15 Aufgaben

15.1 Verschiedenes

15.1.1 Bewegung mit Gegen- und Rückenwind

Diese Aufgabe ist ein Beispiel, bei dem die Geschwindigkeit additiv auftritt.
Aufgabe: Ein Fahrzeug legt die Strecke L hin und zurück mit der Geschwindigkeit v zurück. Wie ändert sich die benötigte Zeit, wenn Gegen- und Rückenwind mit einer Geschwindigkeit v_0 herrscht.
Lösung: Wir nehmen an, daß die Geschwindigkeit mit Wind $v \pm v_0$ beträgt. Dann ist der Zeitunterschied

$$\Delta T = \frac{L}{v+v_0} + \frac{L}{v-v_0} - \frac{2L}{v} = \frac{2v_0^2 L}{v(v^2-v_0^2)} \geq 0$$

Ausführliche Lösung: Es seien
v_1 Windgeschwindigkeit
$v_2 > v_1$ Fahrzeuggeschwindigkeit.
Wir teilen den Gesamtweg (extensive Größe) L in zwei Teile auf: Den Weg des Fahrzeuges und den Weg des Windes

$$\begin{aligned} L &= L_{r_2} + L_{r_1} \qquad \text{(mit Rückenwind)} \\ &= L_{g_2} - L_{g_1} \qquad \text{(mit Gegenwind)} \end{aligned}$$

Die Zerlegung in zwei Wege – die sich eigentlich instantan vollzieht, d.h., zu jedem Zeit- oder Ortspunkt gibt es zwei Wegesanteile –, kann man sich so plausibel machen:
Es ist klar, daß ich mit Rückenwind weniger Zeit brauche. Ohne Wind hätte ich in dieser kürzeren Zeit einen kürzeren Weg zurückgelegt. Die Differenz ist gerade der “Weg des Windes”.
Wir gehen über zu Zeiten und Geschwindigkeiten:
S ... sei die Zeit ohne Wind
A ... sei die Zeit mit Rückenwind
B ... sei die Zeit mit Gegenwind
Das ergibt

$$\begin{aligned} Sv_2 &= Av_2 + Av_1 \\ &= Bv_2 - Bv_1 \end{aligned}$$

Es sei A und B gegeben und S gesucht. Es sei $x = v_1/v_2$ das Verhältnis der Geschwindigkeiten. Wir erhalten

$$\begin{aligned} Av_2 + Av_1 &= Bv_2 - Bv_1 \\ A(1+x) &= B(1-x) \end{aligned}$$

Das ergibt

$$x = \frac{B-A}{B+A}$$

und damit

$$S = A(1+x) = A\left(1 + \frac{B-A}{B+A}\right) = \frac{2AB}{A+B}$$

oder

$$\frac{2}{S} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B}$$

Das ist das harmonische Mittel. Es ist kleiner als das arithmetische:

$$\frac{A+B}{2} - \frac{2AB}{A+B} = \frac{(A-B)^2}{2(A+B)}$$

-
- Die Aufgabe zeigt, daß Wind immer schlechter ist als kein Wind, wenn man ihn als Gegen- und Rückenwind in Kauf nehmen muß.
- Die Frage, ob man mehr oder weniger Zeit braucht, kann man leicht klären, wenn man Extremfälle betrachtet, etwa $v_0 = v$, dann braucht man mit Gegenwind ∞ lange, oder $v_0 = v/2$, dann braucht man für die eine Richtung mit Gegenwind schon allein solange wie für hin und zurück ohne Wind.
- Man kann sich auch klar machen, daß man mehr Zeit braucht, weil man längere Zeit für die Strecke mit Gegenwind als für die mit Rückenwind braucht. Dadurch fällt die Gegenwind-Strecke mehr ins Gewicht.

15.1.2 Rolltreppe

Aufgabe: Wenn Max die Rolltreppe hinaufgeht, zählt er 15 Stufen. Wenn er die Rolltreppe gegen die Fahrtrichtung hinabsteigt, sind es 35 Stufen. Wieviel (sichtbare) Stufen hat die Rolltreppe, wenn sie steht?

15.1.3 Basketball

Ein Basketballer trainiert Korbwürfe und ermittelt nach jedem Wurf seine Trefferquote (Treffer geteilt durch Gesamtwurfzahl in Prozent). Zu einem Zeitpunkt ist die Trefferquote etwa 85%. Nach weiterem Training ist die Trefferquote etwa 93%. Beweise, daß es einen Zeitpunkt gab, bei dem die Trefferquote exakt 90% betrug.
Zusatz: Beweise, daß alle Trefferquoten (als Quotient, nicht in Prozent) der Form $1/k$ und $(k-1)/k$ mit ganzzahligem $k > 1$ bei jedem Trainingsverlauf als Zwischenwerte exakt angenommen werden.
Bemerkung: Für alle anderen Trefferquoten kann man Trainingsverläufe finden, die die Quoten nicht exakt erreichen.

15.2 Bilanzgleichungen

15.2.1 Bilanzgleichung in Komponentenform

Es sei $\mathcal{X} = \mathbb{R}_n$, $\mathcal{Y} = \mathbb{R}_m$ mit $m = \binom{n}{2}$, $h, g \in \mathcal{X}$, $U \in \mathcal{Y}$. Wir indizieren $\mathcal{X}$ mit $i = 1, ..., n$ und $\mathcal{Y}$ mit (ij) mit $1 \leq < j \leq n$. $\mathbf{Q}_U : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}^*$ sei ein Diagonaloperator.
Beweise, daß

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} U_{ij}(h_i - h_j)(g_i - g_j) = \sum_{i=1}^{n} g_i \left(\sum_{j=1}^{n} U_{ij}(h_i - h_j) \right)$$

unter der Annahme $U_{ij} = U_{ji}$.

15.2.2 2 Töpfe und 1 Schlauch

Löse folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -a(h_1 - h_2) = -a \left(\frac{V_1}{S_1} - \frac{V_2}{S_2} \right) \\ \dot{V}_2 &= a(h_1 - h_2) = a \left(\frac{V_1}{S_1} - \frac{V_2}{S_2} \right) \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten: $V_1(0) = V_1^0$, $V_2(0) = V_2^0$ und gegebenen Parametern S_1, S_2 (Grundflächen, $V_i = h_i S_i$).
Gesucht ist eine besonders schöne Form der Lösungsdarstellung, die das Wesen der Aufgabe gut beschreibt.

15.3 Konvexe Analysis

15.3.1 Jensen + Young $\Longrightarrow$ Chebyshev

Chebyshevsche Ungleichung: Es seien $x = (x_i)$ und $y = (y_i)$ monoton wachsende Vektoren (d.h., $x_i \leq x_j$ und $y_i \leq y_j$ für $i < j$), und $q = (q_i)$ Gewichte (positiv mit Summe 1). Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} q_i x_i y_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} q_i y_i\right)$$

Beweise die Chebyshevsche Ungleichung auf zwei Weisen:
1) Als Folge der Jensenschen und Youngschen Ungleichungen
2) Auf direktem Weg durch Herleitung einer Identität, die die Ungleichung offensichtlich macht, d.h., leite eine Identität der Form

$$\sum_{i=1}^{n} q_i x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} q_i y_i\right) = \ldots$$

her, bei der auf der rechten Seite eine offensichtlich positive Größe steht.

15.3.2 Legendretransformation unter linearen Abbildungen

Es sei $F : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ ein konvexes Funktional, $\mathbf{D} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}^*$ ein linearer Operator und $G : \mathcal{Y}^* \to \mathbb{R}$ ein Funktional das definiert ist als

$$G(y^*) = \inf_{\{x \in \mathcal{X} : \mathbf{D}x = y^*\}} F(x)$$

Berechne die Legendretransformation $G^*(y)$.

15.3.3 Eine spezielle Sattelfunktion

Es seien a, b, p, q auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktionen mit folgenden Eigenschaften: $\min_x a(x) > -\infty$, $\max_y b(y) < \infty$ und $p(x) \geq 0$, $q(y) \geq 0$.
ÜA: Beweise, daß

$$L(x, y) = \frac{a(x) + b(y)}{p(x) + q(y)}$$

eine Sattelfunktion ist.

15.3.4 Eine Verallgemeinerung der Jensenschen Ungleichung

Die Jensensche Ungleichung

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} q_i f(x_i) \geq f(x_0) = f\left(\sum\nolimits_{i=1}^{n} q_i x_i\right)$$

mit $x_0 = \sum_{i=1}^{n} q_i x_i$ ist für $n = 2$ die Definition der Konvexität. Damit ist sie zur Konvexität äquivalent. D.h., eine Funktion, die die Jensenschen Ungleichung erfüllt muß konvex sein. Diese Aussage gilt aber nur, wenn die Jensenschen Ungleichung für beliebige Stützstellen gilt. Hält man den Mittelwert x_0 fest, kann die Jensensche Ungleichung auch für nichtkonvexe Funktionen gelten, wie das folgende Beispiel zeigt:

ÜA: Für welche n und a gilt die Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1-x_j^a} \geq \frac{n^{a+1}}{n^a-1}$$

mit $x_1 + ... + x_n = 1$, $x_i \in [0, 1)$.