# 15 Mathematische Grundlagen: Lebesgueräume. Allgemeine Hilberträume

## 15.1 Lebesgueräume

Ist ein Maß ausgezeichnet, kann man Lebesgueräume über diesem Maß betrachten.
Es sei $\mu \in \mathcal{P}$ fixiert, dann hat für alle $g, f \in \mathcal{C}$ der Ausdruck

$$(f, g)_\mu = \langle f \cdot g, \mu \rangle = \int_{\mathcal{Z}} f(z) g(z) \mu(dz)$$

einen Sinn. Dank der Hölderungleichung (siehe Abschnitt **??**) gilt für ein reelles $r$ mit $1 < r < \infty$

$$|\langle f \cdot g, \mu \rangle| \leq \langle |f|^r, \mu \rangle^{1/r} \langle |f|^{r'}, \mu \rangle^{1/r'}$$

mit $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Diese Ungleichung läßt sich als abstrakte Hölderungleichung zweier zueiender dualer Räume interpretieren, wenn der Ausdruck

$$\|f\|_r := \|f\|_{L_r} := \|f\|_{L_r(\mu)} := \left( \int_{\mathcal{Z}} |f(z)|^r \mu(dz) \right)^{\frac{1}{r}} = \left\langle |f|^r, \mu \right\rangle^{\frac{1}{r}}$$

eine Norm definiert. Die Konvexität folgt aus der Minkowski-Ungleichung (siehe Abschnitt **??**), die absolute Homogenität ist offensichtlich. Die Definitheit gilt nicht ohne weitere Voraussetzungen an $\mu$ etwa in der Art $\mu(U) > 0$ für alle $U \in \mathcal{O}$. Ohne diese Voraussetzung müssen wir anstelle des gesamten Raumes den Faktorraum bezüglich aller Funktionen $f$, für die $\langle |f|^r, \mu \rangle$ denselbem Wert annimmt, betrachten.
**Definition:** Wir bezeichnen mit $L_r(\mu)$ den Abschluß der stetigen Funktion unter der Norm $\|f\|_r$. $L_r(\mu)$ ist damit ein Banachraum und es gilt $\mathcal{C} \subset L_r(\mu)$.
**Bemerkung:** Wir definieren also den $L_r(\mu)$ nicht als Abschluß einfacher Funktionen oder als Äquivalenzklassen von Funktionen, die sich nur auf Mengen vom Maß 0 unterscheiden, sondern als Grenzwerte von Folgen stetiger Funktionen in der $L_r$-Norm, genauer: Als Äquivalenzklassen solcher Folgen mit demselben Grenzwert. Das entspricht der Definition der reellen Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen.
Wir bezeichnen den Banach-Raum, der durch die Vervollständigung der genannten Faktorraumes von $\mathcal{C}$ in dieser Norm entsteht als $L_r(\mu)$-Raum (Lebesgueraum). Der Raum $L_r(\mu)$ ist also automatisch ein Banach-Raum und $\mathcal{C}$ ist in ihm dicht bezüglich der $L_r$-Norm.
Der zu $L_r$ duale Raum ist der $L_{r'}$. Die Räume $L_r$ sind damit reflexiv und eher “schiefe, asymmetrische Hilberträume” als allgemineBanachräume. Die duale Paarung zwischen $L_r(\mu)$- und $L_{r'}(\mu)$-Räumen bezeichnen wir mit runden Klammern und dem Index $\mu$.
Die Elemente eines solchen Raumes werden üblicherweise als punktweise (modulo Mengen vom $\mu$-Maß 0) gegebene Funktionen interpretiert. Es ist konsistenter, sich die Elemente in $L_r(\mu)$-Räumen als Grenzwerte von Folgen stetiger Funktionen bezüglich dieser Norm vorzustellen. In diesem Sinn ist nicht klar, ob sich die Grenzwerte auch als Funktionen auf $\mathcal{Z}$ betrachten lassen. Streng genommen sind die Funktionen nur in solchen Punkten $z$ definiert, für die $\mu(\{z\}) \neq 0$ gilt. Üblicherweise werden die Elemente in $L_r(\mu)$-Räumen deshalb als “Klassen von Funktionen” bezeichnet, deren Vertreter – bis auf Werte auf Mengen vom Maß = 0 – übereinstimmen. In diesem Sinn ist nicht ganz klar, was denn $L_r(\mu) \cap \mathcal{C}$ ist. Für uns sind stetige Funktionen aus $L_r(\mu)$ solche, die Grenzwerte konstanter Folgen stetiger Funktionen sind.

Diese Vorstellung entspricht der, die man sich von den reellen Zahlen als Grenzwerte von Folgen rationaler Zahlen macht. Diese Grenzwerte kann man sich natürlich nicht mehr als "rationale Zahlen" vorstellen. Sie benötigen ein völlig andere Darstellung. Unter den Folgen rationaler Zahlen gibt es natürlich auch solche, die gegen rationale Zahlen konvergieren, z.B. konstante Folgen.
Für $r = 2$ ist $L_2(\mu)$ ein Hilbertraum. Das entsprechende Skalarprodukt ist

$$(f, g)_\mu = \langle f \cdot g, \mu\rangle == \langle f, \mathbf{Q}_\mu g\rangle = \langle g, \mathbf{Q}_\mu f\rangle = \int_{\mathcal{Z}} f(z)g(z)\mu(dz)$$

Diese Skalarprodukt läßt sich in $\mathcal{C}$ definieren. Dort ist es eine allgemeine Biliniearform. Es macht $\mathcal{C}$ aber nicht zu einem Hilbertraum, weil 1) die Norm in $\mathcal{C}$ nicht zu dieser Biliniearform paßt und 2) diese Biliniearform auf ganz $\mathcal{C}$ im allgemeinen nicht definit ist. Nur in $L_2$ ist $(\cdot, \cdot)_\mu$ nach der genannten Faktorisierung ein echtes Skalarprodukt.
Es gelten folgende Eigenschaften:

- Für stetige $f$ gilt $\|f\|_r \leq \|f\|_{\mathcal{C}}$. Das folgt aus der Ungleichung

  $$\|f\|_r^r = \langle |f|^r, \mu\rangle \leq \sup_{z\in\mathcal{Z}} |f(z)|^r \langle \mathbb{1}, \mu\rangle = \left(\sup_{z\in\mathcal{Z}} |f(z)|\right)^r \cdot 1 = \|f\|_{\mathcal{C}}^r$$

- Konvergente Folgen in $\mathcal{C}$ konvergieren auch in $L_r(\mu)$
- Eine dichte Menge in $\mathcal{C}$ ist auch dicht in $L_r(\mu)$.
- Die Fortsetzung eines in $\mathcal{C}$ dicht definierten Operators ist auch in $L_{r_1}(\mu)$ dicht definiert.
- Zwei Räume $L_{r_1}(\mu) \subset L_{r_2}(\mu)$ sind ineinader eingebettet gdw. $r_1 \leq r_2$. **Beweise!**

Der Übergang von $\mathcal{C}$ zu einem Lebesgueraum kann sinnvoll sein. Dazu muß es einen Grund geben, ein besonderes Maß $\mu$ auszuzeichnen. Der Grund kann bereits im Zustandsraum $\mathcal{Z}$ liegen. Es kann sein, daß dieser Raum naturgemäß eine weitere Struktur hat. Er könnte z.B. eine kompakte Gruppe sein. Dann gibt es ein ausgezeichnetes Maß, das Haarsche Maß der Gruppe $\mathcal{Z}$. In diesem Fall ist es sinnvoll, die Aufgabe in $L_r(\mu)$ zu betrachten. Ein typisches Beispiel ist das Lebesguemaß $\lambda$. Es ist das Haarsche Maß im Euklidischen Raum, betrachtet als additiven Gruppe (Verschiebungsgruppe). Diese Gruppe ist zwar nicht kompakt, weswegen das Haarsche Maß nicht eindeutig definiert ist. Das Lebesguemaß ist aber modulo eines konstanten Faktors das einzige verschiebungsinvariante Maß im Euklidischen Raum. Daher ist es sinnvoll, Aufgaben im Euklidischen Raum in $L_r(\lambda)$ zu betrachten.
Ist $\mathcal{Z}$ ein kompaktes Gebiet im Euklidischen Raum ohne Gruppenstruktur (was der typische Fall ist), gibt es keinen Grund, eine Aufgaben in $L_r(\lambda)$ zu betrachten. Macht man es trotzdem, führt das zu Inkompaktibilitäten am Rand von $\mathcal{Z}$.
Ein weiterer sinnvoller Grund, eine Aufgabe in einem $L_r(\mu)$ zu betrachten, kann mit der konkreten Aufgabe zusammenhängen, z.B. mit einem gegebenen Operator (Zustandsänderung). Man kann die in $\mathcal{C}$ definierten Operatoren jetzt nach $L_2(\mu)$ erweitern. Frage: Welcher $L_2(\mu)$ ist für einen gegebenen Operator besonders gut geeignet? Natürlich der, indem der Operator besonders gute Eigenschaften hat. Was sind besonders gute Eigenschaften:

- Beschränktheit, bzw, besonders kleine Norm. Wenn der Operator z.B. kontraktiv ist (Norm kleiner gleich 1), dann kann man ihn mehrfach anwenden. Wenn das nicht der Fall ist, besteht die Gefahr, daß das mehrfache Anwenden aus dem Raum herausführt.

- Abgeleitete Operatoren – etwa adjungierte – sollten wieder bekannten Klassen von Operatoren angehören (z.B. sollten wieder Markowoperatoren sein).
- Symmetrie (Selbstadjungiertheit). Symmetrische Operatoren lassen sich diagonalisieren, haben ein reelles Spektrum, mit ihnen kann man gut rechnen.
- Falls Symmetrie prinzipiell nicht möglich ist (weil das Spektrum nicht reell ist), sollte der Operator wenigstens normal sein. Ein Operator ist normal, wenn er mit seinem adjungierten kommutiert.

Es stellt sich heraus, daß der richtige Raum der über dem stationären Maß ist. Auf diese Idee kann man folgendermaßen kommen:
Wir betrachten eine Trajektorie $p(t)$ für $0 \leq t \leq \infty$ und nehmen an, daß sie gegen einen Gleichgewichtszustand $p(\infty)$ konvergiert. Weiter nehmen wir an, daß $p(t)$ eine Dichte $h(t)$ bezüglich eines gegebenen Maßes $\mu$ hat.
Frage: Wann (für welches $\mu$) liegt die Trajektorie der Dichte – oder wenigstens ein großer Teil – in $L_2(\mu)$? Es ist klar, daß $h(\infty)$ in $L_2(\mu)$ liegt, wenn $\mu$ das stationäre Maß ist, denn dann ist $h(\infty) = \mathbb{1}$ und das liegt überall. Wenn die Dichte im Gleichgewicht in $L_2(\mu)$ liegt, dann liegt sie vielleicht auch kurz davon drin oder sogar insgesamt, wenn $p_0$ entsprechend gewählt wurde.

### 15.1.1 Allgemeine Lebesgueräume

Es sei $\mathbf{Q} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^*$ ein beliebiger positiv definiter Operator (also einer mit $\langle g, \mathbf{Q}g\rangle \geq 0$ und $(\langle g, \mathbf{Q}g\rangle = 0 \iff g = 0)$), dann definiert $(g, f) = \langle g, \mathbf{Q}g\rangle$ ein Skalarprodukt und $\langle g, \mathbf{Q}g\rangle^{1/2}$ eine Norm. Die Vervollständigung von $\mathcal{C}$ in dieser Norm liefert einen $L_2(\mathbf{Q})$, der sich genauso behandeln läßt wie $L_2(\mu)$ und in dem analoge Sätze gelten.
Es sei ein beschränkter linearer Operator $\mathbf{Q} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ mit folgenden Eigenschaften gegebenen:

- $\langle f, \mathbf{Q}g\rangle = \langle g, \mathbf{Q}f\rangle$,
- $\langle g, \mathbf{Q}g\rangle \geq 0$ und $(\langle g, \mathbf{Q}g\rangle = 0 \iff g = 0$.
- 
- $\mathbf{Q}\mathbb{1} = \mu$

### 15.1.2 Markowoperatoren in $L_r$

$\mathcal{C}$ ist dicht in $L_r(\mu)$. Dann ist es sinnvoll zu fragen, ob man beschränkte Operatoren in $\mathcal{C}$ nach $L_r(\mu)$ beschränkt fortsetzen kann. Das ist ohne weiteres nicht möglich. Zum Beispiel läßt sich der Projektor $\mathbf{P}$, der für ein gegebenes $z_0 \in \mathcal{Z}$ als $(\mathbf{P}g)(z) = g(z_0)\mathbb{1}$ wirkt, nur fortsetzen, wenn $\mu(\{z_0\}) > 0$.
Allerdings lassen sich Markowoperatoren, mit stationärem Maß $\mu$ nach $L_r(\mu)$ fortsetzen. Es gilt folgender
**Satz:** Die Erweiterung $\mathbf{L}$ von $\mathbf{M}$ in $L_r(\mu)$ ist – falls $\mathbf{M}^*\mu = \mu$ – ein beschränkter Operator mit Norm $= 1$ (er ist also kontraktiv).
**Satz:** Die bekannte Kontraktivität von Markowoperatoren in $\mathcal{C}$ gilt auch für die $L_r(\mu)$-Norm, falls $\mathbf{M}^*\mu = \mu$.
**Beweis:** Das folgt aus der Karamata-Ungleichung (54) mit $p = \mu$ und der konvexen Funktion $F(x) = |x|^r$. Es sei $g \in \mathcal{C}$, dann gilt

$$\|\mathbf{M}g\|_{L_r}^r = \langle |\mathbf{M}g|^r, \mu\rangle \leq \langle \mathbf{M}|g|^r, \mu\rangle = \langle |g|^r, \mathbf{M}^*\mu\rangle = \langle |g|^r, \mu\rangle = \|g\|_{L_r}^r$$

Aus $\mathbf{L}\mathbb{1} = \mathbf{M}\mathbb{1} = \mathbb{1}$ und $\|\mathbb{1}\|_{L_r} = 1$ folgt die Gleichheit. Das ergibt die gesuchte Gleichheit

$$\|\mathbf{M}g\|_{L_r} = \langle |\mathbf{M}g|^r, \mu\rangle^{\frac{1}{r}} = \langle |g|^r, \mu\rangle^{\frac{1}{r}} = \|g\|_{L_r} \qquad \square \qquad (76)$$

Wie bekannt lassen sich beschränkte Operatoren mit der selben Norm fortsetzen. Es gilt also

$$\|\mathbf{L}\|_{L_r} = \|\mathbf{M}\|_{L_r} = \|\mathbf{M}\|_{\mathcal{C}} = 1$$

### 15.1.3 Der Raum $L_2(\mu)$

Von besonderer Bedeutung ist der (reelle) Hilberraum $L_2(\mu)$. Das Skalarprodukt in diesem Raum ist

$$(g, f)_\mu = (f, g)_\mu = \langle f \cdot g, \mu\rangle = \langle f, \mathbf{Q}_\mu g\rangle = \langle g, \mathbf{Q}_\mu f\rangle = \int_{\mathcal{Z}} f(z)g(z)\mu(dz)\ .$$

Die Fortsetzung eines Markowoperators $\mathbf{M}$ in $L_2(\mu)$ ist kontraktiv. Das folgt aus der Ungleichung (**??**) mit der speziellen konvexen Funktion $F(x) = x^2$. Es gilt

$$\|\mathbf{M}g\|^2_{L_2} = \left\langle (\mathbf{M}g)^2, \mu\right\rangle \leq \left\langle \mathbf{M}g^2, \mu\right\rangle = \left\langle g^2, \mathbf{M}^*\mu\right\rangle = \left\langle g^2, \mu\right\rangle = \|g\|^2_{L_2}$$

Damit ist bewiesen, daß die Fortsetzung eines Markowoperators $\mathbf{M}$ in $L_2(\mu)$ die Norm 1 hat (weil neben der Ungleichung auch noch $\mathbf{M}\mathbb{1} = \mathbb{1}$ und $\|\mathbb{1}\|_{L_2} = 1$ gilt.

### 15.1.4 Operatoren in $L_2(\mu)$ und ihre adjungierten

Es sei $\mathbf{M} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ ein Markowoperator und $\mathbf{L}$ seine Fortsetzung in $L_2(\mu)$. Als Operator im Hilberraum können wir seinen adjungierten Operator $\mathbf{L}^*$ betrachten. Er ist durch die Gleichung

$$(\mathbf{L}f, g)_\mu = (f, \mathbf{L}^*g)_\mu,\ \ f, g \in L_2(\mu)$$

definiert. Es seien $f, g \in \mathcal{C}$. Für die linke Seite gilt dann

$$(\mathbf{L}f, g)_\mu = \langle g \cdot \mathbf{M}f, \mu\rangle,\ \ f, g \in \mathcal{C}$$

Angenommen, auch $\mathbf{L}^*$ ist die Fortsetzung eines beschränkten Operators $\mathbf{M}_+ : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, dann ist $\mathbf{L}^*g = \mathbf{M}_+g$ (im allgemeinen ist nicht klar, ob $\mathbf{L}^*g \in \mathcal{C}$ für $g \in \mathcal{C}$) und auch das Skalarprodukt auf der rechten Seite läßt sich als duale Paarung schreiben. Es gilt dann

$$(\mathbf{L}f, g)_\mu = \langle g \cdot \mathbf{M}f, \mu\rangle = \langle f \cdot \mathbf{M}_+g, \mu\rangle = (f, \mathbf{L}^*g)_\mu,\ \ f, g \in \mathcal{C}$$

Sollte $\mathbf{L} = \mathbf{L}^*$ gelten, dann ist die Existenz eines entsprechenden $\mathbf{M}_+$ klar, es gilt $\mathbf{M}_+ = \mathbf{M}$. Dieser Fall, daß die Fortsetzung eines Markowoperators in einen $L_2$ ein selbstadjungierter Operator ist, ist ein besonderer Fall, was aus folgendem Satz klar wird:
**Satz:** Die Fortsetzung eines Markowoperators $\mathbf{M}$ in einen $L_2(\mu)$ sei selbstadjungiert, dann ist das Maß, das den $L_2$-Raum gebildet hat, ein stationäres Maß von $\mathbf{M}^*$.
**Beweis:** Die Fortsetzung von $\mathbf{M}$ sei $\mathbf{L}$. Da $\mathbf{L} = \mathbf{L}^*$, gilt

$$\langle g \cdot \mathbf{M}f, \mu\rangle = \langle f \cdot \mathbf{M}g, \mu\rangle,\ \ f, g \in \mathcal{C}$$

Wir setzen $f = \mathbb{1}$. Das ergibt

$$\langle g, \mu\rangle = \langle \mathbf{M}g, \mu\rangle = \langle g, \mathbf{M}^*\mu\rangle,\ \ g \in \mathcal{C}$$

Aus der Beliebigkeit von $g$ folgt $\mathbf{M}^*\mu = \mu$. $\square$

**Bemerkungen:** Unter allen Operatoren in einem Hilbertraum spielen die selbstadjungierten eine besondere Rolle. Sie haben z.B. reelles Spektrum und lassen sich diagonalisieren. Diese besondere Eigenschaft erlangen Markowoperatoren also nur dann, wenn man sie in einem $L_2$ über dem stationären Maß betrachtet. In allen anderen $L_2$-Räumen ist das nicht der Fall. Wenn man also ein Problem in einem $L_2$-Raum betrachten will, muß der richtige gewählt werden, nämlich der über einem stationären Maß.

Es ist klar, daß ein Operator, der in $\mathcal{C}$ kein rein reelles Spektrum hat, in keinem $L_2$-Raum selbstadjungiert sein kann. Auch in diesem Fall, ist es sinnvoll den $L_2$-Raum über einem stationären Maß zu wählen. Der Operator kann sich dann als normal (kommutiert mit seinem adjungierten) herausstellen.

Nicht jeder Operator mit rein reellem Spektrum ist selbstadjungiert in $L_2(\mu)$. Man kann sogar diagonalisierbare Matrizen finden, die diese Eigenschaft nicht haben.

Der Fall, daß die Fortsetzung eines Markowoperators im $L_2$ über einem seiner stationären Maße selbstadjungiert ist, wird **detailierte Balance** genannt und spielt eine wichtige Rolle in der Theorie der Markowprozesse und ihren physikalischen Anwendungen. Oft wird gerade dieser Fall behandelt, da sich hier relativ einfach Aussagen erzielen lassen.