8 Mathematische Grundlagen: Beschränkte lineare Operatoren

8.1 Definitionen und erste Sätze

8.1.1 Beschränktheit

- Es sei $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ die Menge der linearen beschränkten Abbildungen zwischen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$. Sie bildet einen linearen Raum.

  Hier gibt es folgende wichtige Spezialfälle:

  - $\mathcal{X}^* = \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathbb{R})$ (Der duale Raum ist der Raum der beschränkten linearen Operatoren in die reellen Zahlen.)
  - $\mathcal{L}(\mathcal{X}) := \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ (Endomorphismen).
  - $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$ (Lineare Operatoren eines Raumes in seinen dualen)

- **Satz:** Es sei $\mathbf{A} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ eine lineare Abbildung zwischen Banachräumen. Dann ist äquivalent (siehe z.B. [4, S.71ff]):

  i) $\mathbf{A}$ ist überall stetig
  ii) $\mathbf{A}$ ist stetig im Punkt 0.
  iii) $\sup_{\|x\| \le 1} \|\mathbf{A}x\|$ ist beschränkt
  iv) Es existiert ein $c \in \mathbb{R}_+$ mit $\|\mathbf{A}x\| \le c\|x\|$, $x \in \mathcal{X}$

  Beweis: $i) \Longrightarrow ii)$ ist offensichtlich.

  $ii \Longrightarrow iv$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\forall \|x\| \le \delta$: $\|\mathbf{A}x\| \le \varepsilon$. Es sei $\varepsilon = 1$, $x \ne 0$ beliebig und $y := x\delta/\|x\|$. Dann ist $\|y\| \le \delta$. Dann ist $1 \ge \|\mathbf{A}y\| = \delta/\|x\| \|\mathbf{A}x\|$ und damit $\|\mathbf{A}x\| \le 1/\delta \|x\|$

  $iv \Longrightarrow i$: Es sei $x_n \longrightarrow x$, also $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$. Dann ist $\|\mathbf{A}x_n - \mathbf{A}x\| = \|\mathbf{A}(x_n - x)\| \le c\|x_n - x\| \to 0$

  $iii \Longrightarrow iv$: Es sei $x \ne 0$ beliebig und $y := x/\|x\|$. Dann ist $\|y\| \le 1$. Nach Voraussetzung existiert ein c mit $\|\mathbf{A}y\| = \|\mathbf{A}(x/\|x\|)\| \le c$. Hieraus folgt $\|\mathbf{A}x\| \le c\|x\|$. Dieses c ist auch für den Fall $x = 0$ geeignet.

  $iv \Longrightarrow iii$: $\|x\| \le 1 \Longrightarrow \|\mathbf{A}x\| \le c \Longrightarrow$ Das Supremum ist beschränkt. $\square$

- Es kann eine Norm $\|A\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|\mathbf{A}x\|$ definiert werden. In dieser Norm ist $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ein Banachraum (wenn $\mathcal{Y}$ einer ist).

- Die Gleichheit zweier Operatoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ bedeutet, daß sie zwischen den selben Räumen abbilden und die Bilder derselben Elemente identisch sind. Die Gleichheit zweier Elemente aus einem Raum wiederum ist äquivlent dazu, daß alle Funktionale auf ihnen identische reelle Werte ergeben. Die Gleichheit zweier Funktionale ist äquivlent dazu, daß sie auf allen Elementen identische reelle Werte ergeben.

Folgende Gleichungen sind also äquivalent:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \mathbf{B} \\
\mathbf{A}^* &= \mathbf{B}^* \\
\mathbf{A}x &= \mathbf{B}x, \;\; x \in \mathcal{X} \\
\langle x^*, \mathbf{A}x \rangle &= \langle x^*, \mathbf{B}x \rangle, \;\; x \in \mathcal{X}, \;\; x^* \in \mathcal{X}^* \\
\langle \mathbf{A}^* x^*, x \rangle &= \langle \mathbf{B}^* x^*, x \rangle, \;\; x \in \mathcal{X}, \;\; x^* \in \mathcal{X}^* \\
\langle \mathbf{A}^* x^*, x^{**} \rangle_* &= \langle \mathbf{B}^* x^*, x^{**} \rangle_*, \;\; x^{**} \in \mathcal{X}^{**}, \;\; x^* \in \mathcal{X}^*
\end{aligned}$$

8.1.2 Adjungierte Operatoren

Es sei $\mathbf{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ein linearer beschränkter Operator und $\mathcal{X}^*$ und $\mathcal{Y}^*$ die zu $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$ dualen Räume. $\langle \mathbf{A}x, y^* \rangle$ ist für festes x eine lineare beschränkte Abbildung nach $\mathbb{R}$. D.h. ein Funktional auf $\mathcal{X}$. Es existiert also ein x^* sodaß $\langle \mathbf{A}x, y^* \rangle = \langle x, x^* \rangle$. Wir nennen die Abbildung $y^* \longrightarrow x^*$ adjungierten Operator und schreiben $x^* = \mathbf{A}^* y^*$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[r, "\mathbf{A}"'] \arrow[d, "\mathbf{J}_{\mathcal{X}}"] & \mathcal{Y} \arrow[d, "\mathbf{J}_{\mathcal{Y}}"'] \\
\mathcal{X}^{**} & \mathcal{Y}^{**} \arrow[l, "\mathbf{A}^{**}"']
\end{tikzcd}$$

Der adjungierte Operator hat folgende Eigenschaften:

- Eindeutig definiert, linear, beschränkt
- $\mathbf{A}^* \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$, d.h., $\mathbf{A}^* : \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*$.

  Zu beachten ist, daß der adjungierte Operator die dualen Räume in umgekehrter Richtung abbildet.
- In einem reflexiven B-Raum hat jeder Operator einen prädualen, d.h. zu einem Operator $\mathbf{B} \in \mathcal{L}(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$ existiert ein Operator $\mathbf{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ mit $\mathbf{A}^* = \mathbf{B}$.

  Im nichtreflexiven B-Raum muß das nicht der Fall sein. Wir betrachten im weiteren stets Operatoren in $\mathcal{L}(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$, die einen prädualen besitzen.

  ÜA 23) Konstruiere einen Operator $\mathbf{B} : \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*$, der keinen prädualen hat, d.h. für den es keinen beschränkten Operator $\mathbf{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ mit $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*$ gibt.

  Lösung siehe S. 151.
- Im endlich dimensionalen Raum kann man einen Operator durch eine Matrix darstellen. Der Übergang zum adjungierten Operator entspricht dem Transponieren der Matrix. Man sieht, daß die transponierte Matrix in umgekehrter Richtung abbildet als die Matrix selbst, wenn man rechteckige Matrizen betrachtet.

8.1.3 Positive Operatoren

Im Banachverband spielen Operatoren, die die Positivtät erhalten eine wichtige Rolle. Sie werden **positive Operatoren im Kegelsinn** genannt – sie von den **positive Operatoren im Formensinn** wie sie im Hilbertraum üblich sind.
Definition: Ein Operator $\mathbf{A} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ zwischen zwei Banachverbänden heißt positiv, wenn $\mathbf{A}\mathcal{X}_+ \subset \mathcal{Y}_+$ gilt. Wir schreiben $\mathbf{A} \geq 0$. Mit anderen Worten: $\mathbf{A} \geq 0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (x \geq 0 \implies \mathbf{A}x \geq 0)$.

Es gilt folgender
Satz: $\mathbf{A} \geq 0 \Longleftrightarrow \mathbf{A}^* \geq 0$.
Beweis: Geg:: $x \geq 0 \Longrightarrow \mathbf{A}x \geq 0$ und $y^* \geq 0$. Zu zeigen ist $\mathbf{A}^* y^* \geq 0$. Es sei $y^* \geq 0$, d.h. $\langle y, y^* \rangle \geq 0$ für alle $y \geq 0$. Es sei $x \geq 0$ beliebig. Wir setzen $y = \mathbf{A}x$. Wegen $\mathbf{A} \geq 0$ ist $y \geq 0$. Aus $\langle y, y^* \rangle \geq 0$ folgt $\langle \mathbf{A}x, y^* \rangle = \langle x, \mathbf{A}^* y^* \rangle \geq 0$. $\square$
Ein Matrix stellt einen positiven Operator dar, genau dann, wenn alle Einträge positiv sind (siehe Darstellungen von Operatoren).

8.1.4 Der biadjungierte Operator

Es sei

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &: \mathcal{X} \to \mathcal{Y} \\ \mathbf{A}^* &: \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X} \\ \mathbf{A}^{**} &: \mathcal{X}^{**} \to \mathcal{Y}^{**} \end{aligned}$$

Wegen der Einbettungen $\mathbf{J}_{\mathcal{X}}\mathcal{X} \subset \mathcal{X}^{**}$ und $\mathbf{J}_{\mathcal{Y}}\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}^{**}$ kann man fragen, wie sich $\mathbf{A}$ zu $\mathbf{A}^{**}$ auf Elementen aus $\mathcal{X}$ verhält?
Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}^{**}\mathbf{J}_{\mathcal{X}}x, y^* \rangle_* &= \langle \mathbf{J}_{\mathcal{X}}x, \mathbf{A}^* y^* \rangle_* = \langle x, \mathbf{A}^* y^* \rangle = \langle \mathbf{A}x, y^* \rangle = \\ &= \langle \mathbf{J}_{\mathcal{Y}}\mathbf{A}x, y^* \rangle_* \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "\mathbf{A}"'] \arrow[d, "\mathbf{J}_{\mathcal{X}}"] & \mathcal{Y} \arrow[d, "\mathbf{J}_{\mathcal{Y}}"'] \\ \mathcal{X}^{**} \arrow[r, "\mathbf{A}^{**}"] & \mathcal{Y}^{**} \end{tikzcd}$$

Folglich ist $\mathbf{A}^{**}\mathbf{J}_{\mathcal{X}} = \mathbf{J}_{\mathcal{Y}}\mathbf{A}$.

8.1.5 Symmetrische Operatoren

In einem reellen Hilbertraum $\mathcal{H}$ wird häufig von symmetrischen oder selbstadjungierten Operatoren gesprochen, wenn $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ oder äquivalent $(\mathbf{A}x, y) = (x, \mathbf{A}y)$ gilt.
Es ist klar, daß man in allgemeinen Banachräumen für zwei Operatoren $\mathbf{A} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{Y}$ und $\mathbf{A}^* : \mathcal{Y}^* \longrightarrow \mathcal{X}^*$ Gleichheit nicht in jedem Fall definieren kann. Notwendig ist, daß sie in den selben Raum abbilden müssen um von der Gleichheit der Bilder sprechen zu können, daß also $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^*$ gilt. Dann ist $\mathbf{A} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^*$ und $\mathbf{A}^* : \mathcal{X}^{**} \to \mathcal{X}^*$. Wegen der Einbettung kann man

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[d, "\mathbf{J}_{\mathcal{X}}"] \arrow[dr, "\mathbf{A}"] & \\ \mathcal{X}^{**} \arrow[r, "\mathbf{A}^*"] & \mathcal{X}^* \end{tikzcd}$$

Definition: Ein Operator $\mathbf{A} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}^*$ heißt symmetrisch, falls $\langle x_1, \mathbf{A}x_2 \rangle = \langle x_2, \mathbf{A}x_1 \rangle$ für $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$.
Das ist äquivalent zu $\mathbf{A} = \mathbf{A}^* \mathbf{J}_{\mathcal{X}}$.
Bemerkung: Für beschränkte Operatoren sind die Begriffe symmetrisch und selbstadjungiert identisch.
Für unbeschränkte Operatoren gilt, daß man manchmal einen symmetrischen Operator zu einem selbstadjungierter Operator erweitern kann. Dort sind das verschiedene Begriffe.

8.2 Weitere Eigenschaften. Bemerkungen

- **Bemerkung:** In Funktionenräumen, die durch Abschluß zum Banachraum geworden sind, ist typisch, daß ein Operator unstetig ist, wenn er "unbeschränkt" ist, da Beschränktheit und Stetigkeit für lineare Operatoren äquivalent sind. In $\mathcal{C}(\mathcal{Z})$ gibt es hier – da der Raum dank seiner Definition bereits vollständig ist – verschiedene Formen der "Unbeschränktheit" oder "Unstetigkeit".

Betrachtet man z.B. einen Differentialoperator, so ist er – genau wie in einem L_2-Raum unbeschränkt, weil es eine Folge differenzierbarer beschränkter Funktionen gibt, die gegen eine stetige aber nicht-differenzierbare Funktion stark konvergieren. Die Folge der Ableitung ist dann unbeschränkt.

Betrachtet man dagegen auf $\mathcal{C}([0,1])$ einen Multiplikationsoperator mit einer beschränkten Funktion, die im Punkt $a \in [0,1]$ eine Unstetigkeitsstelle hat, so ist das Produkt einer solchen Funktion mit einer stetigen Funktion in der sup-Norm beschränkt (liegt in $\mathcal{C}^{**}$). Der Operator ist also formal "beschränkt". Er ist aber unstetig. Der scheinbare Widerspruch zum Theorem besteht darin, daß dieser Multiplikationsoperator nicht auf dem geamten Raum sondern nur auf einem abgeschlossenen Ideal – nämlich I_a – definiert ist.

- Definitionsbereich ist immer ein linearer Raum, auch wenn wir uns nur für eine konvexe Menge interessieren.
- Topologien in $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ siehe DS I S.512ff
- Konvexe Teilmengen in $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ haben den selben starken und schwachen Abschluß (siehe DS I S.514 Nr.5). Das gilt insbesondere auch für die Menge $\mathcal{P}$.
- Abgeschlossene Operatoren (DS I S.524). Bei beschränkten Operatoren bedeutet Abgeschlossenheit, daß der Wertebereich abgeschlossen ist.
- $\overline{\mathbf{A}\mathcal{X}} = \{y \mid \mathbf{A}^* y^* = 0 \implies \langle y, y^* \rangle = 0\}$
- Die Umkehrung: $\overline{\mathbf{A}^*\mathcal{Y}^*} = \{x^* \mid \mathbf{A}x = 0 \implies \langle x, x^* \rangle = 0\}$ stimmt im Allgemeinen nicht. Aber es gilt: $\overline{\mathbf{A}\mathcal{X}} = \mathbf{A}\mathcal{X} \iff \overline{\mathbf{A}^*\mathcal{Y}^*} = \mathbf{A}^*\mathcal{Y}^*$
- Kompakte Operatoren (DS I S.522)
- Schwach kompakte Operatoren (d.h., sie bilden abgeschlossene beschränkte Mengen in kompakte ab): $\mathbf{A}$ ist schwach kompakt $\iff \mathbf{A}^{**}\mathcal{X}^{**} \subset \mathcal{X}$ (siehe DS I S.519)
- $\mathbf{A}$ ist stetig bedeutet, daß aus $x_n \to x$ folgt $\mathbf{A}x_n \to \mathbf{A}x$.
- **ÜA 24 a)** $\mathbf{A}$ stetig $\Longrightarrow$ $\mathbf{A}$ schwach stetig. **Beweis:** Es sei $x_n \to x$ schwach, d.h. $\langle x_n, x^* \rangle \to \langle x, x^* \rangle$ für alle $x^* \in \mathcal{X}^*$. Zu zeigen ist $\langle \mathbf{A}x_n, y^* \rangle \to \langle \mathbf{A}x, y^* \rangle$ für alle $y^* \in \mathcal{Y}^*$.

  Es sei $y^* \in \mathcal{Y}^*$ beliebig. Wir wählen $x^* = \mathbf{A}^* y^*$ in $\langle x_n, x^* \rangle \to \langle x, x^* \rangle$. Die Behauptung folgt dann aus $\langle x_n, \mathbf{A}^* y^* \rangle \to \langle x, \mathbf{A}^* y^* \rangle \iff \langle \mathbf{A}x_n, y^* \rangle \to \langle \mathbf{A}x, y^* \rangle$.
- **ÜA 24 b)** $\mathbf{A}$ stetig $\Longrightarrow$ $\mathbf{A}^*$ vage stetig. **Beweis:** Es sei $y_n^* \to y^*$ vage, d.h. $\langle y, y_n^* \rangle \to \langle y, y^* \rangle$ für alle $y \in \mathcal{Y}$. Zu zeigen ist $\langle x, \mathbf{A}^* y_n^* \rangle \to \langle x, \mathbf{A}^* y^* \rangle$ für alle $x \in \mathcal{X}$.

  Es sei $x \in \mathcal{X}$ beliebig. Wir wählen $y = \mathbf{A}x$ in $\langle y, y_n^* \rangle \longrightarrow \langle y, y^* \rangle$. Die Behauptung folgt dann aus $\langle \mathbf{A}x, y_n^* \rangle \to \langle \mathbf{A}x, y^* \rangle \iff \langle x, \mathbf{A}^* y_n^* \rangle \to \langle x, \mathbf{A}^* y^* \rangle$.

8.3 Die Zeitrichtung der Wirkung von Operatoren

Im weiteren betrachten wir zwei Zustandsräume $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$, die wir als Zustandsräume vor bzw. nach einer Zustandsänderung betrachten wollen. Sie entsprechen Zeitpunkten t und $t' > t$.
Zu $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{Z}'$ betrachten wir die ganze Kette von dualen Räumen. Sie und ihre Elemente seien mit einem ' versehen, falls sie zum Zeitpunkt t' gehören, sonst nicht.

Hierbei ist zu beachten:

- Operatoren und ihre adjungierten wirken zeitlich in verschieden Richtung. Wir definieren, daß im Physischen die Zeit vorwärts fließt. Im Geistigen wirken die Operatoren rückwärts in der Zeit. Das bedeutet nicht, daß sie dort "rückwärts fließt".

  Wir betrachten die Welt stets zu einem festen Zeitpunkt. Ein Operator im Physischen wirkt aus der Vergangenheit oder in die Zukunft. Ein Operator im Geistigen wirkt in die Vergangenheit oder aus der Zukunft.

- Die duale Paarung muß stets zum selben Zeitpunkt gebildet werden.

  Wir können verschieden Zeitpunkte vergleichen, indem wir die dualen Paarungen zu verschiedenen Zeitpunkten betrachten.

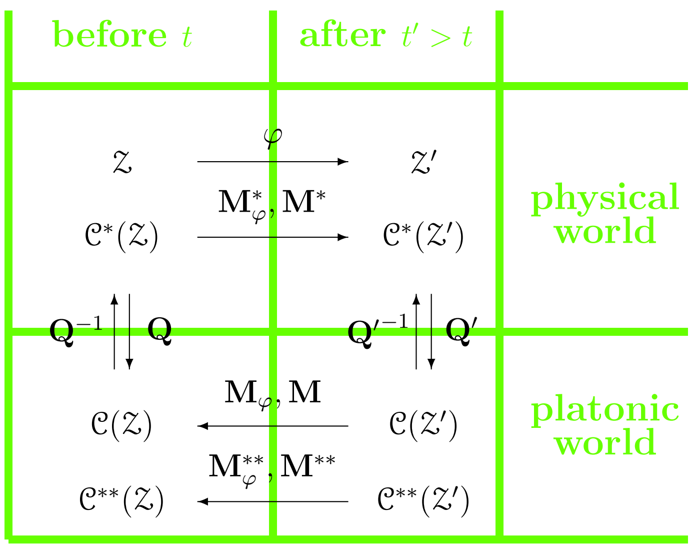
- Symmetrische Operatoren wirken zwischen dualen Räumen zum selben Zeitpunkt.

- Es sei $\mathbf{A} : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$. Die Beziehungsgleichung zwischen Operator und seinem adjungierte ist dann

  $$\langle \mathbf{A}g', p\rangle = \langle g', \mathbf{A}^{*}p\rangle$$

  Der linke Ausdruck ist eine duale Paarung zum Zeitpunkt t,
  die rechte eine zum Zeitpunkt t'.

- Übersicht über die Raum- und Zeitkonstellation



8.4 Darstellungen beschränkter Operatoren

8.4.1 Operatoren im endlich dimensionalen Raum

Aus der Theorie der Operatoren im endlichdimensionalen Raum ist bekannt, daß man Operatoren durch Matrizen darstellen kann. Diese Darstellung hängt von den gewählten Basen ab. Es sei $\mathbf{A} : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_m$ ein Operator und $(e_i) \subset \mathbb{R}_n$, $(e_j) \subset \mathbb{R}_m$, $(e_i^*) \subset \mathbb{R}_n^*$, $(e_j^*) \subset \mathbb{R}_m^*$ Basen. Dann ist bekannt, daß man dem Operator $\mathbf{A}$ eine Matrix $(a_{ij})_{i,j=1}^{n,m}$ zuordnen kann. Diese Matrix erhält man als Wirkung des Operators in dieser Basis in der dualen Paarung. Es sei

$$a_{ij} = \langle \mathbf{A}e_i, e_j^* \rangle$$

Mit dieser Matrix läßt sich die Wirkung des Operators als Summe darstellen:

$$(\mathbf{A}x)_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i \ , x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Der adjungierte Operator $\mathbf{A}^* : \mathbb{R}_m^* \to \mathbb{R}_n^*$ hat wegen $a_{ij} = \langle \mathbf{A}e_i, e_j^* \rangle = \langle e_i, \mathbf{A}^* e_j^* \rangle$ dieselbe Matrix. Seine Wirkung läßt sich wieder als Summe

$$(\mathbf{A}^* y^*)_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j^* \ , y^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* e_j^*$$

darstellen. Die Summation läuft allerdings über den anderen Index. Das heißt, die Matrix des adjungierten Operators ist die transponierte des ursprünglichen Operators.

Die Norm von $\mathbf{A}$ hängt von den Räumen ab, zwischen denen er wirkt. Wirkt er zwischen AM-Räumen (z.B. $\mathbf{A} : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$), dann ist

$$\|\mathbf{A}\| = \sup_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

D.h., es ist bei Matrizen $a_{i\cdot}$ aus einem AM-Raum und $a_{\cdot j}$ aus einem AL-Raum.

8.4.2 Darstellung beschränkter Operatoren in $\mathcal{C}$ und seinen dualen

Meistens wählt man in $\mathbb{R}_m$ und $\mathbb{R}_m^*$ dieselbe Basis – die kanonische Basis $e_j = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ mit einer 1 an der j-ten Stelle. Aus dem Kapitel 2, Punkt 2.2.9 (Seite 35) ist bekannt, daß diese Vektoren zwar die kanonische Basis in $\mathbb{R}_m^*$ sind, aber es in $\mathbb{R}_m$ natürlicher ist, die Darstellungen von Teilmengen (und nicht von Punkten) zu betrachten. Sie bilden zwar keine Basis, ergaben sich aber kanonisch als Einbettung $2^{\mathcal{Z}} \subset \mathcal{Z}^* = \mathcal{C}(\mathcal{Z})$. Im endlichdimensionalen Raum wird das nicht gemacht, eben weil die Teilmengen keine Basis bilden. Dieser prinzipielle Unterschied zwischen $\mathbb{R}_m$ und $\mathbb{R}_m^*$ läßt sich ignorieren.
Im unendlichdimenionalen Raum ist das nicht mehr möglich. Es gibt in $\mathcal{C}(\mathcal{Z})$ keine kanonische Basis. In $\mathcal{C}^*(\mathcal{Z})$ gibt es eine kanonische Basis – nämlich $\mathcal{P}_e$ – allerdings ist das eine vage Basis.

Definition: Eine Menge (x_n) heißt starke/schwache/vage Basis in $\mathcal{X}$, wenn es zu jedem $x \in \mathcal{X}$ eine eindeutig bestimmte Folge (a_n) von Skalaren derart gibt, daß $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ mit $n \to \infty$ gegen x stark/schwach/vage konvergiert. Spricht man allgemein von "Basis", meint man eine starke Basis.

In $\mathcal{C}(\mathcal{Z})$ und $\mathcal{C}^*(\mathcal{Z})$ gibt es im allgemeinen keine kanonischen starken Basen. Trotzdem läßt sich auch im allgemeinen Fall für jeden beschränkten linearen Operator $\mathbf{A} : \mathcal{C}(\mathcal{Z}') \to \mathcal{C}(\mathcal{Z})$ soetwas wie eine "Matrix" finden. Sie wird **Integralkern** genannt. Man findet ihn formal, wenn man den Operator $\mathbf{A}^{**} : \mathcal{C}^{**}(\mathcal{Z}') \to \mathcal{C}^{**}(\mathcal{Z})$ auf die "kanonische Basis" $(\mathbb{1}_{B'}) \subset \mathcal{C}^{**}(\mathcal{Z}')$, $B' \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}')$ anwendet (das entspricht $(e_i) \in \mathbb{R}_n$) und mit der kanonischen Basis $(\delta_z) \subset \mathcal{C}^*(\mathcal{Z})$ (das entspricht $(e_j^*) \in \mathbb{R}_m^*$) paart. Das ergibt

$$a(B', z) = \langle \mathbf{A}^{**}\mathbb{1}_{B'}, \delta_z \rangle$$

Die Wirkung des Operators $\mathbf{A} : \mathcal{C}(\mathcal{Z}') \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{Z})$ läßt sich dann nach dem Satz von Riesz als Lebesgueintegral mit dem Integralkern $a(B', z)$ darstellen

$$(\mathbf{A}g)(z) = \int_{\mathcal{Z}'} g(z')a(dz', z) \ . \tag{32}$$

In dieser Darstellung ist $a(\cdot, z)$ als Schar von Maßen mit dem Scharparameter z zu verstehen. Für festes z ist $a(\cdot, z)$ ein Maß, das auf Borelmengen definiert ist, d.h. der Ausdruck $a(B', z)$ mit $B' \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}')$ hat Sinn. Das Lebesgueintegral $\int_{\mathcal{Z}'} g(z')a(dz', z)$ ist dann genauso zu verstehen wie das Lebesgueintegral $\int_{\mathcal{Z}'} g(z')p(dz')$ mit einem Maß $p \in \mathcal{C}^*(\mathcal{Z}')$, für das $p(B')$ mit $B' \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}')$ Sinn hat. $p(dz')$ ist soetwas wie "das Maß p ausgewertet auf einer Infinitesimalen Borelmenge $dz' \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}')$".

Bemerkung: Hier sieht man, daß für das Lebesgueintegral die Notation $\int g(z)p(dz)$ intuitiv verständlich ist als Grenzwert von Summen $\sum_i g(z_i)p(B_i)$ mit "$B_i \longrightarrow \{z_i\}$". Die häufig verwendete Notation $\int g(z)dp(z)$ ist intuitiv eigentlich als Grenzwert von Summen der Form $\sum_i g(z_i)(p(z_i) - p(z_{i-1}))$ zu verstehen und ist damit nicht für das Lebesgue- sondern für das Stieltjesintegral (eine Verallgemeinerung des Riemannintegrals) geeignet.

Tatsächlich ist die Darstellung (32) nicht nur formal richtig. $\mathbf{A}g$ ist ein Element aus $\mathcal{C}(\mathcal{Z})$, also eine stetige Funktion $\mathcal{Z} \to \mathbb{R}$. Diese Funktion kann also am Punkt z ausgewertet werden. Das sei $(\mathbf{A}g)(z)$. Offensichtlich ist das für festes $z \in \mathcal{Z}$ und beliebiges $g \in \mathcal{C}(\mathcal{Z}')$ ein lineares (weil $\mathbf{A}$ linear ist) und beschränktes (weil $\mathbf{A}$ beschränkt ist) Funktional, also ein Element aus $\mathcal{C}^*(\mathcal{Z}')$. Wir nennen es a_z, wobei der Index z den festgehaltenen Parameter $z \in \mathcal{Z}$ bezeichnet. Es ist also $(\mathbf{A}g)(z) = \langle a_z, g \rangle$. Das ist gerade die Darstellung (32) (unter Berücksichtigung des Rieszschen Satzes) mit $a_z = a(\cdot, z)$.
Und umgekehrt, jede Schar $(a_z)_{z\in\mathcal{Z}} \subset \mathcal{C}^*(\mathcal{Z}')$ definiert durch $(\mathbf{A}g)(z) = \langle a_z, g \rangle$ einen linearen Operator, der allerdings nur dann ein beschränkter Operator ist, wenn die Schar $(a_z)_{z\in\mathcal{Z}}$ bezüglich des Parameters z vage stetig ist.
Es gilt folgender
Satz: (siehe DS I, S.527ff, Semadeni S.323) Zu jedem $\mathbf{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{C}(\mathcal{Z}'), \mathcal{C}(\mathcal{Z}))$ existiert eine Abbildung $a : \mathcal{B}(\mathcal{Z}') \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ mit $a(\cdot, z) \in \mathcal{C}^*(\mathcal{Z}')$, die als Schar $\big(a(\cdot, z)\big)_{z\in\mathcal{Z}}$ vage stetig ist, derart, daß $(\mathbf{A}g)(z) = \langle g, a(\cdot, z) \rangle$ und $\|\mathbf{A}\| = \sup_{z\in\mathcal{Z}} \|a(\cdot, z)\|$.
Und umgekehrt: Jede vage stetige Schar $\big(a(\cdot, z)\big)_{z\in\mathcal{Z}} \subset \mathcal{C}^*(\mathcal{Z}')$ definiert einen beschränkten linearen Operator aus $\mathcal{L}(\mathcal{C}(\mathcal{Z}'), \mathcal{C}(\mathcal{Z}))$.

Bemerkung: Der Begriff "Integralkern" eines Operators (häufig auch einfach "Kern" des Operators) genannt, darf nicht mit dem Begriff "Kern" des Operators im Sinne von Nullraum (die Punkte, die in die 0 abgebildet werden) verwechselt werden.

Der adjungierte zu $\mathbf{A}$ Operator $\mathbf{A}^* : \mathcal{C}^*(\mathcal{Z}) \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{Z}')$ läßt sich ebenfalls als Integraloperator darstellen. Es sei $p \in \mathcal{C}^*(\mathcal{Z})$, dann ist $\mathbf{A}^* p \in \mathcal{C}^*(\mathcal{Z}')$ ebenfalls ein Maß, das sich auf Borelmengen $B' \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}')$ auswerten läßt. Wir berechnen $(\mathbf{A}^* p)(B')$: Wegen

$$\langle g, \mathbf{A}^* p\rangle = \langle \mathbf{A} g, p\rangle = \int_{\mathcal{Z}} \left(\int_{\mathcal{Z}'} g(z') a(dz', z) \right) p(dz) = \int_{\mathcal{Z}'} g(z') \left(\int_{\mathcal{Z}} a(dz', z) p(dz) \right)$$

ist $(\mathbf{A}^* p)(dz') = \int_{\mathcal{Z}} a(dz', z) p(dz)$ und damit

$$(\mathbf{A}^* p)(B') = \int_{\mathcal{Z}} a(B', z) p(dz)$$

Dieser Ausdruck ist folgendermaßen zu verstehen: Wir fixieren $B' \in \mathcal{B}(\mathcal{Z}')$. Dann ist $a(B', \cdot)$ eine stetige Funktion in $\mathcal{C}(\mathcal{Z})$. Wir können sie dual mit einem $p \in \mathcal{C}^*(\mathcal{Z})$ paaren. Das Ergebnis ist $(\mathbf{A}^* p)(B')$.

8.4.3 Übersicht über weitere Integraldarstellungen

Beschränkte Operatoren **A** lassen sich als Integrale mit Kernen a darstellen, die man erhält, in dem man in die entsprechende Bilinearform die kanonischen Basen einsetzt. Diese Kerne sind Funktionen zweier Variabler, die Kreuzprodukte von $\mathcal{Z}$ bzw. $\mathcal{B}(\mathcal{Z})$ nach $\mathbb{R}$ abbilden.
Ist **A** ein positiver Operator, dann ist $a \geq 0$ und die Norm von **A** läßt sich einfacher berechnen. Das ist im weiteren angenommen.

Operatoren $\mathbf{A}: \ \mathcal{C} \to \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \big(\mathbf{A}g\big)(z) &= \int_{\mathcal{Z}} a(dz', z) g(z') \\ a(A, z) &= \langle \mathbf{A}\mathbb{1}_A, \delta_z \rangle \\ a &: \mathcal{B}(\mathcal{Z}) \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R} \\ \|\mathbf{A}\| &= \sup_{z \in \mathcal{Z}} \ a(\mathcal{Z}, z), \ \ a \geq 0 \end{aligned}$$

Operatoren $\mathbf{A}^*: \ \mathcal{C}^* \to \mathcal{C}^*$

$$\begin{aligned} \big(\mathbf{A}^* q\big)(A) &= \int_{\mathcal{Z}} a(A, z') q(dz') \\ a^*(A, z) &= a(A, z) = \langle \mathbb{1}_A, \mathbf{A}^* \delta_z \rangle = \langle \mathbf{A}^{**}\mathbb{1}_A, \delta_z \rangle \\ a &: \mathcal{B}(\mathcal{Z}) \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R} \\ \|\mathbf{A}^*\| &= \sup_{z \in \mathcal{Z}} a(\mathcal{Z}, z), \ \ a \geq 0 \end{aligned}$$

Operatoren $\mathbf{A}: \ \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$

$$\begin{aligned} \big(\mathbf{A}g\big)(B) &= \int_{\mathcal{Z}} a(dz', B) g(z') \\ a(A, B) &= \langle \mathbb{1}_A, \mathbf{A}^* \mathbb{1}_B \rangle \\ a &: \mathcal{B}(\mathcal{Z}) \times \mathcal{B}(\mathcal{Z}) \to \mathbb{R} \\ \|\mathbf{A}\| &= a(\mathcal{Z}, \mathcal{Z}), \ \ a \geq 0 \end{aligned}$$

Dieser Operator ist genau dann symmetrisch, wenn $a(A, B) = a(B, A)$ gilt.
$\mathbf{A}^*: \ \mathcal{C}^{**} \to \mathcal{C}^*$ läßt sich als Operator $\mathbf{A}^*: \ \mathcal{C} \to \mathcal{C}^*$ betrachten (einschränken auf $\mathcal{C}$).
Operatoren $\mathbf{A}: \ \mathcal{C}^* \to \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \big(\mathbf{A}q\big)(z) &= \int_{\mathcal{Z}} a(z', z) q(dz') \\ a(z, z') &= \langle \mathbf{A}\delta_z, \delta_{z'} \rangle \\ a &: \mathcal{Z} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R} \\ \|\mathbf{A}\| &= \sup_{z \in \mathcal{Z}} \sup_{z' \in \mathcal{Z}} a(z, z'), \ \ a \geq 0 \end{aligned}$$

Das ist der einzige Operator, dessen Integralkern eine Funktion zweier Punkte ist. Die in der mathematischen Physik häufig verwendeten Funktionen in Integralopertaren (z.B. Greensche Funktion als Integralkern des Lösungsoperators einer partiellen Differentialgleichung) sind anstelle von $a(z, z')$ z.B. als $a(z, z')dz'$ zu verstehen. Da ist $a(z, z')$ die Dichte eines entsprechenden Maßes.
Insbesondere betrifft das Integralkerne der Form $a(z - z')$ (Kerne von Faltungsoperatoren), die überhaupt nur einen Sinn haben, wenn $\mathcal{Z}$ selbst einlinearer Raum ist.