^2 + v^2)}$$

$$4R = \frac{S}{efg} = \sqrt{(s^2 + t^2)(u^2 + v^2)(x^2 + y^2)}$$

- Satz: Diagonalen sind ganzzahlig genau dann,
  wenn es auch der Umkreisradius ist!

Zusammenfassung

- Euklidische Geometrie und physikalische Fragestellungen führen auf Gleichungen ...
- ... die man im Bereich der rationalen Zahlen betrachten kann.
- Ihre parametrische Lösung offenbart eine tieferliegende Struktur. Es ist genau die Struktur, die zum betreffenden Objekt gehört.
- Weitere, bisher unbekannte Erkenntnisse, können gewonnen werden.
- Man sieht, in welche Richtung eine Verallgemeinerung gehen sollte.

$\Longrightarrow$ Kenntnisse der euklidische Geometrie und der Bruchrechnung sind sinnvoll.