

## 6 Variationsprobleme

### 6.1 Einführung

Wir wollen jetzt die zeitliche Entwicklung von physikalischen Prozessen beschreiben. Ziel ist es, Evolutionsgleichungen herzuleiten die das beschreiben. Als Evolutionsgleichungen werden Differentialgleichungen der Form  $\dot{x}(t) = F(x(t), t)$  (und Anfangswert) bezeichnet. Hier ist  $t$  ein reeller Parameter, der die Zeit beschreiben soll,  $x$  die interessierende physikalische Größe (z.B. ein Element einer Mannigfaltigkeit oder eines Banachraumes) und  $F$  eine gegebene Funktion, die der Zeitableitung  $\dot{x}$  gleichgesetzt wird.

Wie aus dem ersten Semester bekannt, ist schon die Idee, Prozesse durch einen reellen Zeitparameter zu beschreiben, eine starke Einschränkung. So ist es z.B. nicht möglich Prozesse in diskreten (topologischen) Zustandsräumen oder nichtkommutative Prozesse auf diese Weise zu beschreiben.

Um Evolutionsgleichungen herzuleiten gibt es zwei prinzipielle Herangehensweisen:

1) Man betrachtet zwei Zeitpunkte  $t' > t$ , beschreibt die Zustandsänderung, die von  $x(t)$  zu  $x(t')$  führt, nimmt die Änderung  $x(t') - x(t)$  als proportional zur Zeitdifferenz  $t' - t$  und geht zum Grenzwert  $t' - t \rightarrow 0$  über.

Dieser Zugang ist im allgemeinen die einzige Möglichkeit der Herleitung für unbekannte oder wenig untersuchte Probleme.

2) Man geht davon aus, daß die Trajektorie der Größe  $x$ , also  $x(t)$  mit einem reellen Parameter  $t$  parametrisiert werden kann und postuliert Prinzipien, denen sich die Trajektorie unterzuordnen hat.

Wir betrachten im weiteren nur den zweiten Zugang. Dazu betrachten wir als erstes die Eigenschaften einer gegebenen Trajektorie (Kinematik) und als zweites die Gründe, die zu dieser speziellen Trajektorie führen (Dynamik). Dabei lassen wir uns in erster Linie von Variationsprinzipien leiten. D.h., wir nehmen an, daß der Grund dafür, daß ein physikalisches System genau eine spezielle Trajektorie zurücklegt und keine andere darin besteht, daß ein gewisses Funktional, daß mit dem physikalischen Problem in Zusammenhang steht, minimal wird, wenn vom physikalischen System genau diese Trajektorie zurücklegt wird.

Die mathematischen und physikalischen Grundlagen dessen, was wir untersuchen werden, wurden in den fast 200 Jahren von 1636 bis 1834 gelegt.

#### 6.1.1 Fundamental Neues

In den 200 Jahren, die wir hier betrachten, hat sich die Denkweise prinzipiell geändert. Viele Begriffe und Objekte, die uns heute selbstverständlich erscheinen, waren damals neu und gewöhnungsbedürftig. Einiges ist bis heute noch nicht ausreichend verstanden.

- Fermat (und in geringerem Maße Descartes): Rechtwinkliges Koordinatensystem mit gleichberechtigten Koordinatenachsen außerhalb vom Menschen. Im Gegensatz dazu gab es in der Antike die Richtungen oben-unten, vorn-hinten, rechts-links.
- Fermat: Das erste Variationsprinzip *Das Licht wählt den zeitlich kürzesten Weg*. Im Gegensatz zum lokalen Ansatz: Das Licht wird losgeschickt, ist ein Variationsprinzip ein globaler Ansatz. Das Licht weiß vorher wo es hin will).
- Galilei: Beobachtung von Himmelskörpern mit Teleskop (Jupitermonde, Venusphasen). Erkenntnis durch Experiment.

- Galilei: Erkenntnis durch Gedankenexperiment. Gedankenexperimente sind keine Experimente sondern rein logische Schlüsse. Siehe hierzu das Essay des Autors *Galileis Fallgesetz und andere Naturgesetze*.
- Newton: Kraft und Masse beschreiben allein die Bewegung.
- Newton: Fernwirkung (Gravitationskräfte). Allerdings nahm Newton an, daß diese Kräfte durch den Stoff (Äther) zwischen den Körpern erzeugt werden.
- Lagrange: Dualität von Freiheitsgraden und Zwängen.  $n$  Freiheitsgrade und  $k$  Zwänge ergeben  $(n + k)$  (und nicht  $(n - k)$ ) Freiheitsgrade.
- Newton: Licht sind Teilchen
- Huygens: Licht ist Welle (Huygenssches Prinzip)
- Euler: Die moderne mathematische Schreibweise von Funktionen, Variablen, ...
- Gauß: Beginn der modernen Mathematik (exakte Beweise)
- Hamilton: Teilchen sind Wellen

### 6.1.2 Begriffe und Zitate

Aus der **wikipedia**:

Die Kinematik (altgriech. *kinema* – Bewegung) ist die Lehre der Bewegung von Punkten und Körpern im Raum, beschrieben durch die Größen Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung, ohne die Ursachen der Bewegung (Kräfte) zu betrachten.

Aus der **wikipedia**:

Die Dynamik (griechisch *dynamis* – Kraft) ist das Teilgebiet der Mechanik, das sich mit der Wirkung von Kräften befaßt.

Die physikalische Theorie, die die Änderung physikalischer Größen als Funktion eines kontinuierlichen Parameters, den wir Zeit nennen, beschreibt heißt Dynamik. Im engeren Sinn bezeichnet man mit Dynamik die Theorie der zeitlichen Änderung des Ortes und der Geschwindigkeit eines oder mehrerer endlich vieler Punktmassen (Teilchen).

Früher wurde anstelle des Begriffes "Kinematik" der Begriff "Phoronomie" und anstelle des Begriffes "Dynamik" der Begriff "Mechanik" verwendet.

Zitat von **Maxim Gorki** über dem Eingang des Dynamo-Radsportclubs, in dem der Autor früher aktiv war: *Dynamo – das ist Kraft in der Bewegung*

### 6.1.3 Zeittafel der Entwicklung der Physik im 17.-19.Jh

Der Zeitraum, in dem sich die klassische Physik entwickelt hat, die wir in unserer Vorlesung behandeln, erstreckt sich etwa von 1636 bis 1834. In diesen 200 Jahren wurden die Grundlagen für die Variationsrechnung, die Kinematik und die Dynamik gelegt und zu Höhepunkten geführt.

**1636** Beginn der modernen Physik nach Aristoteles

Es erscheinen die "Discorsi" von Galileo Galilei (1564 - 1642)

**~1640** Koordinatensystem, phys. Größen als Funktion von Ort und Zeit  
(Pierre de Fermat, 1607 - 1665)

**~1655** Erstes globales Variationsprinzip

Erklärung der Lichtbrechung aus dem Prinzip der kürzesten Zeit  
(Pierre de Fermat, 1607 - 1665)

**1678** Huygenssches Prinzip (Wellentheorie des Lichtes)

**1684/87** Infinitesimalrechnung

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716, Integrale, Flächen sind Mengen von Punkten) und Isaac Newton (1643 - 1727, Ableitungen, Kurven sind bewegte Punkte)

**1687** Beginn der Dynamik

"Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" von Isaac Newton, (1643 - 1727)

**1696** Beginn der Variationsrechnung

Das Brachistochronenproblem, gestellt und gelöst von Johann Bernoulli (1667 - 1748)

**1744** Vorläufiger Höhepunkt der Variationsrechnung

"Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti" (Lehrbuch zur Variationsrechnung) von Leonhard Euler (1707 - 1783)

**1788** Höhepunkt der Analytischen Mechanik, Prinzip der extremalen Wirkung

"Mécanique Analytique" von Joseph-Louis de Lagrange (1736 - 1813)

**bis 1823** Vollendung der klassischen Mechanik

"Himmelsmechanik" (5 Bände) von Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827)

**~1834** Dualität zwischen intensiven (Geschwindigkeit) und extensiven (Impuls) Größen  
Hamiltonmechanik (William Rowan Hamilton, 1805 - 1865)

**~1834** Klassischer Welle-Teilchen-Dualismus (Hamilton-Jacobi-Formalismus)  
Hamilton (weniger Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804 - 1851)

Zum Datenvergleich:

**1781** Kritik der reinen Vernunft (Immanuel Kant, 1724 - 1804), extensive und intensive Größen

**1801** Wiederentdeckung des Asteroiden Ceres (Carl Friedrich Gauß, 1777 - 1855),

**1812/16** "Logik", "Naturphilosophie" von Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770 - 1831)

**1861/64** Felder als Zustände, Feldgleichungen, Elektrodynamik

Maxwellgleichungen (James Clerk Maxwell, 1831 - 1879)

Feldphysik beginnt (neben der Teilchen- und Festkörperphysik)

**1905** Beginn der relativistischen Physik (Poincaré, Lorentz, Einstein, Minkowski)

**1924/27** Mathematischer Beginn der Quantenphysik (Schrödinger, Heisenberg, Dirac)

## 6.2 Kinematik. Die Bewegung von Punkten

Newton hat die Idee, daß Kurven bewegte Punkte, also Trajektorien sind, als Grundlage für die Beschreibung physikalischer Prozesse genommen.

Bereits in der Antike wurden Kurven untersucht, die durch die Überlagerung gleichförmiger linearer Bewegungen oder gleichförmiger Kreisbewegungen gebildet werden. So entstanden etwa die Begriffe der Zycloide und der archimedischen Spirale. Solche Konstruktionen wurden auch zur Dreiteilung des Winkels und zur Quadratur des Kreises verwendet.

Die Idee besteht darin, anzunehmen, daß die zeitliche Bewegung eines Punktes eine Spur im Raum hinterläßt oder hinterlassen hat, die man nun, nachdem die Bewegung geschehen ist, in aller Ruhe untersuchen kann. Es wird auf diese Weise anstelle eines zeitlichen Problems ein räumliches betrachtet. Dieser Ansatz ist die Grundlage für die Betrachtung der Zeit als neue Dimension mit allen Folgen, die so eine Betrachtung nach sich zieht wie Paradoxa von Zeitreisen, mehrdimensionale Zeit, Widerspruch zwischen reversiblen und irreversiblen Beschreibungen und Gleichsetzen von Beschleunigung, Krümmung und Kraft.

Die Kinematik beschäftigt sich mit den Eigenschaften so einer Trajektorie. Sie wird dabei als parametrisierbare Kurve im Ortsraum betrachtet. Die Parametrisierung ist hierbei unerheblich und willkürlich – im Gegensatz zu Kurven im Phasenraum, die nicht willkürlich parametrisiert werden können (z.B. kann die Kurve des eindimensionalen Oszillators (oder Pendels) im zweidimensionalen Orts-Geschwindigkeits-Raum – eine Ellipse – nur im mathematisch negativen Drehsinn parametrisiert werden).

Wie die Kurve entstanden ist, interessiert uns nicht.

Wir stellen uns die Zeit als einen sich kontinuierlich ändernden reellen Parameter vor. Mit der “Zeit an sich” hat das erstmal nichts zu tun. Dieser reelle Parameter könnte auch eine andere sich kontinuierlich ändernde Größe sein, etwa ein Steuerungsparameter.

### 6.2.1 Definitionen

Es sei  $\mathcal{X}$  die Menge der möglichen Orte eines physikalischen Systems.  $\mathcal{X}$  kann eine geeignete Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  (Skalarprodukt  $[\cdot, \cdot]$ ), ein Hilbertraum (Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$ ) oder allgemein, ein Banachraum (duales Produkt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ), sein. In der Mathematik ist es üblich für  $\mathcal{X}$  Mannigfaltigkeiten im  $\mathbb{R}^n$  oder sogar  $\infty$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten zu betrachten. Das werden wir hier nicht tun, da wir uns auf lineare Mengen beschränken.

Richtigerweise sollte  $\mathcal{X}$  ein affiner Raum sein. Wir identifizieren ihn wie üblich mit dem Vektorraum seiner Verschiebungen.

Es sei  $I = [a, b] \in \mathbb{R}$  ein Parameterintervall (Zeitintervall). und  $x : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Kurve oder Trajektorie.

Diese Abbildung heißt differenzierbar im Punkt  $t$ , wenn der Grenzwert

$$\dot{x}(t) = \lim_{t' \rightarrow t} \frac{1}{t' - t} (x(t') - x(t))$$

in  $\mathcal{X}$  im starken Sinne existiert. In den Randpunkten betrachten wir einseitige Grenzwerte. Die Ableitung  $\dot{x}(t)$  ist ebenfalls ein Element von  $\mathcal{X}$ .

Analog definieren wir höhere Zeitableitungen. Im weiteren nehmen wir an, daß eine betrachtete Kurve stets ausreichend glatt ist also z.B. zweimal stetig differenzierbar ist.

Wir führen für die Ableitungen folgende Bezeichnungen ein, die sich im weiteren als sinnvoll herausstellen werden.

- $\dot{x}(t)$  Geschwindigkeit (velocity), Tangente an  $x$  im Punkt  $t$
- $v(t) = \|\dot{x}(t)\|$  Betrag der Geschwindigkeit oder Tempo (speed)
- $\ddot{x}(t)$  Beschleunigung
- $k(t) = \|\ddot{x}(t)\|$  Betrag der Beschleunigung, Krümmung

Eine Funktion  $y(x)$  in  $\mathbb{R}$  kann als parametrisierte Kurve  $z(t) = (x(t), y(t)) = (t, y(t))$  interpretiert werden. Dann ist  $v = \|\dot{z}\| = \sqrt{1 + y'^2(x)}$ .

### 6.2.2 Abstand eines Punktes zu einer Kurve im Hilberraum

Der Abstand eines Punktes  $x_0$  zu einer Kurve  $x(t)$  ist natürlicherweise die Größe

$$\min_t \|x(t) - x_0\|$$

Ist  $\mathcal{X}$  ein Hilberraum, dann lässt sich aus diesem Minimumproblem eine Gleichung herleiten. Anstelle des Minimums über  $\|x(t) - x_0\|$  lässt sich auch das Minimums über  $\frac{1}{2}\|x(t) - x_0\|^2$  betrachten. Nullsetzen der Ableitung ergibt

$$0 = \frac{d}{dt} \frac{1}{2}\|x(t) - x_0\|^2 = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \langle x(t) - x_0, x(t) - x_0 \rangle = \langle \dot{x}(t), x(t) - x_0 \rangle$$

Lösung dieser Gleichung ist ein Parameterwert  $t_0$ , für den die beiden Vektoren  $\dot{x}(t_0)$  und  $(x(t_0) - x_0)$  senkrecht aufeinander stehen. Der Parameter  $t_0$  liefert nur ein lokales Extremum im Inneren der Kurve.

### 6.2.3 Bogenlänge einer Kurve

Wir bestimmen die Länge  $s$  einer Kurve zwischen den Parameter-Punkten  $a$  und  $b$  indem wir die Kurve durch einen Streckenzug approximieren und die Zahl der Stützstellen gegen  $\infty$  und die Abstände zwischen den Stützstellen gegen 0 gehen lassen.  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ . Die Länge des Streckenzuges  $s_n$  ist dann

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=1}^n \|x(t_i) - x(t_{i-1})\| = \sum_{i=1}^n \left\| \frac{1}{t_i - t_{i-1}} (x(t_i) - x(t_{i-1})) \right\| (t_i - t_{i-1}) \rightarrow \\ s &= \int_a^b \|\dot{x}(t)\| dt = \int_a^b v(t) dt \end{aligned}$$

falls dieser Grenzwert existiert. Kurven, deren Länge sich auf diese Weise bestimmen lässt heißen **rektifizierbar**.

Die Bogenlänge einer Kurve ist also das Integral über den Betrag der Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit hängt natürlich von der Parametrisierung ab, die Bogenlänge der Kurve sollte davon unabhängig sein. Das ist tatsächlich der Fall:

Es sei  $s = \gamma(t)$  ein anderer Parameter und  $y(s) = x(\gamma^{-1}(s))$  eine andere Parametrisierung derselben Kurve. Dann gilt nach der Kettenregel  $\frac{d}{dt}y(\gamma(t)) = \dot{y}(s) \cdot \dot{\gamma}(t)$ . Damit erhalten wir

$$\int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} \|\dot{y}(s)\| ds = \int_a^b \left\| \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|} \right\| |\dot{\gamma}(t)| dt = \int_a^b \|\dot{x}(t)\| dt = \int_a^b v(t) dt$$

falls  $\dot{\gamma}$  das Vorzeichen nicht ändert,  $\gamma$  also eineindeutig ist. Das Vorzeichen der Kurvenlänge entspricht der Richtung der Parametrisierung.

### 6.2.4 Beschleunigung bei konstantem Tempo

Angenommen, der Betrag der Geschwindigkeit ist konstant, dann gilt (im Hilbertraum)

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2(t) \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\dot{x}(t)\|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{x}(t), \dot{x}(t)) = (\dot{x}, \ddot{x}) = 0$$

In diesem Fall steht die Beschleunigung also senkrecht zur Tangente. Sie zeigt in Normalenrichtung.

### 6.2.5 Natürliche Parametrisierung durch Bogenlänge

Die Parametrisierung einer Kurve ist nicht eindeutig. Jede eineindeutige Funktion  $\gamma : I \rightarrow \tilde{I}$  ermöglicht die Parametrisierung zu transformieren. Wir betrachten die Bogenlänge als Funktion der oberen Grenze

$$s(t) = \int_a^t v(t') dt'$$

$s : [a, b] \rightarrow [s(a) = 0, s(b)]$  ist eine eineindeutige Abbildung der Parametermenge. Die Parametrisierung einer Kurve durch die Bogenlänge wird auch natürliche Parametrisierung genannt und die Bogenlänge natürlicher Parameter.

Wenn das Tempo konstant ist, ist der zurückgelegte Weg proportional zur verbrauchten Zeit. Früher hat man deshalb Entfernung oft in Zeiteinheiten angegeben (siehe alte Postmeilensäulen). Dabei wurde die Laufgeschwindigkeit oder die Geschwindigkeit der Postkutsche implizit angenommen.

Ist  $y(s)$  die Parametrisierung derselben Kurve mit der Bogenlänge, so folgt, da die Bogenlänge unabhängig von der Parametrisierung ist

$$\int_0^s \|\dot{y}(s')\| ds' = \int_a^t v(t') dt' = s$$

Hieraus folgt nach Differenzieren bezüglich  $s$  ein konstantes Tempo  $\|\dot{y}(s)\| = 1$ .

### 6.2.6 Die Krümmung

Angenommen wir haben eine Kurve natürlich parametrisiert. Dann ist das Tempo ist konstant  $\|\dot{y}(s)\| = 1$  und folglich steht die Geschwindigkeit senkrecht auf der Beschleunigung. Der Betrag dieser Beschleunigung wird Krümmung genannt. Im allgemeinen ist  $1/k(s_0)$  gerade der Radius des Kreises, der am besten im Punkt  $x(s_0)$  in die Kurve paßt (Tangentialkreis). Das kann man sich an folgendem Beispiel klarmachen:

**Beispiel: Kreis im  $\mathbb{R}^2$**  Es ist

$$\begin{aligned} x(t) &= R \cos t & \dot{x}(t) &= -R \sin t \\ y(t) &= R \sin t & \dot{y}(t) &= R \cos t \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Bogenlänge

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt = \int_0^t R dt = Rt, \quad t = s/R$$

Die natürliche Parametrisierung ist also

$$\begin{aligned} x(s) &= R \cos s/R & \dot{x}(s) &= -\sin s/R & \ddot{x}(s) &= 1/R \cos s/R \\ y(s) &= R \sin s/R & \dot{y}(s) &= \cos s/R & \ddot{y}(s) &= 1/R \sin s/R \end{aligned}$$

Damit erhält man für die Krümmung

$$k(s) = |\ddot{x}(s)| = \sqrt{\ddot{x}(s)^2 + \ddot{y}(s)^2} = 1/R$$

Bei einem Kreis mit dem Radius  $R$  ist die Krümmung konstant  $1/R$ .

**Bemerkungen:**

- Die “Gleichung”: Beschleunigung = Krümmung ergibt zusammen mit der Newtonschen Gleichung: Kraft = Beschleunigung (Masse sei 1) eine Identifizierung einer analytischen (Beschleunigung  $\ddot{x}$ ), geometrischen (Krümmung) und physikalischen (Kraft) Größe.
- Die Schwingungsgleichung der Saite ist  $u_{tt}(x, t) = c^2 u_{xx}(x, t)$ , wobei  $u(x, t)$  die räumlich-zeitliche Auslenkung ist. In Worten: Zeitliche Krümmung proportional räumlicher Krümmung. Der Proportionalitätsfaktor  $c$  ist gerade die Geschwindigkeit der Welle, die die Zeit in eine zweite Raumdimension abbildet. Die Gleichung besagt also Krümmung = Krümmung.
- Krümmung ist die Abweichung von der geraden Linie.  $\ddot{x}(s) = 0 \iff x(s)$  ist ein Geradenstück.
- Die Formel für die Krümmung einer Funktion  $y = y(x)$  ist

$$k(x) = |y''(x)| \left(1 + (y'(x))^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

### 6.2.7 Die Fläche, die eine Kurve umschließt (in 2-D)

Wir betrachten o.B.d.A. die Fläche die eine Kurve umschließt und in der der Nullpunkt liegt. Genau wie bei der Berechnung der Bogenlänge, ermitteln wir die Fläche als Grenzwert einer Approximation der Kurve durch einen Streckenzug. Es sei  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ . Die Fläche ist dann die Fläche eines  $n$ -Ecks, also

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( x(t_{i-1})y(t_i) - x(t_i)y(t_{i-1}) \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x(t_{i-1})y(t_i) - x(t_i)y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{x(t_{i-1})y(t_i) - x(t_{i-1})y(t_{i-1}) + x(t_{i-1})y(t_{i-1})x(t_i)y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} (t_i - t_{i-1}) = \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( x(t_{i-1}) \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - y(t_{i-1}) \frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \right) (t_i - t_{i-1}) \rightarrow \\
 &\rightarrow \frac{1}{2} \int_a^b \left( x(t)\dot{y}(t) - \dot{x}(t)y(t) \right) dt = \frac{1}{2} \int_a^b \langle x(t), \dot{x}^\perp(t) \rangle dt =: F_x[a, b]
 \end{aligned}$$

Die Formel für das  $n$ -Eck war nur richtig, wenn die Summe zyklisch zu verstehen war. Das gilt auch für das Integral. Die Formel stimmt nur, wenn  $x(a) = x(b)$  gilt. Nur dann ist die Kurve geschlossen und man kann von Flächeninhalt sprechen.

Der Flächeninhalt hängt nicht von der Parametrisierung ab.

Das entspricht der Formel für die Fläche eines Dreiecks, gebildet aus den beiden Vektoren  $a$  und  $b$ .

$$2S = \langle a, b^\perp \rangle = \langle b, a^\perp \rangle = \langle a, (b - a)^\perp \rangle$$

Der Flächeninhalt einer Figur ist stets das Produkt des Randes mit einer senkrecht dazu stehenden Größe, wenn man ausreichend frei diese Begriffe definiert. So bedeutet die bekannte Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks  $2S = (a + b + c)r$ , daß  $2S$  das Produkt aus dem Rand (der Umfang  $a + b + c$ ) und dem “senkrecht darauf stehenden” Inkreisradius  $r$  ist.

### 6.3 Klassische Beispiele aus der Variationsrechnung

In der Variationsrechnung werden Funktionen gesucht, die gewissen Funktionalen einen Extremwert (Minimumproblem) zuordnen.

Die **Aufgabe:** Wir nehmen an, daß eine Kurve  $x_0(t)$  folgende Eigenschaften hat:

- 1)  $x_0(t)$  beschreibt das Verhalten eines physikalischen Systems, etwa als Trajektorie.
- 2) Es existiert ein Funktional  $\Phi$  auf einer geeignet gewählten Menge von Trajektorien  $K$  derart, daß

$$\Phi[x_0] = \min_{x \in K} \Phi[x]$$

Im weiteren betrachten wir als Menge  $K$  die Menge

$$K = \{x : I \rightarrow \mathcal{X} \mid x(t) \text{ ist ausreichend glatt, } x(a) = x_a, x(b) = x_b\}$$

also die Menge aller ausreichend glatten Kurven mit vorgegebenen Randwerten. Diese Menge werden wir bei Bedarf weiter einschränken.

Im allgemeinen stellen sich zwei Fragen:

- 1) Was ist  $\Phi_0 = \min_{x \in K} \Phi[x]?$
- 2) Existiert ein  $x_0$  mit  $\Phi[x_0] = \Phi_0$ ?

Hat man eine derartige Trajektorie  $x_0$  gefunden, fragt es sich, ob man ihr einen physikalischen Sinn geben kann.

Ein einfaches Problem dieser Art wäre folgendes: Es sei  $F : \mathcal{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein gegebenes Funktional auf  $\mathcal{X}$ . Wir definieren  $\Phi$  als

$$\Phi[x] = \int_a^b F(x(t)) dt$$

Man stellt schnell fest, daß so ein Problem nicht besonders interessant ist. Jedes physikalisch sinnvolle Funktional sollte die Geschwindigkeit als Variable enthalten. Das ist erstaunlich, da es viele interessante und sinnvolle stationäre Probleme gibt, für die der physikalische Begriff der Geschwindigkeit gar keinen Sinn hat.

Für reale zeitabhängige Probleme ist das Vorhandensein der Geschwindigkeit im Funktional ein Zeichen dafür, daß ein reales physikalisches System eine Trägheit besitzt. Es muß gegen diese Trägheit arbeiten, d.h. mit Mühe Geschwindigkeit aufbauen. Der Grund für die Trägheit ist die Masse – genauer die träge Masse.

Nur ein System ohne Masse kann Sprünge machen. Vielleicht gibt es solche Systeme, aber wir können ihre Bewegung nicht beobachten. Wir wissen nicht, wie wir eine unstetige Trajektorie mit kontinuierlicher Zeit beschreiben können.

Wir betrachten im weiteren folgende Standardaufgabe: Es sei  $L : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}$  ein gegebenes Funktional. Die Variable  $x$  wird die Rolle des Ortes und  $y$  die Rolle der Geschwindigkeit spielen. Oft wird für  $\mathcal{X}$  eine Mannigfaltigkeit betrachtet. Dann ist  $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$  das Tangentialraumbündel. Wir betrachten hier nur affine Räume  $\mathcal{X}$ . Dann können wir  $\mathcal{X}$  und  $\mathcal{Y}$  identifizieren.

Wir betrachten Funktionale der Form

$$\Phi[x] = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

und suchen ihr Minimum.

### 6.3.1 Der kürzeste Weg. Das Fermatsche Prinzip

Die vermutlich typischste Variationsaufgabe ist die Suche nach dem kürzesten Weg zwischen zwei gegebenen Punkten  $x_a$  und  $x_b$ . Unter Benutzung der bekannten Formeln führt das auf das Funktional

$$\Phi[x] = \int_a^b v(t) dt = \int_a^b \|\dot{x}(t)\| dt$$

Ohne diese Aufgabe lösen, wissen wir, daß wegen der Dreiecksungleichung im normierten Raum der kürzeste Weg die Gerade

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \frac{b-t}{b-a} x_a + \frac{t-a}{b-a} x_b = \frac{x_a}{b-a} \frac{b-x_b}{b-a} + \frac{x_b}{b-a} t \\ \dot{x}_0(t) &= \frac{x_b - x_a}{b-a} \end{aligned}$$

Die Frage nach dem kürzeste Weg führt auf eine Kurve mit konstanter Geschwindigkeit. Und umgekehrt, die Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit führt auf eine geradlinige Bewegung (geradlinig gleichförmige Bewegung).

Interessanterweise liefert die Minimisierung jedes Funktionals der Form

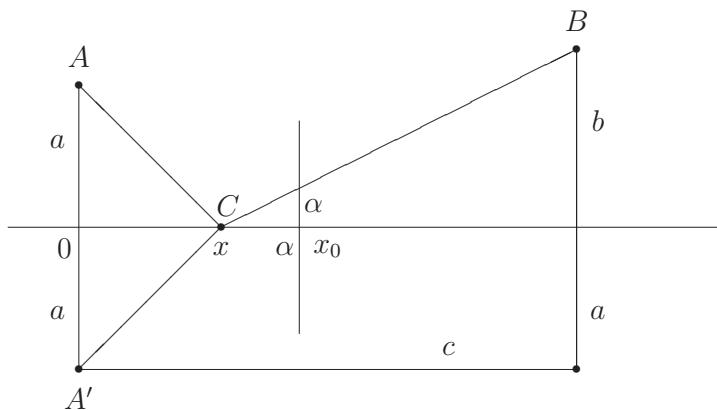
$$\Phi[x] = \int_a^b F(\dot{x}(t)) dt$$

wobei  $F$  eine konvexe Funktion ist, eine Gerade als Lösung. Das lässt sich einfach mit der Jenseischen Ungleichung zeigen. Es gilt

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b F(\dot{x}(t)) dt \geq F\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \dot{x} dt\right) = F\left(\frac{x_b - x_a}{b-a}\right)$$

Das Minimum wird angenommen für  $\dot{x}_0(t) = \frac{x_b - x_a}{b - a}$ , also wenn die Geschwindigkeit konstant und gleich der mittleren ist.

Das Wissen, daß die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist, kann man nutzen um den kürzesten Weg unter einfachen Nebenbedingungen zu finden. Gesucht ist der kürzeste Weg von  $A$  nach  $B$ , der eine gegebene Gerade berührt.



Man kann die Lösung finden, indem man den Punkt  $A$  an der Gerade spiegelt. Es ergibt sich als Lösung der Punkt  $x_0$  auf der Geraden, für den die Strecken  $AC_{x_0}$  und  $C_{x_0}B$  gleiche Winkel mit dem Lot auf der Geraden bilden:  $\angle AC_{x_0} = \angle C_{x_0}B$ . Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$s(x) = \overline{AC_x} + \overline{C_xB} = \overline{A'C_x} + \overline{C_xB} \geq \overline{A'B} = \overline{A'C_{x_0}} + \overline{C_{x_0}B} = s(x_0)$$

Auf diese Weise haben wir das Reflexionsgesetz entdeckt (Einfallwinkel = Ausfallwinkel). Im homogenen Medium wählt Licht den kürzesten Weg.

**ÜA** Im Inneren eines Winkels mit gegebenen Schenkeln seien zwei Punkte gegeben. Finde den kürzeste Weg von einem Punkt zum anderen derart, daß jeder der beiden Schenkel genau einmal berührt wird.

**ÜA** Finde den kürzeste Weg in einem gegebenen spitzwinkligen Dreieck, der alle drei Seiten genau einmal berührt. Oder mit anderen Worten: Suche in einem Dreieck mit innen spiegelnden Wänden einen geschlossenen Lichtweg, der an jeder Dreiecksseite einmal reflektiert wird.

Aus der Lichtbrechung ist bekannt, daß im allgemeinen Licht nicht den kürzesten Weg zurücklegt. Das ist nur in homogenen Medien der Fall. Fermat stellte 1655 die Vermutung auf, daß die verbrauchte Zeit (im homogenen Medium ist das äquivalent) minimiert.

Diese Vermutung heißt Prinzip der kürzesten Zeit oder **Fermatsches Prinzip**.

Angenommen, die Geschwindigkeit (genauer, das Tempo) des Lichts ist in einem (inhomogenen) Medium eine Funktion des Ortes  $V(x)$ . Dann beschreibt das Funktional

$$\Phi[x] = \int_a^b \frac{\|\dot{x}(t)\|}{V(x(t))} dt$$

die benötigte Zeit.

Das Fermatsche Prinzip ist das erste globale Prinzip. Es stellt fest, wie sich die Natur global zu verhalten hat. Das widersprach der intuitiven Vorgehensweise des Menschen, einen geeigneten Weg zu finden. „Das Licht fliegt erst dann los, wenn es weiß, auf welchem Weg es die kürzeste Zeit zum Ziel benötigt.“ Die Erkenntnis, daß es auf die Geschwindigkeit des Lichts im Medium ankommt, ist um so erstaunlicher, da die Lichtgeschwindigkeit erstmals 1676/78 gemessen und als endlich erkannt wurde.

Häufig wird gesagt, daß Fermat mit seinem Prinzip das **Brechungsgesetz** begründen konnte. Ohne eine Ahnung von der Lichtgeschwindigkeit zu haben ist das natürlich schwer. Die Vermutung, daß die Lichtgeschwindigkeit endlich ist, steckt natürlich im Fermatschen Prinzip mit drin.

Vermutlich hat Fermat erkannt, daß das Brechungsgesetz auch bei der Bewegung von Objekten mit kleinen Geschwindigkeiten gilt. Dann lag der Schluß nahe, daß das Licht analoges Verhalten zeigt und die Lichtgeschwindigkeit somit endlich sein muß.

Das Brechungsgesetz wurde auch 1621 von Snell (Snellius) und 1637 von Dekartes aufgestellt.

In modernen Bezeichnungen Weise kann man das Brechungsgesetz folgendermaßen herleiten: Die  $x$ -Achse stelle die Grenze zweier optischer Medien dar. Welchen Weg nimmt ein Lichtstrahl vom Punkt  $(0, a)$  zum Punkt  $(c, -b)$  um dum Durchlaufen dieser Entfernung eine möglichst kurze Zeit zu benötigen? Es seien  $a, b, c > 0$ .

Wir bezeichnen Einfallswinkel mit  $\alpha$  und Ausfallwinkel mit  $\beta$  (gemessen vom Lot aus). Dann ist die gebrauchte Zeit

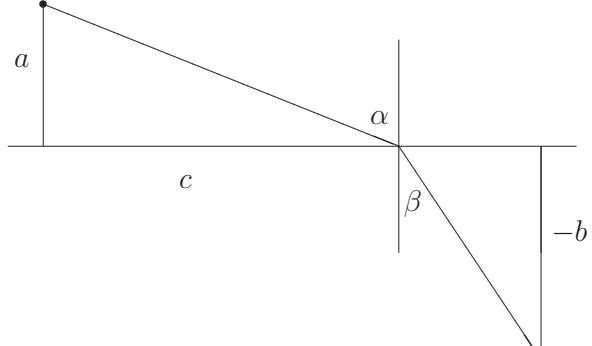
$$T(\alpha, \beta) = \frac{a}{v_1 \cos \alpha} + \frac{b}{v_2 \cos \beta}$$

Die Nebenbedingung (der Punkt mit der  $x$ -Koordinate  $c$  soll getroffen werden) ist  $a \tan \alpha + b \tan \beta = c$ . Das führt auf folgenden Lagrangian:

$$L(\alpha, \beta, \lambda) = \frac{a}{v_1 \cos \alpha} + \frac{b}{v_2 \cos \beta} - \lambda(a \tan \alpha + b \tan \beta - c)$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \alpha} &= -\frac{a}{v_1 \cos^2 \alpha} - \lambda a \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \beta} &= -\frac{b}{v_2 \cos^2 \beta} - \lambda b \frac{1}{\cos^2 \beta} = 0 \\ \implies -\lambda &= \frac{\sin \alpha}{v_1}, \quad -\lambda = \frac{\sin \beta}{v_2} \end{aligned}$$



Das ergibt schließlich das Brechungsgesetz

$$-\lambda = \frac{\sin \alpha}{v_1} = \frac{\sin \beta}{v_2} \implies \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$$

Die speziellen Werte für  $\alpha$  und  $\beta$  als Funktionen von  $a$  und  $b$  und den Geschwindigkeiten  $v_i$  könnte man berechnen interessieren aber eigentlich nicht. Wir haben mit der Methode ein universelles Gesetz gefunden, in der zwei Größen, die sich als gleich herausstellen, eingehen,  $\frac{v_1}{v_2}$  als Verhältnis der Eingabegrößen und  $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$  als zu bestimmendes Verhältnis. Diese Größe ist gerade  $-\lambda$ . Das ist die physikalische Bedeutung des Lagrangemultiplikators.

### 6.3.2 Die Brachistochrone

Eine weitere typische Variatinsaufgabe, die als Geburtsstunde der Variantionsrechnung zählt ist das Brachistochronenproblem.

Die Brachistochrone (gr. brachistos kürzeste, chronos Zeit) ist eine reibungsfreie Bahn zwischen einem Anfangs- und einem Endpunkt, auf der ein Massenpunkt unter dem Einfluss der Gravitationskraft am schnellsten zum Endpunkt gleitet.

Gesucht ist also eine Kurve  $y(x)$ , die das schon bekannte Zeitfunktional

$$T_y[x_0, x_1] = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\|\dot{y}(x)\|}{V(y(x))} dx$$

minimiert. Diese Aufgabe kann nicht durch gerade Linienzüge gelöst werden. Wir müssen die Größen unterm Integral tatsächlich bestimmen.

Es ist  $\|\dot{y}(x)\| = \sqrt{1 + \dot{y}^2(x)}$ . Die Geschwindigkeit erhalten wir aus dem Energieerhaltungssatz.  
Es ist  $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ . Hieraus folgt ( $y_0$  ist ein festgelegter oberer Punkt)

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g(y_0 - y(x))}$$

Damit erhält man folgendes zu minimierendes Funktional:

$$T_y[x_0, x_1] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{\frac{1 + \dot{y}^2(x)}{2g(y_0 - y(x))}} dx$$

Es stellt sich heraus, daß eine weitere Variationsaufgabe dieselbe Lösung hat, das

**Tautochronenproblem:** Gesucht ist eine Kurve, für die man von jedem Punkt der Kurve die gleiche Zeit benötigt, um zum Tiefpunkt zu gelangen.

### 6.3.3 Die Kettenlinie

Eine weitere klassische Aufgabe der Variationsrechnung ist die folgende: *Welche Form nimmt eine ideale, frei hängende Kette in Ruhe ein.* Die hierbei gesuchte Kurve wird Kettenlinie genannt.

Ausgangspunkt für das Aufstellen eines geeigneten Funktionalen ist das Prinzip der kleinsten potentiellen Energie. Die Idee besteht also darin, für eine beliebige Lage einer idealen Kette die potentielle Energie zu bestimmen und diese über alle möglichen Kurven  $y(x)$  zu minimieren. Dabei sind die Aufhängpunkte  $(a, y(a))$  und  $(b, y(b))$  gegeben. Das sind aber nicht die einzigen zu stellenden Bedingungen. Es ist klar, daß eine beliebig elastische Kette "ins bodenlose" fällt. Es ist über die Elastizität der Kette deshalb eine Aussage zu treffen. Wir nehmen an, daß die Kette zwar beliebig biegsam ist, aber eine festgelegte Länge  $L$  habe. Außerdem sei die Kette ein "Seil" aus homogenem Material mit Dichte  $\varrho$  besteht und einen konstanten Querschnitt  $A$  habe. Damit die Aufgabe überhaupt einen Sinn hat ist  $L^2 \geq (b - a)^2 + (y^2(b) - y^2(a))$  zu fordern.

Als nächstes müssen wir die potentielle Energie der Kette bestimmen. Wir nehmen dazu an, daß die Kette aus kleinen Zylindern der Länge  $L_i = s_{i+1} - s_i$ , die sich im Punkt  $(x_i, y(x_i))$  befinden, bestehe. Die potentielle Energie so eines Zylinders ist dann  $E(x_i) = gmh = g(\varrho A L_i) y_i(x_i)$ .

Damit erhalten wir für die Gesamtenergie

$$\begin{aligned} E[y] &= \sum_{i=1}^n g\varrho A L_i y_i(x_i) = g\varrho A \sum_{i=1}^n g\varrho A y_i(x_i)(s_{i+1} - s_i) = \\ &= g\varrho A \sum_{i=1}^n y(x_i) \sqrt{(y(x_{i+1}) - y(x_i))^2 + (x_{i+1} - x_i)^2} = \\ &= g\varrho A \sum_{i=1}^n y(x_i) \sqrt{(y(x_{i+1}) - y(x_i))^2 + (x_{i+1} - x_i)^2} \end{aligned}$$

Nach Grenzübergang erhalten wir das Energiefunktional

$$E[y] = g\varrho A \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

Dieses Funktional muß unter der Nebenbedingung  $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = L$  minimiert werden.  
**Alternativer Zugang**

Es ist das Energiefunktional

$$E[y] = \frac{c}{2} \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = L$$

zu minimieren. Man kann den Lagrangemultiplikator so einführen, daß das Problem auf die Lagrangefunktion

$$L = \frac{c}{2} \int_a^b (y(x) - y_0) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$$

führt und damit aus die ELE

$$(y - y_0)y'' - y'^2 = 1$$

Die Lösung ist

$$y(x) = a \cosh \left( \frac{x - x_0}{a} \right) + y_0$$

### 6.3.4 Ein isoperimetrisches Problem

Geschlossenen, periodisch parametrisierten und ausreichend glatten Kurven  $\gamma(t)$  im  $\mathbb{R}^2$  kann man eine Kurvenlänge  $L(\gamma)$  und einen Flächeninhalt  $F(\gamma)$  der umschlossenen Fläche zuordnen. Das isoperimetrische Problem besteht darin, die Kurve zu finden die bei gegebener Länge (iso-perimeter)  $L(\gamma)$  den größten Flächeninhalt  $F(\gamma)$  einschließt.

Allgemeiner ist dieses Problem als **isoperimetrische Ungleichung** bekannt. Im  $\mathbb{R}^2$  gilt für alle Kurven

$$L(\gamma)^2 \geq 4\pi F(\gamma)$$

Offensichtlich gilt für den Kreis  $\gamma = k$  Gleichheit  $L(k)^2 = 4\pi F(k)$  hieraus und aus der Ungleichung folgen die Ungleichungen

- $L(\gamma) \geq L(k)$  für  $F(\gamma) = F(k)$ : Unter allen Kurven mit gegebenem Flächeninhalt hat der Kreis die kürzeste Länge.
- $F(\gamma) \leq F(k)$  für  $L(\gamma) \geq L(k)$ : Unter allen Kurven mit gegebener Länge hat der Kreis den größten Flächeninhalt (isoperimetrisches Problem)

Diese Aufgabe gibt es analog in jeder Dimension als Ungleichung zwischen dem  $n$ -Volumen und der  $(n-1)$ -Oberfläche eines Körpers.

Dazu folgende

**ÜA:** Auf  $[0, 1]$  ist die glatte Kurven  $x(t)$  gesucht, die die kürzeste Länge hat, in den Punkten  $x(0) = a$  und  $x(1) = b$  festgelegt ist und einen gegebenen Flächeninhalt mit der  $x$ -Achse und den Geraden  $x = 0$  und  $x = 1$  einschließt. D.h., gesucht ist eine Lösung des Problems

$$\min_{x(t)} \int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt, \quad x(0) = a, \quad x(1) = b, \quad \int_0^1 x(t) dt = A$$

Insbesondere ist die Form der Kurve und die physikalische Bedeutung des Lagrange-Multiplikators gesucht.

**Lösung:** Die Lagrangefunktion für das Problem ist

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt + \lambda \left( \int_0^1 x(t) dt - A \right)$$

Die entsprechende ELE ist

$$\lambda = \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}}$$

Hieraus folgt mit einer Integrationskonstanten  $c$

$$\lambda t = \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}} + c \quad \text{oder} \quad \dot{x}(t) = \frac{\lambda t - c}{\sqrt{1 - (\lambda t - c)^2}}$$

Nochmaliges Integrieren mit einer Integrationskonstanten  $d$  führt auf

$$x(t) = -\frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda t - c)^2} + d$$

oder  $(\lambda t - c)^2 + (\lambda x - d)^2 = 1$  oder

$$\left(t - \frac{c}{\lambda}\right)^2 + \left(x - \frac{d}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Dieser Ausdruck enthält drei Parameter  $c, d, \lambda$ , die man im Prinzip aus den Nebenbedingungen als Funktion von  $a, b, A$  bestimmen kann. Fürs Verständnis ist das aber nicht notwendig. Die Lösung beschreibt den Bogen eines Kreises mit Radius  $1/\lambda$ , dessen Mittelpunkt die Koordinaten  $(t_c, x_c) = (c/\lambda, d/\lambda)$  hat.

Wie im Falle des Brechungsgesetzes erhalten wir ohne exakte Bestimmung der Parameter der Aufgabe bereits eine qualitative Lösung, eine Art ‘‘Naturgesetz’’: Der Kreis (oder Teile davon) bilden eine Figur mit maximalem Umfang bei gegebenem Flächeninhalt.

### 6.3.5 Gromovs Beweis der isoperimetrischen Ungleichung

Ohne auf die konkrete Bedeutung der Symbolik einzugehen, fügen wir hier einen Beweis der isoperimetrischen Ungleichung im  $\mathbb{R}^n$  von Mikhail Gromov an.  $\mathcal{H}^{n-1}$  bezeichnet hier das Hausdorffmaß, soetwas wie der  $(n-1)$ -dim Flächeninhalt der Oberfläche einer geeigneten Menge im  $\mathbb{R}^n$ .

Es sei  $B$  die Einheitskugel in  $\mathbb{R}^n$  und  $M \in \mathbb{R}^n$  eine Menge mit  $\text{vol}(M) = \text{vol}(B)$ . Dann gilt  $\mathcal{H}^{n-1}(\partial M) \geq \mathcal{H}^{n-1}(\partial B)$ .

Wir beweisen diese Ungleichung mit optimal transport theory (siehe R. McCann, N. Guillen. Five lectures on optimal transportation: Geometry, regularity and applications). Es seien  $f = \chi_M$  und  $g = \chi_B$  die Dichten der Maße  $p$  und  $q$  (Gleichverteilungen), die aufeinander transportiert werden. Es sei  $T = \nabla u$  die optimal map. Wegen der Volumenerhaltung, gilt  $\det DT(x) = \det D^2u(x) = 1$ , wobei  $D^2u(x)$  die Hessematrix ist. Da  $u$  konvex ist, hat  $D^2u(x)$  positive reelle Eigenwerte  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ . Nach  $AM \geq GM$  gilt

$$1 = \sqrt[n]{\det D^2u} = \sqrt[n]{\lambda_1 \cdots \lambda_n} \leq \frac{1}{n}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n) = \frac{1}{n} \Delta u$$

Außerdem folgt aus der Volumenerhaltung  $|Du| \leq 1$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} vol(B) &= vol(M) = \int_M 1 dx \leq \dots \leq \frac{1}{n} \int_M \Delta u dx = \\ &= \frac{1}{n} \int_{\partial M} \langle Du, n \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x) \leq \frac{1}{n} \int_{\partial M} |Du| d\mathcal{H}^{n-1}(x) \leq \frac{1}{n} \int_{\partial M} 1 d\mathcal{H}^{n-1}(x) = \\ &= \frac{1}{n} \mathcal{H}^{n-1}(\partial M) \end{aligned}$$

Das heißt, es gilt

$$vol(B) \leq \frac{1}{n} \mathcal{H}^{n-1}(\partial M)$$

Andererseits gilt für  $M = B$  überall Gleichheit und somit

$$vol(B) = \frac{1}{n} \mathcal{H}^{n-1}(\partial B)$$

Hieraus folgt die Behauptung.

### 6.3.6 Minimalflächen

## 6.4 Die Euler-(Lagrange-)Gleichung

Im weiteren leiten wir eine notwendige Bedingung für Extremwerte von Funktionalen des vorgestellten Typs her. Alle Funktionale aus den Beispielen hatten die Form

$$\Phi[x] = \int_a^b F(x(t), \dot{x}(t), t) dt, \quad x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b$$

Interessant ist hier, daß die Beispiele “kürzester Weg” und “Kettenlinie” stationäre Probleme beschreiben, die entsprechenden Funktionale aber von  $\dot{x}(t)$ , also einer “Geschwindigkeit”, abhängen. Das ist ein Indiz dafür, daß  $\dot{x}(t)$  möglicherweise nicht das ist, was man sich in der Physik normalerweise als Geschwindigkeit vorstellt, nämlich “zurückgelegter Weg durch Dauer der Bewegung”.

Des weiteren benutzte Johann Bernoulli zur expliziten Lösung des Brachistochronenproblems eine Parametrisierung der Lösungskurve durch einen neuen Zeitparameter, nämlich den Drehwinkel des Kreises, der die Lösung – Cycloide – erzeugt.

Die erwähnte notwendige Bedingung für das Extremum von  $\Phi[x]$  wird genauso hergeleitet, wie in der Analysis die Bedingung  $f'(x_0) = 0$  aus der Annahme  $f(x_0) = \min_x f(x)$  hergeleitet wird. Die Gleichung  $f'(x_0) = 0$  folgt aus der Annahme, daß für alle  $x$  in der Nähe von  $x_0$  die Ungleichung  $f(x_0) \leq f(x)$  gilt. Der Unterschied besteht nur darin, daß wir alle ausreichend glatten Kurven  $x(t)$  in der Nähe von  $x_0(t)$  betrachten müssen, die durch die Punkte  $(a, x_a)$  und  $(b, x_b)$  gehen. Die extreme Lösung wird “variiert”, woher der Name “Variationsrechnung” kommt.

Die gesuchte notwendige Bedingung heißt **Euler-Gleichung** oder **Euler-Lagrange-Gleichung** des betrachteten Extremalproblems. Ursprünglich wurde die Gleichung von Euler hergeleitet, sodaß für die allgemeine Gleichung eigentlich nur der Name Euler zu verwenden wäre. Für dynamische Probleme wurde sie erstmals von Lagrange benutzt.

### 6.4.1 Die Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichung

Es sei

$$\Phi[x_0] = \min_{x \in K} \Phi[x] = \min_{x \in K} \int_a^b F[x(t), \dot{x}(t), t] dt$$

mit

$$K = \{x : I \rightarrow \mathcal{X} \mid x(t) \text{ ist ausreichend glatt, } x(a) = x_a, x(b) = x_b\}$$

Wir betrachten  $x(t) = x_0(t) + \varepsilon h(t)$  mit einem reellen  $\varepsilon$  und einem ausreichend glatten  $h(t)$  mit  $h(a) = h(b) = 0$ . Es ist klar, daß dann  $x(t)$  aus der Menge  $K$  ist und es gilt nach Voraussetzung

$$\Phi[x_0] \leq \Phi[x], \quad \forall \varepsilon \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{X}$$

Es sei

$$g(\varepsilon) = \int_a^b F[x(t), \dot{x}(t), t] dt = \int_a^b F[x_0(t) + \varepsilon h(t), \dot{x}_0(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t] dt$$

Die Funktion  $g(\varepsilon)$  ist eine Funktion einer reellen Veränderlichen, die nach Voraussetzung für  $\varepsilon = 0$  ihr Minimum annimmt:  $g(\varepsilon) \geq g(0) = \Phi[x_0]$ .

Wir nehmen an, daß  $g'(0) = 0$  gilt und leiten hieraus formal eine Beziehung für  $F$  her und untersuchen im Anschluß, wann diese formale Herleitung gerechtfertigt ist.

Es sei im weiteren  $\varepsilon \geq 0$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{d\varepsilon}g(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=+0} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_a^b F[x_0(t) + \varepsilon h(t), \dot{x}_0(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t] dt \Big|_{\varepsilon=+0} = \\
 &= \left( \int_a^b \left\langle h(t), \partial_1 F[x_0(t) + \varepsilon h(t), \dot{x}_0(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t] \right\rangle dt \Big|_{\varepsilon=+0} + \right. \\
 &+ \left. \int_a^b \left\langle \dot{h}(t), \partial_2 F[x_0(t) + \varepsilon h(t), \dot{x}_0(t) + \varepsilon \dot{h}(t), t] \right\rangle dt \Big|_{\varepsilon=+0} \right) = \\
 &= \int_a^b \left( \left\langle h(t), \partial_1 F[x_0(t), \dot{x}_0(t), t] \right\rangle + \left\langle \dot{h}(t), \partial_2 F[x_0(t), \dot{x}_0(t), t] \right\rangle \right) dt = \\
 &= \int_a^b \left\langle h(t), \left( \partial_1 F[x_0(t), \dot{x}_0(t), t] - \frac{d}{dt} \partial_2 F[x_0(t), \dot{x}_0(t), t] \right) \right\rangle dt
 \end{aligned} \tag{52}$$

Hier bei sind  $\partial_1 F$  und  $\partial_2 F$  die Gateauxableitungen bezüglich des ersten bzw. zweiten Argumentes.

Im vorletzten Schritt wurde partiell intergriert und benutzt, daß  $h$  am Rand verschwindet. Unter der Annahme der Beliebigkeit von  $h$  folgt schließlich die Gleichung

$$\frac{d}{dt} \partial_2 F[x_0(t), \dot{x}_0(t), t] - \partial_1 F[x_0(t), \dot{x}_0(t), t] = 0$$

Diese Gleichung heißt Euler-Gleichung oder Euler-Lagrange-Gleichung.

Zum Beweis betrachten wir einige Lemmata. Insbesondere bemerken wir, daß die Vertauschbarkeit der Ableitung bezüglich  $\varepsilon$  mit dem Integral Voraussetzungen an  $F$  erfordert.

#### 6.4.2 Das Fundamentallemma und andere Lemmata

**Lemma:** Es seien  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$  Gateaux-diff.bar,  $x : [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$  stetig differenzierbar mit global beschränkter Norm. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} F[x(t)] = \langle \dot{x}(t), F'[x(t)] \rangle$$

**Beweis:** Das ist die Kettenregel für Ableitungen von Funktionen von Kurven. Die rechte Seite ist die Richtungsableitung von  $F$  bezüglich der Tangente an  $x(t)$ .  $\square$

**Lemma:** Es seien  $x(t)$  und  $x^*(t)$  stetig differenzierbar mit global beschränkter Norm. Dann gilt

$$\frac{d}{dt} \langle x(t), x^*(t) \rangle = \langle \dot{x}(t), x^*(t) \rangle + \langle x(t), \dot{x}^*(t) \rangle$$

**Beweis:** Ebenfalls Kettenregel. Aus der stetigen Differentierbarkeit und globalen Beschränktheit folgt, daß die reellwertige Funktion  $\langle x(t), x^*(t) \rangle$  stetig differenzierbar ist.  $\square$

**Lemma** (partielle Integration): Es seien  $x : [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$  und  $x^* : [a, b] \rightarrow \mathcal{X}^*$  stetig diff.bar. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \int_a^b \frac{d}{dt} \langle x(t), x^*(t) \rangle dt &= \langle x(b), x^*(b) \rangle - \langle x(a), x^*(a) \rangle = \\
 &= \int_a^b \langle \dot{x}(t), x^*(t) \rangle dt + \int_a^b \langle x(t), \dot{x}^*(t) \rangle dt
 \end{aligned}$$

**Beweis:** Mit  $x(t)$  und  $x^*(t)$  ist auch  $f(t) = \langle x(t), x^*(t) \rangle$  differenzierbar. Dann ist einerseits

$$\frac{d}{dt} \langle x(t), x^*(t) \rangle = \langle \dot{x}(t), x^*(t) \rangle + \langle x(t), \dot{x}^*(t) \rangle$$

und andererseits  $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$ . Hieraus folgt die Behauptung.  $\square$

Das **Fundamentallemma** (der Variationsrechnung)

Es sei  $h : [a, b] \rightarrow \mathcal{X}$  aureichend glatt und  $h(a) = h(b) = 0$ . Es sei  $x^*(t)$  eine stetige Familie von Elementen aus  $\mathcal{X}^*$  und

$$\int_a^b \langle h(t), x^*(t) \rangle dt = 0$$

für alle ... Dann ist  $x^*(t) \equiv 0$ .

**Beweis** (indirekt): Angenommen, für ein  $t_0$  sei  $x^*(t_0) \neq 0$ . Dann existiert ein  $y \in \mathcal{X}$  mit  $\langle y, x^*(t_0) \rangle = c > 0$ . Aus der Stetigkeit von  $x^*(t)$  folgt die vage Steigigkeit. Damit existiert ein  $\delta > 0$  mit  $\langle y, x^*(t) \rangle \geq c/2$  für alle  $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ . Es sei

$$h(t) = y \cdot \exp\left(-\frac{1}{\delta^2 - |t - t_0|}\right)$$

(außerhalb von  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  durch 0 fortgesetzt. dann ist  $\langle h(t), x^*(t) \rangle \geq c/2 \exp\left(-\frac{1}{\delta^2 - |t - t_0|}\right)$  und das obige Integral echt  $> 0$ . Das führt zum Widerspruch.  $\square$

**Bemerkung:** Die Voraussetzungen der (starken) Stetigkeit von  $x^*(t)$  sind im allgemeinen, insbesondere in  $\mathcal{C}^*$ , natürlich kaum zu gewährleiten. Abgeschwächtere Voraussetzungen sind möglich, führen aber in der Regel auch nur zur vagen Gleichung (52).

In der Praxis wird starke die Euler-Lagrange-Gleichung hauptsächlich in  $\mathbb{R}^n = \mathcal{C}^*(\{1, \dots, n\})$ , wobei alle Konvergenzen äquivalent sind.

### 6.4.3 Die Euler-Lagrange-Gleichung für bedingte Extremwerte

Analog lässt sich eine notwendige Bedingung für eine Extremwert Aufgabe mit Nebenbedingung herleiten. Es sei

$$\Phi[x_0] = \min_{x \in M} \Phi[x] = \min_{x \in M} \int_a^b F[x(t), \dot{x}(t), t] dt$$

mit

$$M = \left\{ x(t) \in \dots \mid x(a) = x_a, x(b) = x_b, \int_a^b G[x(t), \dot{x}(t), t] dt = c \right\}$$

Wir benutzen die Lagrangemethode und bilden dazu die Lagrangefunktion

$$L[x] = \min_{x \in M} \int_a^b F[x(t), \dot{x}(t), t] dt - \lambda \left( \int_a^b G[x(t), \dot{x}(t), t] dt - c \right)$$

mit

$$M_0 = \{x(t) \in \dots \mid x(a) = x_a, x(b) = x_b\}$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung für dieses Problem ist

$$\partial_1 \left( F[x_0(t), \dot{x}_0(t), t] - \lambda G[x(t), \dot{x}(t), t] \right) - \frac{d}{dt} \partial_2 \left( F[x_0(t), \dot{x}_0(t), t] - \lambda G[x(t), \dot{x}(t), t] \right) = 0$$