Rekursive Folgen im Pascalschen Dreieck

Holger Stephan, Tag der Mathematik, 1. Juni 2002

Zusammenfassung

Viele Probleme aus den unterschiedlichsten Teilgebieten der Mathematik (z.B. Analysis, Kombinatorik, Zahlen-, Spiel- und Chaostheorie) führen früher oder später auf das Pascalsche Dreieck. Jeder weiß, dass die horizontale Summe (die Summe einer Zeile) im Pascalschen Dreieck die Zweierpotenzen ergibt.

Schon wenigen ist bekannt, dass gewisse schiefe Summen die Fibonaccizahlen ergeben. Diese sind ebenfalls so ein zentrales Objekt der Mathematik, auf das man laufend stößt. Sie sind das typische Beispiel einer linearen rekursiven Folge, also einer Folgen, bei der ein Folgeglied eine Linearkombination vorangehender Glieder ist (für die Fibonaccifolge gilt $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$).

Und noch weniger wissen, dass jede schiefe Summe im Pascalschen Dreieck eine rekursive Folge bildet. Auch das ist ein Grund dafür, warum viele kombinatorische Aufgaben auf rekursive Folgen führen.

Lineare rekursive Folgen spielen in fast allen Teilgebieten der Mathematik eine wichtige Rolle (z.B. bei Iterationsverfahren, rationalen Approximationen, Pseudoprimzahlen, ...) und sind ein elementarer Einstieg in die Analysis (Differenzialgleichungen).

Am Beispiel schiefer Summen im Pascalschen Dreieck wird auf den Zusammenhang zwischen rekursiver und expliziter Darstellung von Folgen eingegangen und ein Verfahren (das Quotienten-Differenzen-Schema) vorgestellt, mit dem man bei einer durch ihre Anfangswerte gegebenen Folge feststellen kann, ob sie rekursiv ist und wie man ihre allgemeine Bildungsvorschrift herleiten kann.

Schüler, die diesen Vortrag hören wollen, sollten arithmetische Folgen, das Pascalsche Dreieck und die Fibonaccifolge kennen und möglichst auch schon von ihrer expliziten Darstellungsform gehört haben.

Zahlenfolgen

Wie setze ich eine Folge fort?

Wie bestimme ich das Bildungsgesetz einer Folge?

$a_n = 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ 23,\ ...$ $\qquad a_n = 3n - 1$

$b_n = 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ ...$ $\qquad b_n = n^2$

$c_n = 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ 128,\ ...$ $\qquad c_n = 2^n$

Kombinatorik

- **Wieviele Diagonalen hat ein n-Eck?**
- **Wieviele Möglichkeiten gibt es, n als Summe von Einsen und Zweien darzustellen?**
- **Wieviele Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen gibt es, deren Umfang n ist?**

Das Pascalsche Dreieck

$$\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}$$

$$35 = 20 + 15$$

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1

1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1

1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1

Das Pascalsche „Viereck“ $B_{nk} = \binom{n}{k}$

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0	0	0	0
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0	0	0	0
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0	0	0	0
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0	0	0	0
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	0	0	0
13	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	0	0
14	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	0
15	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

$$\binom{4}{7} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot (-1) \cdot (-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 0$$

Arithmetische Folgen

Differenzen-schema

$$
\begin{array}{lccccccccccccccc}
\binom{n}{3}: & 0 & & 0 & & 0 & & 1 & & 4 & & 10 & & 20 & & 35 \\
& & 0 & & 0 & & 1 & & 3 & & 6 & & 10 & & 15 & \\
& & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & \\
& & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & &
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$ **arithmetische Folge 3-ter Ordnung** $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{n^3}{6} - \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$

$$
\begin{array}{lccccccccccccccccc}
n^4: & 0 & & 1 & & 16 & & 81 & & 256 & & 625 & & 1296 & & 2401 & & 4096 \\
& & 1 & & 15 & & 65 & & 175 & & 369 & & 671 & & 1105 & & 1695 & \\
& & & 14 & & 50 & & 110 & & 194 & & 302 & & 434 & & 590 & & \\
& & & & 36 & & 60 & & 84 & & 108 & & 132 & & 156 & & & \\
& & & & & 24 & & 24 & & 24 & & 24 & & 24 & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
n^4 &\stackrel{?}{=} 24 \cdot \binom{n}{4} + 36 \cdot \binom{n}{3} + 14 \cdot \binom{n}{2} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 0 \cdot \binom{n}{0} = \\
&= 24 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + 36 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + 14 \cdot \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n}{1} = \\
&= n(n-1)(n-2)(n-3) + 6n(n-1)(n-2) + 7n(n-1) + n = \\
&= \left(n^4 - 6n^3 + 11n^2 - 6n\right) + \left(6n^3 - 18n^2 + 12n\right) + \left(7n^2 - 7n\right) + n = n^4
\end{aligned}
$$

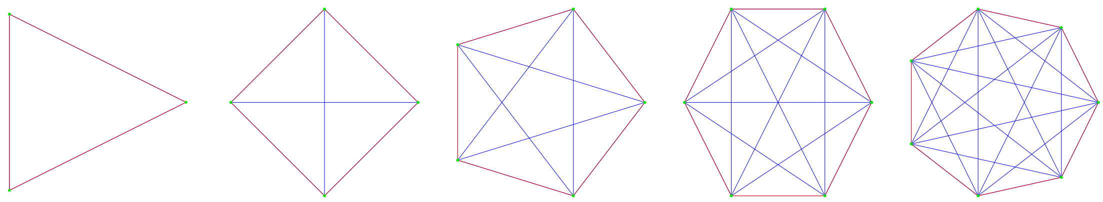
Arithmetische Folge k-ter Ordnung =

Polynom k-ten Grades =

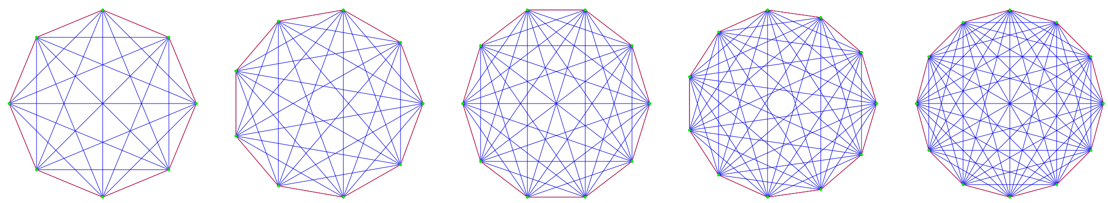
k-te Differenzenfolge ist konstant =

Linearkombinationen von Binomialkoeffizienten

Anzahl d_n der Diagonalen im n-Eck



$d_3 = 0$ $\quad$ $d_4 = 2$ $\quad$ $d_5 = 5$ $\quad$ $d_6 = 9$ $\quad$ $d_7 = 14$



$d_8 = 20$ $\quad$ $d_9 = 27$ $\quad$ $d_{10} = 35$ $\quad$ $d_{11} = 44$ $\quad$ $d_{12} = 54$

$$
\begin{array}{lccccccccccccccccc}
d_n: & 0 & & -1 & & -1 & & 0 & & 2 & & 5 & & 9 & & 14 & & 20 \\
 & & -1 & & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & \\
 & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & &
\end{array}
$$

$$d_n = 1 \cdot \binom{n}{2} - 1 \cdot \binom{n}{1} + 0 \cdot \binom{n}{0} = \binom{n}{2} - \binom{n}{1} =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n}{1} = \frac{n^2 - n - 2n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

Lösungsmethode: 1) Folgenanfang experimentell bestimmen.

2) Differenzenschema bilden. Arithmetische Folge?

3) Wenn ja: Allgemeines Glied bilden als

Linearkombination von $\binom{n}{k}$’s.

4) Formel interpretieren und beweisen.

Anzahl F_n der Möglichkeiten, n als Summe von Einsen oder Zweien darzustellen

Beispiel: $6 \;=\; 2+2+2 \;=\; 2+1+1+1+1$

Hilfsaufgabe: Anzahl der Möglichkeiten, n als Summe von k Einsen oder Zweien darzustellen

$$\begin{aligned} 6 &= 2+2+1+1 \\ &= 2+1+2+1 \\ &= 2+1+1+2 \\ &= 1+2+2+1 \\ &= 1+2+1+2 \\ &= 1+1+2+2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n \;=\; k \;&=\; \overbrace{1+1+\ldots+1+1}^{k-\text{Einsen}}+ \\ +\; n-k \;&=\; \underbrace{1+0+\ldots+1+0}_{n-k-\text{Einsen}} \end{aligned}$$

$\binom{k}{n-k}$ — **Anzahl der Möglichkeiten, n als Summe von k Einsen oder Zweien darzustellen**

Probe am Beispiel: $n=6,\ k=4 \Longrightarrow \binom{4}{6-4} = \binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$

$\Longrightarrow$ **Lösung der Aufgabe: Summe über alle k**

$$\begin{aligned} F_n &= \binom{0}{n} + \binom{1}{n-1} + \ldots + \binom{k}{n-k} + \ldots + \binom{n-1}{1} + \binom{n}{0} = \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \ldots + \binom{k}{n-k} + \ldots + \binom{1}{n-1} + \binom{0}{n} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} \end{aligned}$$

Schiefe Summen von Binomialkoeffizienten I

1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
34	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0	0	0	0
	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0	0	0	0
	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0	0	0	0
	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	0	0	0
	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	0	0
	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	0
	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

$$\binom{8}{0}+\binom{7}{1}+\binom{6}{2}+\binom{5}{3}+\binom{4}{4}+\binom{3}{5}+\binom{2}{6}+\binom{1}{7}+\binom{0}{8}=34$$

$$\begin{aligned} F_n &= \binom{n}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-2}{2}+\ldots+\binom{n-k}{k}+\ldots+\binom{1}{n-1}+\binom{0}{n}= \\ &= 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ \ldots \end{aligned}$$

Die Fibonaccifolge

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + ... + \binom{n-k}{k} + ... + \binom{1}{n-1} + \binom{0}{n} =$$

$$= 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ ...$$

Differenzenschema:

$$\begin{array}{llllllllllllllllllllll}
F_n: & 1 & & 1 & & 2 & & 3 & & 5 & & 8 & & 13 & & 21 & & 34 & & 55 & & 89 \\
& & 0 & & 1 & & 1 & & 2 & & 3 & & 5 & & 8 & & 13 & & 21 & & 34 & \\
& & & 0 & & 0 & & 1 & & 1 & & 2 & & 3 & & 5 & & 8 & & 13 & &
\end{array}$$

$\Longrightarrow F_n$ **ist keine arithmetische Folge, also auch kein Polynom!**

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ F_0 = 1,\ F_1 = 1$$

$\Longrightarrow F_n$ **ist eine rekursive Folge 2-ter Ordnung**

F_n — **Anzahl der Möglichkeiten,** n **als Summe von Einsen oder Zweien darzustellen**

Frage: Wie erkennt man rekursive Folgen?

Das Quotienten – Differenzen – Schema

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
F_n: & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 \\
 & & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{N} & \\
\mathbf{W} & \mathbf{X} & \mathbf{O} \\
 & \mathbf{S} &
\end{array}
$$

$$\mathbf{X}^2 = \mathbf{N}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{O}\cdot\mathbf{W} \Longrightarrow \mathbf{S} = \frac{\mathbf{X}^2 - \mathbf{O}\cdot\mathbf{W}}{\mathbf{N}} \qquad 1 = \frac{5^2 - 3\cdot 5}{1}$$

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
F_n: & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 \\
 & & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \\
 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & &
\end{array}
$$

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{X}^2 - \mathbf{O}\cdot\mathbf{W}}{\mathbf{N}} \qquad 0 = \frac{(-1)^2 - 1\cdot 1}{8}$$

k-te Quotienten – Differenzen – Folge ist 0 =

Rekursive Folge k-ter Ordnung

$$\boxed{f_n = c_1 f_{n-1} + c_2 f_{n-2} + \ldots + c_k f_{n-k}}$$

Schiefe Summen von Binomialkoeffizienten II

1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
60	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
189	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	6	15	20	15	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0	0	0	0	0
	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0	0	0	0	0
	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	0	0	0	0
	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	0	0	0
	1	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1	0	0
	1	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1	0
	1	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1

$$\binom{5}{0} + \binom{7}{3} + \binom{9}{6} + \binom{11}{9} + \binom{13}{12} + \binom{15}{15} + 0 + ... = 189$$

$$f_n = \binom{n}{0} + \binom{n+2}{3} + \binom{n+4}{6} + ... + \binom{n+2k}{3k} + ... = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2k}{3k} =$$

$$= 1,\ 2,\ 6,\ 19,\ 60,\ 189,\ 595,\ 1873,\ 5896,\ 18560,\ ...$$

Das Quotienten – Differenzen – Schema für f_n

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
f_n : & 1 & 2 & 6 & 19 & 60 & 189 & 595 & 1873 & 5896 & 18560 \\
 & & -2 & -2 & 1 & 9 & 21 & 28 & 9 & -64 & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & \mathbf{N} & \\
\mathbf{W} & \mathbf{X} & \mathbf{O} \\
 & \mathbf{S} &
\end{array}
$$

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{X}^2 - \mathbf{O}\cdot\mathbf{W}}{\mathbf{N}} \qquad -2 = \frac{6^2 - 2\cdot 19}{1} \qquad 1 = \frac{9^2 - 1\cdot 21}{60} \qquad 0 = \frac{1^2 - 1\cdot 1}{28}$$

3-te Quotienten – Differenzen – Folge ist Null!

$\Longrightarrow$ **f_n ist rekursive Folge 3-ter Ordnung**

$$f_n = af_{n-1} + bf_{n-2} + cf_{n-3}$$

$$\begin{aligned}
19 &= 6a + 2b + 1c \\
60 &= 19a + 6b + 2c \qquad \Longrightarrow \quad a = 4,\ b = -3,\ c = 1 \\
189 &= 60a + 19b + 6c
\end{aligned}$$

$$f_n = 4f_{n-1} - 3f_{n-2} + f_{n-3}$$

$$595 \stackrel{?}{=} 4\cdot 189 - 3\cdot 60 + 19 = 756 - 180 + 19 = 595$$

Andere schiefe Summen

$$
\begin{aligned}
F_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \binom{n-3}{3} + ... = \\
&= F_{n-1} + F_{n-2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2k}{3k} = \binom{n}{0} + \binom{n+2}{3} + \binom{n+4}{6} + \binom{n+6}{9} + ... = \\
&= 4f_{n-1} - 3f_{n-2} + f_{n-3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + ... = \\
&= 2a_{n-1} = 2^n
\end{aligned}
$$

$$
s_n(i,j) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-ik}{jk} = \binom{n}{0} + \binom{n-i}{j} + \binom{n-2i}{2j} + \binom{n-3i}{3j} + ...
$$

$$
s_n(i,j,m,z) = \sum_{k=0}^{n} k^m z^k \binom{n-ik}{jk} = \binom{n}{0} + z\binom{n-i}{j} + 2^m z^2 \binom{n-2i}{2j} + ...
$$

Zum Beispiel $c_n = s_n(1,1,2,z)$

$$
\begin{aligned}
c_n &= \sum_{k=0}^{n} k^2 z^k \binom{n-k}{k} = 0^2 z^0 \binom{n}{0} + 1^2 z^1 \binom{n-1}{1} + 2^2 z^2 \binom{n-2}{2} + ... = \\
&= 3c_{n-1} + 3(z-1)c_{n-2} + (1-6z)c_{n-3} + 3z(1-z)c_{n-4} + 3z^2 c_{n-5} + z^3 c_{n-6}
\end{aligned}
$$

Explizite Darstellung der Fibonaccifolge

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2},\ F_0 = 1,\ F_1 = 1 \\ &= 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ ... \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ ... = 2^n = \\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{n} = 2^n = 2a_{n-1} \end{aligned}$$

Ansatz: $F_n = x^n \quad \Longrightarrow \quad x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$

charakteristische Gleichung: $x^2 = x + 1$

2 Lösungen: $x_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ **und** $x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$

$$F_n = a \cdot \left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right)^n + b \cdot \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right)^n$$

$$\begin{aligned} F_0 = 1 &= a \cdot \left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right)^0 + b \cdot \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right)^0 = a + b \\ F_1 = 1 &= a \cdot \left(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})\right)^1 + b \cdot \left(\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\right)^1 = \frac{a+b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}(b - a) \end{aligned}$$

Lösung: $\boxed{F_n = \frac{1}{2^{n+1}\sqrt{5}}\left((1 + \sqrt{5})^{n+1} - (1 - \sqrt{5})^{n+1}\right)}$

$$\begin{aligned} F_4 &= \frac{1}{2^5\sqrt{5}}\left((1 + \sqrt{5})^5 - (1 - \sqrt{5})^5\right) = \\ &= \frac{1}{32\sqrt{5}}\Big((1 + 5\sqrt{5} + 50 + 50\sqrt{5} + 125 + 25\sqrt{5}) - \\ &- (1 - 5\sqrt{5} + 50 - 50\sqrt{5} + 125 - 25\sqrt{5})\Big) = \\ &= \frac{1}{32\sqrt{5}}(10\sqrt{5} + 100\sqrt{5} + 50\sqrt{5}) = \frac{1}{32\sqrt{5}} \cdot 160\sqrt{5} = 5 \end{aligned}$$

Explizite Darstellung anderer rekursiver Folgen

$$f_n = \binom{n}{0} + \binom{n+2}{3} + \binom{n+4}{6} + ... + \binom{n+2k}{3k} + ... = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2k}{3k} =$$

$$= 1,\ 2,\ 6,\ 19,\ 60,\ 189,\ 595,\ 1873,\ 5896,\ 18560,\ ...$$

Rekursive Bildungsvorschrift: $f_n = 4f_{n-1} - 3f_{n-2} + f_{n-3}$

charakteristische Gleichung: $x^3 = 4x^2 - 3x + 1$

Lösungen:

$$x_1 = \frac{1}{6}\left(8 + 2^{\frac{2}{3}}\left(47 - 3\sqrt{93}\right)^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{2}{3}}\left(47 + 3\sqrt{93}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \approx 3.1478990357...$$

$$x_2 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6}\left(1 + \sqrt{3}\,i\right)\left(\frac{47 - 3\sqrt{93}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{6}\left(1 - \sqrt{3}i\right)\left(\frac{47 + 3\sqrt{93}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$x_3 = \frac{4}{3} - \frac{1}{6}\left(i - \sqrt{3}\right)\left(\frac{47 - 3\sqrt{93}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{6}\left(i + \sqrt{3}\right)\left(\frac{47 + 3\sqrt{93}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$x_{2,3} \approx 0.4260504821476063222986... \pm 0.3689894074818040 87...\, i$$

$$\begin{aligned} f_n &= 0.611492 \cdot 3.147899^n + \\ &+ (0.194254004 + 0.12254969\,i)(0.426050482 + 0.368989407481\,i)^n + \\ &+ (0.194254004 - 0.12254969\,i)(0.426050482 - 0.368989407481\,i)^n = \\ &= 0.611492 \cdot 3.147899^n + \\ &+ 0.388508 \cdot 0.563624162^n \cos(40.8948^\circ n) - \\ &- 0.24509938 \cdot 0.563624162^n \sin(40.8948^\circ n) \end{aligned}$$

sinnlos !!!

Die Anzahl t_n der Dreiecke mit ganzzahliger Seitenlänge und gegebenem Umfang n

$$n = a + b + c$$

$$a \geq b \geq c > 0$$

$$a < b + c \qquad \text{(Dreiecksungleichung)}$$

$$
\begin{array}{lll}
n=0 & \Longrightarrow\ 0 = & \Longrightarrow\ t_0 = 0 \\
n=1 & \Longrightarrow\ 1 = & \Longrightarrow\ t_1 = 0 \\
n=2 & \Longrightarrow\ 2 = & \Longrightarrow\ t_2 = 0 \\
n=3 & \Longrightarrow\ 3 = 1+1+1 & \Longrightarrow\ t_3 = 1 \\
n=4 & \Longrightarrow\ 4 = & \Longrightarrow\ t_4 = 0 \\
n=5 & \Longrightarrow\ 5 = 2+2+1 & \Longrightarrow\ t_5 = 1 \\
n=6 & \Longrightarrow\ 6 = 2+2+2 & \Longrightarrow\ t_6 = 1 \\
n=7 & \Longrightarrow\ 7 = 3+2+2 = 3+3+1 & \Longrightarrow\ t_7 = 2 \\
n=8 & \Longrightarrow\ 8 = 3+3+2 & \Longrightarrow\ t_8 = 1 \\
n=9 & \Longrightarrow\ 9 = 3+3+3 = 2+3+4 = 1+4+4 & \Longrightarrow\ t_9 = 3 \\
n=10 & \Longrightarrow\ 10 = 4+4+2 = 4+3+3 & \Longrightarrow\ t_{10} = 2 \\
n=11 & \Longrightarrow\ 11 = 4+4+3 = 5+4+2 = 5+3+3 = 5+5+1 & \Longrightarrow\ t_{11} = 4 \\
n=12 & \Longrightarrow\ 12 = 4+4+4 = 5+4+3 = 5+5+2 & \Longrightarrow\ t_{12} = 3 \\
n=13 & \Longrightarrow\ 13 = 5+4+4 = 6+4+3 = 5+5+3 = 6+5+2 = & \\
 & \qquad = 6+1+1 & \Longrightarrow\ t_{13} = 5 \\
n=14 & \Longrightarrow\ 14 = 6+6+2 = 6+5+3 = 6+4+4 = 5+5+4 & \Longrightarrow\ t_{14} = 4 \\
n=15 & \Longrightarrow\ 15 = 7+7+1 = 7+6+2 = 7+5+3 = 6+6+3 = & \\
 & \qquad = 7+4+4 = 6+5+4 = 5+5+5 & \Longrightarrow\ t_{15} = 7
\end{array}
$$

$t_n = 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 4,\ 3,\ 5,\ 4,\ 7,\ 5,\ 8,\ 7,\ 10,\ 8,\ 12,\ \ldots$

Die Anzahl t_n der Dreiecke mit ganzzahliger Seitenlänge und gegebenem Umfang n

$t_n = 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 4,\ 3,\ 5,\ 4,\ 7,\ 5,\ 8,\ 7,\ 10,\ 8,\ 12,\ ...$

$t_n = t_{n-2} + t_{n-3} + t_{n-4} - t_{n-5} - t_{n-6} - t_{n-7} + t_{n-9}$

charakteristische Gleichung:

$$x^9 = x^7 + x^6 + x^5 - x^4 - x^3 - x^2 + 1 \iff (x^4 - 1)(x^3 - 1)(x^2 - 1) = 0$$

$$\begin{aligned} t_n &= \frac{1}{288}\Big(6n^2 + 18n - 1 - 18(-1)^n n - 27(-1)^n - \\ &- 36\cos(90^\circ n) + 64\cos(120^\circ n) - 36\sin(90^\circ n)\Big) \end{aligned}$$

Probe für ein Beispiel:

$$\begin{aligned} t_{15} &= \frac{1}{288}\Big(6 \cdot 15^2 + 18 \cdot 15 - 1 - 18 \cdot (-1) \cdot 15 - 27 \cdot (-1) - \\ &- 36\cos(15 \cdot 90^\circ) + 64\cos(15 \cdot 120^\circ) - 36\sin(15 \cdot 90^\circ)\Big) = \\ &= \frac{1}{288}\Big(1350 + 270 - 1 + 270 + 27 - 36 \cdot 0 + 64 \cdot 1 - 36 \cdot (-1)\Big) = \\ &= \frac{1}{288}\Big(1350 + 270 - 1 + 270 + 27 + 64 + 36\Big) = \frac{2016}{288} = 7 \end{aligned}$$

Zusammenfassung

- **Lineare rekursive Folgen k-ter Ordnung sind solche mit einer Bildungsvorschrift der Form**

  $$f_n = c_1 f_{n-1} + c_1 f_{n-2} + ... + c_k f_{n-k};\ \ f_0,\ \ f_1,\ \ ..., f_{k-1}$$

- **Viele kombinatorische Aufgaben und fast alle „Spielereien“ mit dem Pascalschen Dreieck führen auf rekursive Folgen.**
- **Mit dem Quotienten – Differenzen – Schema erkennt man rekursive Folgen.**
- **Die Koeffizienten c_1, ..., c_k kann man aus den ersten Folgegliedern durch ein lineares Gleichungssystem bestimmen.**
- **Jede rekursive Folge hat eine explizite Bildungsvorschrift der Form (nur wenn x_i verschieden, sonst komplizierter!!)**

  $$f_n = a_1 x_1^n + ... + a_k x_k^n$$

  dabei sind x_1, ..., x_k die Lösungen der charakterist. Gleichung

  $$x^k = c_1 x^{k-1} + c_2 x^{k-2} + ... + c_{k-1} x + c_k$$

- **Die Koeffizienten a_1, ..., a_k kann man aus den ersten Folgegliedern durch ein lineares Gleichungssystem bestimmen.**