6 Mathematische Grundlagen: Dualitätstheorie, Topologien und Maßtheorie

6.1 Dualitätstheorie

Nachdem wir geklärt haben, was der Raum $\mathcal{Z}^* = \mathcal{C}$ für eine Struktur hat, untersuchen wir jetzt seinen dualen Raum $\mathcal{Z}^{**} = \mathcal{C}^*$. Das machen wir in mehreren Schritten:

- Es sei $\mathcal{X}$ ein abstrakter B-Raum. Was ist $\mathcal{X}^*$?
- Es sei $\mathcal{X}$ ein Riesz-Raum. Was ist $\mathcal{X}^*$?
- Es sei $\mathcal{X}$ ein AM-Raum oder AL-Raum. Was ist $\mathcal{X}^*$?
- Es sei $\mathcal{X} = \mathcal{C}$. Was ist $\mathcal{X}^*$?

6.1.1 Der duale Raum eines Banachraumes

Es sei

$$\mathcal{X}^* \quad = \quad \left\{ x^* : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \;\middle|\; x^*(ax+by) = ax^*(x) + bx^*(y), \sup_{\|x\|\leq 1} |x^*(x)| < \infty,\ x, y \in \mathcal{X} \right\}$$

die Menge aller beschränkten linearen Funktionale auf $\mathcal{X}$. Die x^* sind als lineare beschränkte Abbildungen zwischen topologischen Räumen stetig.
Wir schreiben im weiteren $x^*(x) = \langle x^*, x\rangle = \langle x, x^*\rangle$ und nennen das duale Paarung oder duales Produkt.

- Lineare beschränkte Funktionale sind stetige Abbildungen. (Zum Beweis siehe Stetigkeit linearer beschränkter Operatoren).
- $\mathcal{X}^*$ wird durch die Norm: $\|x^*\|_{\mathcal{X}^*} = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x^*, x\rangle|$ ein normierter Raum.
- $\mathcal{X}^*$ ist ein Banachraum. **Beweis** der Vollständigkeit: Es sei (x_n^*) eine Cauchyfolge, d.h., für alle ε existieren $n, m \geq N(\varepsilon)$ mit $\|x_n^* - x_m^*\| < \varepsilon$. Aus

  $$|\langle x, x_n^*\rangle - \langle x, x_m^*\rangle| = |\langle x, x_n^* - x_m^*\rangle| \leq \|x_n^* - x_m^*\| \cdot \|x\| \leq \varepsilon\|x\|$$

  folgt, daß die Folge $(\langle x, x_n^*\rangle)$ eine Cauchyfolge reeller Zahlen ist. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist, existiert ein Grenzwert $h(x) = \lim_{n\to\infty} \langle x, x_n^*\rangle$. $h(x)$ ist ein lineares beschränktes Funktional. Es existiert also ein x^* mit $h(x) = \langle x, x^*\rangle$. Läßt man in der obigen Ungleichung $m \to \infty$ gehen, folgt

  $$|\langle x, x_n^*\rangle - \langle x, x^*\rangle| = |\langle x, x_n^* - x^*\rangle| \leq \varepsilon\|x\|$$

  Betrachtet man nur x mit $\|x\| = 1$, erhält man

  $$\|x_n^* - x^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x_n^* - x^*, x\rangle| \leq \varepsilon$$

- Es gilt die Hölderungleichung: $|\langle x^*, x\rangle| \leq \|x^*\| \cdot \|x\|$

- Üblicherweise werden Funktionale auf Teilmengen eines Raumes definiert und dann auf den ganzen Raum fortgesetzt. Die Möglichkeit dazu beschreibt der Satz von Hahn-Banach, der im allgemeinen mit dem Auswahlaxiom bewiesen wird. Im separablen Raum ist der Beweis ohne Auswahlaxiom möglich.
- Es gilt $\|x\| = \sup_{\|x^*\|\leq 1} |\langle x^*, x\rangle|$. Die Ungleichung $\geq$ folgt aus der Hölderungleichung. Die Existenz eines scharfen x^* folgt aus dem Satz von Hahn-Banach. Für den seperablen Raum $\mathcal{X} = \mathcal{C}(\mathcal{Z})$ mit kompaktem, metrisierbarem $\mathcal{Z}$ kann man ein scharfes x^* konstruieren. Es ist z.B. $x^* = \delta_z$, wobei z der Punkt ist, indem das Maximum des Betrages angenommen wird.
- $\mathcal{X}$ und $\mathcal{X}^*$ **separieren** sich gegenseitig. D.h.:
  Aus $\langle x, x^*\rangle = 0$ für alle $x^* \in \mathcal{X}^*$ folgt $x = 0$.
  Aus $\langle x, x^*\rangle = 0$ für alle $x \in \mathcal{X}$ folgt $x^* = 0$.

6.1.2 Der duale Raum eines Riesz-Raumes

Es sei $\mathcal{X}$ ein Banachverband mit Ordnungsrelation und positivem Kegel $\mathcal{X}_+$.
In $\mathcal{X}^*$ wird eine Ordnungsrelation durch

$$x^* \leq y^* \iff \langle x, x^*\rangle \leq \langle x, y^*\rangle,\ \forall x \in \mathcal{X}_+$$

induziert. Das entspricht der Definition der Positivität: Eine lineare Abbildung ist positiv, wenn sie auf positiven Argumenten positive Werte annimmt:

$$x^* \geq 0 \iff \langle x, x^*\rangle \geq 0,\ \forall x \in \mathcal{X}_+$$

Bemerkung: In $\mathcal{C}$ wurde die Ordnung punktweise definiert. Das ist in einem linearen Raum nicht sinnvoll, da $\langle x, x^*\rangle$ und $\langle (-x), x^*\rangle$ verschiedene Vorzeichen haben.

Wegen $\langle x, x^*\rangle = \langle x_+, x^*\rangle - \langle x_-, x^*\rangle$ reicht für die Definition eines Funktionals $x^* \in \mathcal{X}^*$ seine Definition auf positiven Elementen $x \in \mathcal{X}_+$. Genauer, es gilt folgendes
Lemma: Es sei $h(x)$ eine lineare beschränkte Funktion $h : \mathcal{X}_+ \to \mathbb{R}$. Dann existiert ein $x^* \in \mathcal{X}^*$, sodaß $\langle x, x^*\rangle = h(x_+) - h(x_-)$ die einzige Erweiterung von h auf ganz $\mathcal{X}^*$ ist.
Beweis: Siehe Kaplan S. 89

Genau wie sich $\mathcal{X}^*$ in jedem Fall als Banachraum herausstellte, auch wenn $\mathcal{X}$ nicht vollständig ist, hat $\mathcal{X}^*$ in jedem Fall gewisse Abschlußeigenschaften, falls $\mathcal{X}$ ein Banachverband ist. Insbesondere ist $\mathcal{X}^*$ mit der oben definierten Ordnung ein Riesz-Raum, weil er $x^* \vee y^*$ und $x^* \wedge y^*$ enthält. $\mathcal{X}^*$ ist somit auch ein Banachverband. Außerdem ist er stets ordnungsabgeschlossen. Dazu definieren wir den Begriff **Dedekind-vollständig**:
Eine Folge $(x_n) \subset \mathcal{X}$ heißt **ansteigend**, falls $x_i \leq x_{i+1}$.
Eine Folge $(x_n) \subset \mathcal{X}$ heißt **absteigend**, falls $x_i \geq x_{i+1}$.
Ein Riesz-Raum heißt **Dedekind-vollständig**, falls jede beschränkte ansteigende (absteigende) Folge ein Supremum (Infimum) besitzt, d.h. falls $\vee_i x_i = x \in \mathcal{X}$ und $\wedge_i x_i = x \in \mathcal{X}$. Wir schreiben $x_n \nearrow x$ bzw. $x_n \searrow x$.
Es stellt sich heraus, daß der duale eines Riesz-Raumes stets Dedekind-vollständig ist (im Gegensatz z.B. zu $\mathcal{C}$). Es gilt folgender fundamentaler Satz:

Satz von Riesz (über den dualen eines Riesz-Raum): Ist $\mathcal{X}$ ein Riesz-Raum, so ist $\mathcal{X}^*$ ein Dedekind-vollständiger Riesz-Raum.

Um diesen Satz zu beweisen muß insbesondere als erstes verstanden werden, wie man in $\mathcal{X}^*$ $x^* \vee y^*$ und $x^* \wedge y^*$ berechnen kann. Wir verbinden den Beweis des Satzes mit verschiedenen weiteren zu beweisenden Aussagen. Der Beweis des Satzes ergibt sich im Laufe dieser Betrachtungen. Wir beweisen folgende Aussagen:

1. Zu einem $x^* \in \mathcal{X}^*$ existiert x^*_+ und läßt sich brechnen als

$$\langle x, x^*_+ \rangle = \sup_{y \in [0,x]} \langle y, x^* \rangle \ , x \in \mathcal{X}_+ \tag{27}$$

2. Zu $x^*, y^* \in \mathcal{X}^*$ existieren $x^* \vee y^* \in \mathcal{X}^*$ und $x^* \wedge y^* \in \mathcal{X}^*$ (hieraus folgt, daß $\mathcal{X}^*$ ebenfalls ein Riesz-Raum ist) und lassen sich berechnen als

$$\langle x, x^* \vee y^* \rangle = \sup_{a+b=x, a,b \geq 0} \left[\langle a, x^* \rangle + \langle b, y^* \rangle \right] \tag{28}$$

$$\langle x, x^* \wedge y^* \rangle = \inf_{a+b=x, a,b \geq 0} \left[\langle a, x^* \rangle + \langle b, y^* \rangle \right] \tag{29}$$

3. $\mathcal{X}^*$ ist Dedekind-vollständig. D.h. $(x^*_n) < \infty \Longrightarrow \exists x^* \in \mathcal{X}^* : x^* = \sup_n x^*_n$.

Siehe Kaplan S. 52ff
Siehe Kaplan S. 55 (10.4) $\Longleftarrow$ S. 55 (10.3), S. 45 Ex 6.
Hier wird also das Supremum über den positiven Teil definiert. Normalerweise wird umgekehrt vorgegangen ($x_+ = 0 \vee x$). Wir definieren hier x_+ als das kleinste y mit $y \geq 0$, $y \geq x$.
Beweise:
Zu 1): Es sei $x^* \in \mathcal{X}^*$

$$h(x) := \sup_{y \in [0,x]} \langle y, x^* \rangle \ , x \in \mathcal{X}_+$$

Wir beweisen in mehreren Schritten, daß h ein lineares beschränktes Funktional ist und $h(x) = \langle x, x^*_+ \rangle$ gilt. Die Positivität von $h(x)$ ist offensichtlich, da $y = 0$ gewählt werden kann.

- $h(x_1 + x_2) \geq h(x_1) + h(x_2)$
  Für alle $a \in [0, x_1]$ und $b \in [0, x_2]$ folgt

  $$0 \leq a + b \leq x_1 + x_2 \implies \langle a, x^* \rangle + \langle b, x^* \rangle \leq \langle x_1 + x_2, x^* \rangle \leq h(x_1 + x_2)$$

  Auf diese Ungleichung $\sup_{a \in [0,x_1]}$ und dann $\sup_{b \in [0,x_2]}$ angewendet ergibt die Behauptung.
- $h(x_1 + x_2) \leq h(x_1) + h(x_2)$
  Es sei $c \in [0, x_1 + x_2]$. Nach dem Zerlegungslemma existieren $a \in [0, x_1]$ und $b \in [0, x_2]$ mit $c = a + b$. hieraus folgt

  $$\langle c, x^* \rangle = \langle a, x^* \rangle + \langle b, x^* \rangle \leq h(x_1) + h(x_2)$$

  Auf diese Ungleichung $\sup_{c \in [0,x_1+x_2]}$ angewendet ergibt die Behauptung.

- $h(\lambda x) = \lambda h(x)$ ist offensichtlich. Damit ist h ein lineares beschränktes Funktional auf $\mathfrak{X}_+$. Wir setzen es als $h(x) = h(x_+) - h(x_-)$ auf ganz $\mathfrak{X}$ fort und nennen es $y^* \in \mathfrak{X}^*$ (definiert als $\langle x, y^* \rangle = h(x)$).
- Es ist $y^* = x^*_+$. Beweis: Angenommen, es existiert ein $y^*_1 \in \mathfrak{X}^*$ mit $y^*_1 \geq 0$ und $y^*_1 \geq y^*$. Dann gilt für alle $a \in [0, x]$

  $$\langle x, y^*_1 \rangle \geq \langle a, y^*_1 \rangle \geq \langle x, y^* \rangle$$

  Hieraus folgt

  $$\langle x, y^*_1 \rangle \geq \sup_{a \in [0,x]} \langle a, y^* \rangle = \langle x, y^* \rangle$$

  Folglich ist y^* das kleinste Funktional mit $y^* \geq 0$ und $y^* \geq x^*$.

Zu 2): Es sei $x^*, y^* \in \mathfrak{X}^*$. Wir berechnen $x^* \vee y^*$ und $x^* \wedge y^*$ also $\langle x, x^* \vee y^* \rangle$ bzw. $\langle x, x^* \wedge y^* \rangle$. Dazu verwenden wir eine Formel, die das Supremum mit dem positiven Teil koppelt:

$$a \vee b = a + (b - a)_+ \ , \ a \wedge b = b - (b - a)_+ \tag{30}$$

Bereits diese Formel zeigt, daß aus der Existenz des positiven Teils die des Supremums folgt. Also ist $\mathfrak{X}^*$ ein Riesz-Raum (die Existenz des Infimums folgt analog).
Wir beweisen die Berechnungsformel (28). Dazu benutzen wir (27) und (30) in der Form $x^* \vee y^* = x^* + (y^* - x^*)_+$. Das ergibt mit $x \in \mathfrak{X}_+$

$$\begin{aligned}
\langle x, x^* \vee y^* \rangle &= \langle x, x^* \rangle + \langle x, (y^* - x^*)_+ \rangle = \langle x, x^* \rangle + \sup_{y \in [0,x]} \langle y, y^* - x^* \rangle = \\
&= \sup_{y \in [0,x]} \big[\langle x, x^* \rangle + \langle y, y^* - x^* \rangle \big] = \sup_{y \in [0,x]} \big[\langle y, y^* \rangle + \langle x - y, x^* \rangle \big] = \\
&= \sup_{x = a + b, a, b \geq 0} \big[\langle b, y^* \rangle + \langle a, x^* \rangle \big]
\end{aligned}$$

Analog erhalten wir aus $x^* \wedge y^* = y^* - (y^* - x^*)_+$

$$\begin{aligned}
\langle x, x^* \wedge y^* \rangle &= \langle x, y^* \rangle - \langle x, (y^* - x^*)_+ \rangle = \langle x, y^* \rangle - \sup_{y \in [0,x]} \langle y, y^* - x^* \rangle = \\
&= \langle x, y^* \rangle + \inf_{y \in [0,x]} \langle y, x^* - y^* \rangle = \\
&= \inf_{y \in [0,x]} \big[\langle x, y^* \rangle + \langle y, x^* - y^* \rangle \big] = \inf_{y \in [0,x]} \big[\langle x - y, y^* \rangle + \langle y, x^* \rangle \big] = \\
&= \inf_{x = a + b, a, b \geq 0} \big[\langle b, y^* \rangle + \langle a, x^* \rangle \big]
\end{aligned}$$

Zu 3): Es sei $(x^*_n) \subset \mathfrak{X}^*$ ansteigend und beschränkt $x_n \leq c$. Wir beweisen, daß ein $x^* \in \mathfrak{X}^*$ mit $x^*_n \nearrow x^*$ existiert.
Es sei $x \in \mathfrak{X}_+$. Dann ist $\langle x, x^*_n \rangle$ eine monoton wachsende beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Folglich konvergiert sie. Es sei $\lim_{n \to \infty} \langle x, x^*_n \rangle = h(x)$. Offensichtlich ist $h(x)$ ein lineares beschränktes Funktional auf $\mathfrak{X}_+$. Wir setzen es durch $h(x) = h(x_+) - h(x_-)$ auf ganz $\mathfrak{X}$ fort und nennen es x^*. Es ist also $\lim_{n \to \infty} \langle x, x^*_n \rangle = \langle x, x^* \rangle$.
Offensichtlch ist $\langle x, x^* \rangle = \sup_n \langle x, x^*_n \rangle$, da für alle $y^* \geq x^*_n$ offensichtlich $\langle x, y^* \rangle \geq \langle x, x^* \rangle$ gilt.

Das Supremum einer ansteigenden und beschränkten Folge liegt also ebenfals in $\mathcal{X}^*$. Analog beweist man, daß das Infimum einer absteigenden und beschränkten Folge in $\mathcal{X}^*$ liegt.
Folglich ist $\mathcal{X}^*$ Dedekind-vollständig.
Der Satz ist vollständig bewiesen. □

Bemerkung: Häufig werden zwei verschiedene duale Räume definiert, $\mathcal{X}^*$ als dualer Banachraum, d.h. die Menge der Norm-beschränkten Funktionale und $\mathcal{X}^b$ als dualer Banachraum, d.h. die Menge der Ordnungs-beschränkten Funktionale. Ist $\mathcal{X}$ Banachverband, dann ist $\mathcal{X}^* = \mathcal{X}^b$. Da uns nur Banachverbände interessieren, haben wir von Anfang an auf diese Unterscheidung verzichtet. (Siehe Kaplan S. 89)

6.1.3 Die AM-AL Dualität

Wir betrachten hier den Zusammenhang von AM- und AL-Räumen.
Es sei vorerst $\mathcal{X}$ ein beliebiger Riesz-Raum. Wir erinnern an die Gleichung (die in jedem Riesz-Raum gilt)

$$|x| = x_+ + x_- = x_+ \vee x_-$$

Aus ihr folgt die offensichtliche Ungleichungkette

$$\|x_+\| \vee \|x_-\| \leq \|x_+ \vee x_-\| = \|\ |x|\ \| = \|x_+ + x_-\| \leq \|x_+\| + \|x_-\|$$

oder anders geschrieben für beliebige disjunkte $a, b \in \mathcal{X}_+$

$$\|a\| \vee \|b\| \leq \|a \vee b\| = \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$$

Die Norm eines Elementes $x \in \mathcal{X}$ liegt also zwischen den beiden Extremen $\|x_+\| \vee \|x_-\|$ und $\|x_+\| + \|x_-\|$. Diese beiden Extreme definieren die Norm in AM- bzw AL-Räumen:
Ein Banachverband $\mathcal{X}$ heißt **AM-Raum**, wenn für $x_1, x_2 \in \mathcal{X}_+$ gilt: $\|x_1 \vee x_2\| = \|x_1\| \vee \|x_2\|$.
Ein Banachverband $\mathcal{Y}$ heißt **AL-Raum**, wenn für $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}_+$ gilt: $\|y_1 + y_2\| = \|y_1\| + \|y_2\|$.
Wir bezeichnen im weiteren AM-Räume mit $\mathcal{X}$ und AL-Räume mit $\mathcal{Y}$ und deren Elemente mit entsprechenden kleinen Buchstaben.

Es stellt sich heraus, daß AM- und AL-Räume zueinander dual sind.

Satz: Ist $\mathcal{X}$ ein AM-Raum, dann ist $\mathcal{Y} = \mathcal{X}^*$ ein AL-Raum.
Beweis: Wir zeigen, daß für alle $\varepsilon > 0$ und alle $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}_+$ gilt: $\|y_1 + y_2\| \geq \|y_1\| + \|y_2\| - 2\varepsilon$.
Aus der Definition der Norm in $\mathcal{Y}$ über das Supremum folgt, daß es für alle $\varepsilon > 0$ solche $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ mit $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ (folgt aus (26)) gibt, daß $\langle x_1, y_1 \rangle \geq \|y_1\| - \varepsilon$ und $\langle x_2, y_2 \rangle \geq \|y_2\| - \varepsilon$.
Es sei $x = x_1 \vee x_2$. Dann ist $\|x\| = \|x_1 \vee x_2\| = \max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} = 1$

$$\|y_1 + y_2\| \geq \langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle \geq \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle \geq \|y_1\| + \|y_2\| - 2\varepsilon$$

Aus der Beliebigkeit von ε folgt die Behauptung. □

Satz: Ist $\mathcal{Y}$ ein AL-Raum, dann ist $\mathcal{X} = \mathcal{Y}^*$ ein AM-Raum mit $\mathbb{1}$.
Beweis:
Es seien $x_1, x_2 \in \mathcal{X}_+$. Wir haben $\|x_1 \vee x_2\| = \|x_1\| \vee \|x_2\|$ zu zeigen. OBdA nehmen wir an, daß $\|x_1\| \leq \|x_2\|$ und zeigen $\|x_1 \vee x_2\| = \|x_1\|$. Aus $x_1 \vee x_2 \geq x_1$ folgt $\|x_1 \vee x_2\| \geq \|x_1\|$, sodaß es ausreicht, $\|x_1 \vee x_2\| \leq \|x_1\|$ zu zeigen.

Hierfür reicht es zu zeigen, daß für alle $y \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ gilt: $\langle x_1 \vee x_2, y\rangle \leq \|x_1\|$. Wir betrachten ein fixiertes $y \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$. Nach der Definition des Supremums im dualen Raum haben wir für alle möglichen Zerlegungen $y = y_1 + y_2$ mit $y_1, y_2 \in \mathcal{Y}_+$ $\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle \leq \|x_1\|$ zu zeigen. Es gilt:

$$\begin{aligned}\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle &= \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle = \|y_1\|\langle x_1, y_1/\|y_1\|\rangle + \|y_2\|\langle x_2, y_2/\|y_2\|\rangle \leq \\ &\leq \|y_1\|\|x_1\| + \|y_2\|\|x_2\| \leq \|y_1\|\|x_1\| + \|y_2\|\|x_1\| = \big(\|y_1\| + \|y_2\|\big)\|x_1\| = \\ &= \|y_1 + y_2\|\|x_1\| = \|y\|\|x_1\| = \|x_1\|\end{aligned}$$

Zum Abschluß ermitteln wir die Ordnungseinheit im AM-Raum $\mathcal{X}$. Es sei $y \in \mathcal{Y}_+$. Wir setzen $h(y) = \|y\|$. h ist ein lineares und beschränktes Funktional auf $\mathcal{Y}$ (die Additivität folgt aus den Eigenschaften der AL-Norm, die Homogenität ist offensichtlich).
Wir setzen es auf ganz $\mathcal{Y}$ fort und nennen es $\mathbb{1}$:

$$\langle \mathbb{1}, y\rangle = \|y_+\| - \|y_-\|$$

Daß es tatsächlich Ordnungseinheit ist folgt aus (es sei $y \in \mathcal{Y}_+$, $x \in \mathcal{X}_+$)

$$\langle x, y\rangle \leq \|x\|\|y\| = \|x\|\langle \mathbb{1}, y\rangle = \langle \|x\|\mathbb{1}, y\rangle$$

folglich gilt $x \leq \|x\|\mathbb{1}$. $\square$

6.2 Maßtheorie

Es stellt sich heraus, daß der Raum $\mathcal{C}^*$ isomorph zum Raum der Radonmaße ist. Deshalb können wir uns unter den Elementen von $\mathcal{C}^*$ gut bekannte Maße und müssen uns nicht abstrakte Funktionale vorstellen.

Wir rekapitulieren hier ein paar Definitionen und Sätze aus der Maßtheorie, beschränken uns aber weitgehend auf Wahrscheinlichkeitsmaße. Das weitere ist DS I, Bauer und Elstrodt entnommen.
Es sei $\mathcal{Z}$ eine Menge und $2^{\mathcal{Z}}$ die Menge der Teilmengen von $\mathcal{Z}$.
Die Idee der Maßtheorie ist es, Begriffe wie "Flächeninhalt", "Volumen", "Wahrscheinlichkeit" auf möglichst viele Teilmengen zu verallgemeinern. Im allgemeinen ist es wie wir wissen (Paradoxa mit reellen Zahlen) nicht möglich, den Inhaltsbegriff auf alle Mengen aus $2^{\mathcal{Z}}$ auszudehnen. Deshalb wird bei der Entwicklung der Maßtheorie in drei Schritten vorgegangen:

- Definition eines Mengensystems (σ-Algebra) unter dem Gesichtspunkt der Abzählbarkeit (um Überabzählbarkeit zu vermeiden).
- Definition additiver Mengenfunktionen (Maße).
- Definition eines geeigneten Integralbegiffs (Lebesgueintegral) als duale Paarung zwischen gewissen geeigneten Funktionen (intensive Größen) und Maßen (extensive Größen).

Dieses Konzept läßt viel Freiheit bei der Auswahl des Mengensystems. Sinnvoll ist es, so ein Mengensystem festzulegen, das im Einklang mit der Topologie in $\mathcal{Z}$ steht. Das wird im weiteren gemacht und führt zur mathematisch einfachsten Konstruktion (Borelmengen und Radonmaße).

6.2.1 Mengenalgebren

- Algebra $\Sigma \subset 2^{\mathcal{Z}}$: $\emptyset, \mathcal{Z} \in \Sigma$, $A \in \Sigma \Longrightarrow \mathcal{Z} \setminus A \in \Sigma$, $A_i \in \Sigma \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \Sigma$
- σ-Algebra $\Sigma \subset 2^{\mathcal{Z}}$: analog, aber $A_i \in \Sigma \Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$.
- $(\mathcal{Z}, \Sigma)$ heißt Meßraum
- $A \in \Sigma$ heißt meßbare Menge.
- Eine Funktion $f : (\mathcal{Z}, \Sigma) \to (\mathcal{Z}', \Sigma')$ deren inverse meßbare Mengen auf meßbare Urbilder abbildet heißt meßbare Funktion.

In einer σ-Algebra – im Gegensatz zu einer Toplogie, die auch spezielle Teilmengen auwählt – gibt es zwischen einer Menge und ihrem Komplement keinen prinzipiellen Unterschied. Das führt dazu, daß man die Grundmenge $\mathcal{Z}$ in disjunkte Mengen aus der σ-Algebra zerlegen kann. In der Maßtheorie ist deshalb die disjunkte Zerlegung ein wichtiger Begriff, z.B. für die Definition des Integrals.
In einem toplogischen Raum gibt es als ausgezeichnete Mengen offene und abgeschlossene Mengen. Mit solchen Mengen kann man einen toplogischen Raum im allgemeinen nicht disjunkt zerlegen. In der Topologie ist der Begriff der **offenen Überdeckung** der entsprechende zentrale Begriff.

6.2.2 Maße, insbesondere Wahrscheinlichkeitsmaße

- Eine **σ-Algebra** einer Grundmenge $\mathcal{Z}$ ist eine Teilmenge der Potenzmenge $2^{\mathcal{Z}}$, die $\mathcal{Z}$ enthält und abgeschlossen ist bezüglich der Komplementbildung und abzählbarer Vereinigungen.
- Ein **Meßraum** $(\mathcal{Z}, \Sigma)$ ist eine Grundmenge $\mathcal{Z}$ zusammen mit einer σ-Algebra Σ.
- Ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** auf einem Meßraum $(\mathcal{Z}, \Sigma)$ ist eine Funktion $\mu : \Sigma \longrightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (Kolmogorowsche Axiome)
  - $\mu(\mathcal{Z}) = 1$ (Normierung)
  - $\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ (σ-Additivität)
- Ein **Wahrscheinlichkeitsraum** $(\mathcal{Z}, \Sigma, \mu)$ ist die Kombination von Grundmenge (Ergebnismenge), σ-Algebra (Ereignisalgebra) und Wahrscheinlichkeitsmaß.
- Ein **Inhalt** ist eine endlich additive Mengenfunktion.
- Ein **Maß** ist eine σ-additive Mengenfunktion.

6.2.3 Das Lebesgueintegral

Es sei $\mathcal{Z} = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ eine disjunkte Zerlegung der Grundmenge mit Mengen B_i aus der Mengenalgebra und μ ein Maß. Dann läßt sich mit einer stückweisen auf den B_i konstanten Funktion g (es sei $g(z) = g_i$ auf B_i) die Summe $\sum_{i=1}^{n} g_i \mu(B_i)$ bilden. Diese Summe läßt sich durch geeignete Grenzwertbildung auf allgemeinere Funktionen verallgemeinern. Wir schreiben

$$\sum_{i=1}^{n} g_i \mu(B_i) \rightarrow \int_{\mathcal{Z}} g(z)\mu(dz)$$

und nennen diesen Ausdruck **Lebesgueintegral**.
Wann dieser Grenzwert existiert hängt entscheidend von der σ-Algebra, vom Maß μ und der Funktion g ab. Existiert der Grenzwert, dann heißt g integrierbar bezüglich μ.
Das Lebesgueintegral unterscheidet sich im allgemeinen vom Riemann-Stiltjes-Integral $\int_{\mathcal{Z}} g(z) d\mu(z)$. Hier ist $\mu(z)$ eine Funktion beschränkter Variation. Im Lebesgueintegral ist $\mu(B)$ eine additive Funktion auf einer Mengenalgebra.

6.2.4 Räume von Maßen

In der Wahrscheinlichkeitstheorie und in der Intergationstheorie (z.B. der Theorie der Lebesgue-Räume) wird ein Maß μ festgelegt. Das Tripel $(\mathcal{Z}, \Sigma, \mu)$ heißt dann **Wahrscheinlichkeits- oder Maßraum**. Die Festlegung eines Maßes ist gerechtfertigt, wenn es aus bestimmten Gründen ausgezeichnet ist. So kann z.B. $\mathcal{Z}$ nicht nur ein topologischer Raum, sondern eine topolgischen Gruppe sein. Dann ist das (auf kompakten Gruppen eindeutig bestimmte) Haarsches Maß natürlich ausgezeichnet. Das trifft z.B. für das Lebesguemaß im $\mathbb{R}^n$ zu, wenn man im $\mathbb{R}^n$ die Addition als Gruppenstruktur betrachtet.

Typischerweise ist nicht von Anfang an ein Maß ausgezeichnet. Im Gegenteil, häufig geht es gerade darum, ein spezielles Maß zu finden (z.B. als Lösung eine Problems). Dann sollte man das Maß in einem **Raum von Maßen** suchen. Das bietet sich an, da die Linearkombinationen von Maßen auch wieder als Maße interpretiert werden können.

Genau wie man verschiedene Banachräume von Funktionen mit der sup-Norm definieren kann, die dann AM-Räume werden, kann man Räume von Maßen betrachten, die mit der **Variationsnorm** ein Banachraum von Maßen werden.
Ist eine Menge von Maßen (oder Inhalten) auf einem Meßraum $(\mathcal{Z}, \Sigma)$ gegeben, kann man lineare Operationen einführen, die die Menge zu einem linearen Raum machen. Die Menge kann man ordnen, mit folgender Ordnungsrelation:

$$\mu \geq \nu \iff \mu(B) \geq \nu(B), \ B \in \Sigma$$

Diese Ordnungsrelation paßt zu folgenden Verbandsoperationen:

$$\begin{aligned} (\mu \wedge \nu)(A) &= \inf\{\mu(A \cap B) + \nu(A \setminus B) : B \in \Sigma\} \\ (\mu \vee \nu)(A) &= \sup\{\mu(A \cap B) + \nu(A \setminus B) : B \in \Sigma\} \end{aligned}$$

Das sind exakt dieselben Definitionen wie die Definitionen (28) und (29), nur daß anstelle allgemeiner Elemente des prädualen Raumes die charaktereistischen Funktionen von Borelmengen genommen werden.
Weiter kann man den positiven und negativen Teil eines Maßes

$$\begin{aligned} \nu_+(A) &= +\sup\{\nu(B) | B \subseteq A, B \in \mathcal{A}\} \\ \nu_-(A) &= -\inf\{\nu(B) | B \subseteq A, B \in \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

definieren. Diese Zerlegung wird auch Jordan-Zerlegung von Maßen genannt. Hieraus ergibt sich die Variationsnorm

$$\|\mu\| = \mu_+(\mathcal{Z}) + \mu_-(\mathcal{Z})$$

Sie macht einen Raum von Maßen zu einem AL-Raum. Ein AL-Raum kann der duale eines AM-Raumes sein, also eines Raumes mit sup-Norm (Räume beschränkter Funktionen).
In Abhängigkeit davon, was man für einen Raum beschränkter Funktionen betrachtet, erhält man als dualen Raum einen speziellen Raum von Maßen (oder Inhalten). Diesen – im allgemeinen nichttrivialen Isomorphismus – zwischen Räumen von Maßen und den zu Räumen beschränkter Funktionen dualen Räumen beschreibt der Darstellungssatz von Riesz, den es in verschiedenen Variationen gibt (siehe z.B. Jürgen Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie).

6.2.5 Die σ-Algebra der Borelmengen

Ist $\mathcal{Z}$ ein topologischer Raum, ist es sinnvoll, die Struktur des topologischen Raumes (System offener Mengen) mit der des Meßraumes (σ-Algebra) verträglich zu machen. Außerdem kann man zusätzliche Bedingungen an die betrachteten Maße stellen.

- Eine **Borelalgebra** $\mathcal{B}(\mathcal{Z})$ in einem topologischen Raum $\mathcal{Z}$ ist die minimale σ-Algebra, die alle abgeschlossenen Mengen enthält.
- Ein Maß μ heißt von innen regulär, wenn $\mu(B) = \sup_{K \subset B \in \mathcal{B}} \mu(K)$ (hier sind K kompakte Mengen)
- Ein Maß μ heißt von außen regulär, wenn $\mu(B) = \inf_{U \supset B \in \mathcal{B}} \mu(U)$ (hier sind U offene Mengen)
- Ein Maß μ heißt regulär, wenn es von innen und von außen regulär ist.

- Ein Maß μ heißt regulär, wenn (Definition in DS I) für alle $A \in \Sigma$ und alle $\varepsilon > 0$ solche $F, G \in \Sigma$ existieren, daß $G \supset \mathrm{int} G \supset A \supset \overline{F} \supset F$ und daß für alle $\Sigma \ni C \subset G \setminus F$ gilt $|\mu(C)| \leq \varepsilon$.
- Ein Maß heißt Radon-Maß, wenn es regulär und endlich ist.

6.2.6 Der Raum der Radonmaße

Es sei $\mathcal{Z}$ ein kompakter, erstabzählbarer Hausdorffraum. Weiter sei $\mathcal{T}(\mathcal{Z})$ eine Menge von Maßeen μ mit folgenden Eigenschaften

- $\mathcal{B}(\mathcal{Z})$ sei die Borelalgebra der Teilmengen von $\mathcal{Z}$, die von den offenen (oder äquivalent abgeschlossenen $\mathcal{F}$ oder kompakten $\mathcal{K}$) Mengen $\mathcal{O}$ von $\mathcal{Z}$ generiert werden.
- μ ist ein Maß (σ-additive Funktion).
- μ ist beschränkt: $\sup_{B \in \mathcal{B}} |\mu(B)| < \infty$
- μ ist von innen regulär: $\mu(B) = \sup_{\mathcal{F} \ni K \subset B} \mu(K)$
- μ ist von außen regulär: $\mu(B) = \inf_{\mathcal{O} \ni U \supset B} \mu(U)$

Maße, die von außen und innen regulär sind, heißen reguläre Maße. Beschränkte reguläre Maße heißen Radonmaße.
$\mathcal{T}(\mathcal{Z})$ hat folgende Eigenschaften

- $\mathcal{T}(\mathcal{Z})$ ist ein linearer Raum.
- Mit der Variationsnorm ist $\mathcal{T}(\mathcal{Z})$ ein Banachraum.
- Mit der Ordnung $\mu \geq 0 \iff \mu(B) \geq 0$, $B \in \mathcal{B}$ ist $\mathcal{T}(\mathcal{Z})$ ein Banachverband (mit den oben definierten $\wedge$ und $\vee$).

6.2.7 AM- und AL-Räume als Räume von Funktionen und Maßen

Spezielle AM-Räume sind Räume stetiger Funktionen (beschränkte, abklingende, mit kompaktem Träger, ...) oder L_∞-Räume auf den verschiedensten Maßen. Der Raum der beschränkten Funktionen auf $\mathcal{Z}$ kann interpretiert werden als der Raum stetiger Funktionen auf $\mathcal{Z}$ mit der diskreten Topologie. Wir schreiben $\mathcal{C}(\mathcal{Z}_d)$. Häufig kann man einen abstrakten AM-Raum als Raum gewisser Funktionen auf einer Menge (Funktionen vom Punkt) betrachten. Das ist das, wie man sich im allgemeinen intensive Größen vorstellt.
Die im letzten Abschnitt betrachteten Räume von Maßen sind spezielle AL-Räume. Maße sind additive Funktionen auf ausgewählten Teilmengen von $\mathcal{Z}$. Also das, wie man sich im allgemeinen extensive Größen vorstellt.
Genau wir es oft sinnvoll ist, das Element eines abstrakten AM-Raumes als Funktion von Punkten zu verstehen, ist es oft sinnvoll, das Element eines abstrakten AL-Raumes als Funktion von Mengen zu verstehen.
Maße unterscheiden sich durch die Mengenalgebren, auf denen sie definiert sind, durch verschiedene Regularitätseigenschaften und ob sie σ-additiv oder nur additiv sind (dann werden sie üblicherweise Inhalt genannt).
Wir haben festgestellt, daß abstrakte AM- und AL-Räume zueinander dual sind. Es liegt die Frage nahe, ob gewisse Räume von Funktionen und gewisse Räume von Maßen in einem Dualitätsverhältnis stehen. Das ist häufig der Fall, was im allgemeinen ein schwer zu beweisender

Fakt sein kann. Sätze, die einen Isomorphismus zwischen dem dualen eines konkreten AM-Raumes und einem AL-Raum herstellen werden als Rieszsche Darstellungssätze bezeichnet. Wir interessieren uns hier nur für Räume $\mathcal{C}(\mathcal{Z})$ mit kompaktem $\mathcal{Z}$. Es stellt sich heraus, daß der zu ihm duale Raum $\mathcal{C}^*(\mathcal{Z})$ der Raum der Radonmaße ist. Radonmaße sind somit das beste, was es unter den Maße gibt.

6.2.8 Der Rieszsche Darstellungssatz

Es sei $\mathcal{T}(\mathcal{Z})$ der Raum der Radonmaße über der σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathcal{Z})$. Es gilt folgender
Rieszscher Darstellungssatz: Zwischen $\mathcal{C}^*(\mathcal{Z})$ und $\mathcal{T}(\mathcal{Z})$ besteht ein isometrischer Isomorphismus, der die Ordnung erhält und vermittelt wird durch

$$\langle g, p_\mu \rangle = \int_{\mathcal{Z}} g(z)\mu_p(dz) \ , \quad g \in \mathcal{C} \tag{31}$$

Es gilt $\|p_\mu\|_{\mathcal{C}^*} = \|\mu_p\|_{\mathcal{T}}$ und $p_\mu \geq 0 \iff \mu_p \geq 0$.
Beweis: Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt, die hier nur angedeutet werden und z.B. in DS I oder Elstrodt im Detail nachgelesen werden können.

- $\mathcal{T}(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{C}^*(\mathcal{Z})$. Da ein Radommaß $\mu \in \mathcal{T}(\mathcal{Z})$ endlich ist, ist jede stetige Funktion integrierbar. Folglich wird durch (31) ein beschränktes (weil $|\langle g, p_\mu\rangle| \leq \|g\||\mu|(\mathcal{Z})$) lineares Funktional definiert.
- $\mathcal{C}^*(\mathcal{Z}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{Z})$. Wir haben zu zeigen, daß jedes Funktional $p \in \mathcal{C}^*$ ein Radommaß $\mu_p \in \mathcal{T}(\mathcal{Z})$ generiert. Dazu muß es konstruiert werden.

  Würden charakteristische Funktionen von Borelmengen in $\mathcal{C}(\mathcal{Z})$ liegen, würde man einfach $\mu_p(B) := \langle \mathbb{1}_B, p\rangle$ definieren. Da das nicht der Fall ist, muß $\mathbb{1}_B$ geeignet durch Urysohn-Funktionen approximiert werden.

  Man konstruiert zwei Maße μ_* und μ^* auf folgende Weise:

  $$\begin{aligned} \mu_*(K) &= \inf\{\langle g, p\rangle : \ g \geq \mathbb{1}_K, \ K \in \mathcal{K}\} \\ \mu_*(B) &= \sup_{K \subset B} \mu_*(K) \\ \mu^*(B) &= \inf_{B \subset U} \mu_*(U) \end{aligned}$$

  Im weiteren zeigt man, daß $\mu_p(B) = \mu_*(B) = \mu^*(B)$ für $B \in \mathcal{B}$, daß μ_p ein Maß ist und daß μ regulär und endlich ist.
- Man beweist (31) für stetige Funktionen. Dazu wird der Wertebereich einer Funktion g in endlich viele kleine Streifen der Art $\{z \in \mathcal{Z} | a < g(z) \leq b\}$ zerlegt, deren Urbilder Borelmengen sind, deren Maße man geeignet abschätzen kann.
- Man beweist die Eindeutigkeit, d.h. verschiedene Maße erzeugen verschiedene Funktionale. Dazu reicht es positive Maße und positive Funktionen zu betrachten.
- Die Gleichheit der Normen $\|p_\mu\|_{\mathcal{C}^*} = \|\mu_p\|_{\mathcal{T}}$ ist offensichtlich. Man zerlege in positiven und negativen Teil und setze $g = \mathbb{1}$.
- Die Übereinstimmung der Ordnung zeigt man so: Falls $\mu_p \geq 0$ folgt aus (31) auch $\langle g, p_\mu \rangle \geq 0$ für $g \in \mathcal{C}_+$. Umgekehrt: Angenommen es stimmt nicht. Dann existiert eine Menge $A \in \mathcal{B}$ mit $\mu_p(A) < 0$. Dann folgt aus der Regularität, daß es auch eine offene Menge $U \supset A$ mit $\mu_p(U) < 0$ gibt. Wir finden eine Urysohnfunktion, die außerhalb von U Null ist und erhalten einen Widerspruch.

Bemerkung: (zum Unterschied des $\mathcal{C}$–$\mathcal{C}^*$ Konzeptes und Lebesgueräumen wie $L_1(\mu)$):
Der $L_1(\mu)$-Raum ist definiert als der Raum der Funktionen g, indem das Lebesgue (31) für *ein* gegebenes Maß μ Sinn hat, die also bezüglich μ integrieren lassen. Diese Funktionen sind im allgemeinen nicht stetig und lassen sich nicht ohne weiteres als Funktionen von Punkten z interpretieren.
Die $\mathcal{C}$–$\mathcal{C}^*$ Dualität besagt, daß die stetigen Funktionen – die wohl definierte Funktionen von Punkten z sind – gerade die sind, die sich bezüglich *aller* Radonmaße integrieren lassen.

6.2.9 Der biduale Raum $\mathcal{X}^{**}$

Völlig analog zur Definition von $\mathcal{X}^*$ läßt sich der lineare Raum $\mathcal{X}^{**} = (\mathcal{X}^*)^*$ definieren. Er hat folgende Eigenschaften

- $\mathcal{X} \subset \mathcal{X}^{**}$.
- Falls $\mathcal{X}^*$ ein AL-Raum ist, ist $\mathcal{X}^{**}$ ein AM-Raum mit der Einheit $\mathbb{1}^{**}$. Sie bestimmt sich aus

$$\langle \mathbb{1}^{**}, x^* \rangle = \|x_+^*\| - \|x_-^*\| = \langle \mathbb{1}, x_+^* \rangle - \langle \mathbb{1}, x_-^* \rangle = \langle \mathbb{1}, x^* \rangle$$

- Jedes $x \in \mathcal{X}$ induziert ein $\mathbf{J}x \in \mathcal{X}^{**}$: $\langle x, x^* \rangle = \langle x^*, \mathbf{J}x \rangle$. Aus $\|x\| = \sup_{\|x^*\|<1} |\langle x, x^* \rangle|$ folgt

$$\|x\| = \sup_{\|x^*\|=1} |\langle x, x^* \rangle| = \sup_{\|x^*\|=1} |\langle x^*, \mathbf{J}x \rangle| = \|\mathbf{J}x\|_{**}$$

  Hieraus folgt, daß die kanonische Einbettung $\mathbf{J} : \mathcal{X} \to \mathbf{J}\mathcal{X}$ ein isometrischer Isomorphismus ist.
- Ein linearer Raum, für den die kanonische Einbettung ein isometrischer Isomorphismus zwischen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{X}^{**}$ ist, heißt reflexiv. Dann kann $\mathcal{X}^{**} = \mathcal{X}$ identifiziert werden. Dieser Fall ist für uns nicht interessant.

6.2.10 Der erweiterte Beobachtungsraum $\mathcal{C}^{**}(\mathcal{Z})$

Höhere Dualräume von Banachräumen sind immer schlechter zu beschreiben. Das trifft auch für $\mathcal{C}^{**}(\mathcal{Z})$ zu. Relativ einfach sind Teilmengen von $\mathcal{C}^{**}(\mathcal{Z})$ zu beschreiben. In $\mathcal{C}^{**}(\mathcal{Z})$ sind enthalten:

- Vage Grenzwerte von Folgen stetiger Funktionen (Satz von Goldstine).
- Die $\mathbb{1}^{**}$ in $\mathcal{C}^{**}(\mathcal{Z})$ liegt in $\mathcal{C}(\mathcal{Z})$ und es ist $\mathbb{1}^{**} = \mathbb{1}$.
- Charakteristische Funktionen von Borelmengen liegen in $\mathcal{C}^{**}(\mathcal{Z})$.

  Beweis: Setzt man vorraus, daß $\mathcal{C}^*(\mathcal{Z})$ der Raum der Radonmaße und die duale Paarung das Lebesgueintegral ist, dann gilt für Wahrscheinlichkeitsmaße p

$$p(B) = \int_B p(dz) = \int_{\mathcal{Z}} \mathbb{1}_B(z) p(dz) = \langle \mathbb{1}_B, p \rangle \leq 1$$

  Die linke Seite ist der Wert des Wahrscheinlichkeitsmaßee p auf der Borelmenge B. Damit ist also $\mathbb{1}_B$ für $B \in \mathcal{B}$ ein beschränktes Funktional auf $\mathcal{P}$. Da sich jedes Maß $\mu \in \mathcal{C}^*(\mathcal{Z})$ als $\mu = \alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2$ mit geeigneten $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$ und $p_i \in \mathcal{P}$ darstellen läßt, ist $\mathbb{1}_B$ beschränktes – und offensichtlich lineares – Funktional auf $\mathcal{C}^*(\mathcal{Z})$.

- Damit ist die Menge aller endlicher linearer Kombinationen von charakteristische Funktionen von Borelmengen ein (nicht abgeschlossener) Unterraum in $\mathcal{C}^{**}(\mathcal{Z})$
- Die Elemente von $\mathcal{C}^{**}(\mathcal{Z})$ können als verallgemeinerte Beobachtungen betrachtet werden.
- Für gegebene offenen bzw. abgeschlossene Mengen lassen sich stets Folgen von Urysohn-Funktionen finden, die punktweise oder nach der Ordnung gegen charakteristische Funktionen von solchen Mengen konvergieren. Diese liegen also in $\mathcal{C}^{**}(\mathcal{Z})$.

  Hieraus läßt sich schlußfolgern, daß $\mathbb{1}_B \in \mathcal{C}^{**}(\mathcal{Z})$ für $B \in \mathcal{B}$.

  Damit können wir den Wert eines Radonmaßes auf einer Borelmenge also als

  $$p(B) = \langle \mathbb{1}_B, p \rangle$$

  verstehen.

6.3 Topologien in linearen Räumen und ihren dualen

Abstrakt wird eine Toplogie durch die Definition von offenen Mengen definiert. In linearen Räumen und gerade in unserer Konstellation, bei der sich viele topologische Begriffe durch Aussagen über Folgen ersetzen lassen, ist es sinnvoller, die Konvergenz von Folgen zu betrachen. Diese Begriffe lassen sich auf die übliche Weise in abstrakte topologische Begriffe übersetzen.
In linearen Räumen und ihren dualen gibt es verschiedene Konvergenzbegriffe, die sich im allgemeinen stark unterscheiden, in Bezug auf die Menge der konvergenten Folgen.
Alle von der Topologie abhängigen Begriffe wie:
offen, abgeschlossen, Abschluß, kompakt, dicht, vollständig, stetig
gibt es für jeden Konvergenzbegriff.
Im weiteren ist der Ausdruck "die Folge (x_n) konvergiert gegen x" so zu verstehen: Die Folge (x_n) sei eine Cauchyfolge. Sie hat also einen Grenzwert x. Frage: Wo liegt x?

6.3.1 Die starke Topologie im allgemeinen Banachraum

Eine Folge $(x_n) \in \mathcal{X}$ konvergiert stark (oder in der Norm) gegen x, falls

$\|x_n - x\| \to 0$

Per Definition ist ein Banachraum abgeschlossen bezüglich der starken Konvergenz. Es ist also stets $x \in \mathcal{X}$.

6.3.2 Die schwache Topologie im allgemeinen Banachraum

- Definition: Eine Subbasis $\tilde{\mathcal{O}}_w$ der schwachen Topologie $\mathcal{O}_w$ in $\mathcal{X}$ wird definiert als Initialtopologie bezüglich aller Elemente aus $\mathcal{X}^*$ (es sei $\varphi_{x^*}(x) = \langle x, x^* \rangle$):

  $$\tilde{\mathcal{O}}_w = \left\{ \varphi_{x^*}^{-1}(U) \subset \mathcal{X} \;\middle|\; x^* \in \mathcal{X}^*,\ U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \right\}$$

  Die Konvergenz in dieser Topologie nennen wir "schwach" und bezeichnen sie mit $x_n \rightharpoonup x$ oder $x_n \overset{w}{\rightharpoonup} x$.
- Der Raum $\mathcal{X}^*$ mit der schwachen Topologie ist Hausdorff (folgt aus Hahn-Banach) und lokalkonvex (Einheitskugeln sind konvex).
- Nach Definition der schwachen Topologie als Initialtopologie gilt offensichtlich

  $$x_n \rightharpoonup x \iff \langle x_n, x^* \rangle \to \langle x, x^* \rangle,\ \forall x^* \in \mathcal{X}^*$$

- Im endlichdimensionalen Raum sind starke und schwache Topologien identisch.
- Aus stark folgt schwach: Der **Beweis** folgt aus der Hölderungleichung:

  $$\left| \langle x_n, x^* \rangle - \langle x, x^* \rangle \right| \le \|x_n - x\| \cdot \|x^*\|$$

- Es konvergieren also mehr Folgen schwach als stark. Das führt dazu, daß im allgemeinen ein Banachraum nicht schwach-vollständig ist.
- **Satz:** $x_n \overset{w}{\rightharpoonup} x \Longrightarrow \|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$
- **Satz:** $x_n \overset{w}{\rightharpoonup} x,\ x_n^* \to x^* \Longrightarrow \langle x_n, x_n^* \rangle \to \langle x, x^* \rangle$

Alle von der Topologie abhängigen Begriffe wie:
offen, abgeschlossen, Abschluß, kompakt, dicht, vollständig, stetig
gibt es mit dem Adjektiv "schwach".

6.3.3 Die vage Topologien im dualen eines allgemeinen Banachraumes

Es sei $\mathcal{X}$ ein Banachraum und $\mathcal{X}^*$ sein dualer. In $\mathcal{X}^*$ gibt es die starke und schwache Topologie. Eine Subbasis von letzterer ist (es sei $\varphi_{x^{**}}(x) = \langle x^{**}, x^* \rangle$):

$$\tilde{\mathcal{O}}_w = \left\{ \varphi_{x^{**}}^{-1}(U) \subset \mathcal{X}^* \;\middle|\; x^{**} \in \mathcal{X}^{**},\ U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \right\}$$

Es ist die Initialtopologie bezüglich aller Elemente aus $\mathcal{X}^{**}$. Eine Möglichkeit, eine noch schwächere Topologie zu definieren ist, die Menge an stetigen Funktionen, beüglich derer die Initialtopologie gebildet wird, einzuschränken. Dazu bietet sich an, nicht ganz $\mathcal{X}^{**}$ zu betrachten, sondern nur $\mathbf{J}\mathcal{X} \subset \mathcal{X}^{**}$. Diese Topologie nennen wir "vage". Dieser Begriff wurde von Bourbaki eingeführt. Er entspricht dem gebräuchlicheren Begriff "schwach-Stern" (geschrieben "schwach*"), der schlecht in die gesprochene Rede paßt.

- Definition: Eine Subbasis $\tilde{\mathcal{O}}_v$ der vagen Topologie $\mathcal{O}_v$ in $\mathcal{X}^*$ wird definiert als Initialtopologie bezüglich aller Elemente aus $\mathcal{X}$ (es sei $\varphi_x(x) = \langle x, x^* \rangle$):

  $$\tilde{\mathcal{O}}_v = \left\{ \varphi_x^{-1}(U) \subset \mathcal{X}^* \;\middle|\; x \in \mathcal{X},\ U \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}} \right\}$$

  Die Konvergenz in dieser Topologie bezeichnen wir mit $x_n \stackrel{\mathrm{v}}{\rightharpoonup} x$.
- Der Raum $\mathcal{X}^*$ mit der vagen Topologie ist Hausdorff (folgt aus Hahn-Banach) und lokalkonvex (Einheitskugeln sind konvex).
- Nach Definition der vagen Topologie als Initialtopologie gilt offensichtlich

  $$x_n^* \stackrel{\mathrm{v}}{\rightharpoonup} x^* \iff \langle x, x_n^* \rangle \to \langle x, x_n^* \rangle,\ \forall x \in \mathcal{X}$$

- Im endlichdimensionalen Raum sind vage, starke und schwache Topologien identisch.
- Aus schwach folgt nach Definition vage weil die Konvergenz auf weniger Elementen gefordert wird. Es konvergieren also mehr Folgen vage als schwach.
- **Satz:** $x_n^* \stackrel{\mathrm{v}}{\rightharpoonup} x^* \Longrightarrow \|x^*\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n^*\|$
- **Satz:** $x_n^* \stackrel{\mathrm{v}}{\rightharpoonup} x^*,\ x_n \to x \Longrightarrow \langle x_n, x_n^* \rangle \to \langle x, x^* \rangle$

Alle von der Topologie abhängigen Begriffe wie:
offen, abgeschlossen, Abschluß, kompakt, dicht, vollständig, stetig
gibt es mit dem Adjektiv "vage".

6.3.4 Punktweise Konvergenz

Eine Folge von Funktionen kann auch punktweise – also auf jedem Argument – konvergieren. Funktionen, Maße und Funktionale kann man als Funktionen auf Punkten, Mengen bzw. Elementen betrachten. Das bedeutet z.B. die Konvergenz $g_n(z) \longrightarrow g(z)$, $\mu_n(B) \longrightarrow \mu(B)$ bzw. $\langle x, x_n^* \rangle \to \langle x, x^* \rangle$. Letzteres ist natürlich äquivalent zur vagen Konvergenz.
In $\mathcal{C}$ gilt folgender
Satz: Eine Folge g_n konvergiert in $\mathcal{C}$ schwach, gdw. g_n beschränkt ist und $g_n(z)$ für jedes z konvergiert (punktweise Konvergenz).
Dieser Satz bedeutet, daß es für beschränkte Folgen ausreicht, punktweise Konvergenz, also die schwache Konvergenz auf $\mathcal{P}_e$ zu testen.
Der Beweis läßt sich einfach über den Rieszschen Darstellungssatz und den Satz von Lebesgue (Majorisierungssatz) führen.

Im weiteren nehmen wir bei punktweise konvergenten Folgen stets an, daß sie beschränkt sind.

6.3.5 Ordnungskonvergenz

Unsere Banachräume sind Banachverbände. In Banachverbänden ist es sinnvoll, eine weitere Konvergenzart zu definieren.

Wir sagen, eine Folge $x_n \overset{\circ}{\to} x$ **ordnungskonvergiert** oder **konvergiert nach der Ordnung**, falls es eine ansteigende Folge $a_n \nearrow x$ und eine absteigende Folge $b_n \searrow x$ mit $a_n \leq x_n \leq b_n$ gibt.
Insbesondere bedeutet $x_n \nearrow x$ auch $x_n \overset{\circ}{\to} x$, da man $a_n := x_n$ und $b_n := x$ setzen kann.

Wie zu vermuten ist, ist die Normkonvergenz (starke Konvergenz) stärker als die Ordnungskonvergenz. Es gilt folgender Satz:
Starke Konvergenz $\Longrightarrow$ Ordnungskonvergenz: $x_n \overset{s}{\to} x \Longrightarrow x_n \overset{\circ}{\to} x$.
Beweis: Ausgehend von $\|x_n - x\| \to 0$ haben wir geeignete absteigende und ansteigende Folgen zu konstruieren. Es sei $\alpha_n = \sup_{k \geq n} \|x_k - x\|$. Offensichtlich ist α_n eine reelle, positive und monoton fallende Nullfolge und es gilt $\|x_n - x\| \leq \alpha_n$. Hieraus folgt $|x_n - x| \leq \alpha_n \mathbb{1}$ und damit $-\alpha_n \mathbb{1} \leq x_n - x \leq \alpha_n \mathbb{1}$ oder $x - \alpha_n \mathbb{1} \leq x_n \leq x + \alpha_n \mathbb{1}$.
Wir können also $a_n = x - \|x_n - x\| \mathbb{1}$ und $b_n = x + \|x_n - x\| \mathbb{1}$ setzen und erhalten die nötige Einschachtelung. □

Bemerkung: Wie bekannt bedeutet schwächere Konvergenz, daß mehr Folgen konvergieren. Eine norm-abgeschlossene Teilmenge muß also nicht auch ordnungs-abgeschlossen sein. Ein Beispiel ist eine beschränkte Teilmenge eines Ideals in $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ ist also nicht Dedekind-vollständig. Anderer Beweis in Kaplan S. 41 (eigentlich S.95 oben)

6.3.6 In AL-Räumen ist Ordnungskonvergenz = starke Konvergenz

Wir haben im letzten Punkt gezeigt, daß jeder duale eines Riesz-Raumes Dedekind-vollständig ist. Tatsächlich ist ein AL-Raum stets Dedekind-vollständig, auch wenn er keinen predualen hat.
Man kann sogar mehr zeigen:
Satz: In einem AL-Raum konvergiert jede ansteigende und beschränkte Folge stark.
Beweis: Es sei $\mathcal{Y}$ ein AL-Raum (Banachverband) und $(y_n) \subset \mathcal{Y}$ eine ansteigende und beschränkte Folge. Es existiert also ein $a \in \mathcal{Y}$ mit $y_1 \leq y_2 \leq \ldots \leq a$. Dann ist $y_{n+1} - y_n \geq 0$ und es folgt aus der Additivität der AL-Norm

$$\sum_{i=1}^{n} \|y_{i+1} - y_i\| \quad = \quad \left\| \sum_{i=1}^{n} (y_{i+1} - y_i) \right\| = \|y_{n+1} - y_1\| \leq \|a - y_1\|$$

Folglich gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|y_{i+1} - y_i\| \leq \|a - y_1\| \ .$$

Hieraus folgt, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ ein N gibt, sodaß für alle $n > N$

$$\sum_{i=n}^{\infty} \|y_{i+1} - y_i\| \leq \varepsilon$$

Es sei $m > n > N$. Dann gilt ebenfalls wegen der Additivität der Norm auf positiven Elementen

$$\|y_m - y_n\| = \sum_{i=n}^{m-1} \|y_{i+1} - y_i\| \leq \sum_{i=n}^{\infty} \|y_{i+1} - y_i\| \leq \varepsilon$$

(y_n) ist somit eine starke Cauchyfolge und da $\mathcal{Y}$ ein Banachraum ist, existiert ein $y \in \mathcal{Y}$ mit $y_n \xrightarrow{s} y$. □

Da aus der starken Konvergenz die Ordnungskonvergenz folgt, folgt aus diesem Satz, daß jede ansteigende und beschränkte Folge nach der Ordnung konvergiert, also ein Supremum im Raum hat. Analog zeigt man die Ordnungskonvergenz absteigender Folgen. Hieraus folgt die Dedekind-Vollständigkeit.

6.3.7 Schwache Konvergenz und Ordnungskonvergenz impliziert starke Konvergenz

Die Umkehrung, Ordnungskonvergenz impliziert starke Konvergenz gilt im allgemeinen in AM-Räumen nicht (siehe unten). Interessanterweise impliziert aber die punktweise Konvergenz in $\mathcal{C}(\mathcal{Z})$ zusammen mit der Ordnungskonvergenz die starke Konvergenz – falls $\mathcal{Z}$ kompakt ist. Das sagt der

Satz von Dini: Sind $\mathcal{Z}$ ein kompakter topologischer Raum, $(f_i \colon \mathcal{Z} \to \mathbb{R})_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger, stetiger Funktionen mit $f_i(z) \leq f_{i+1}(z)$ für alle natürlichen Zahlen i und alle $z \in \mathcal{Z}$, und existiert eine stetige Grenzfunktion f

$$\lim_{i\to\infty} f_i(z) = f(z)$$

$z \in \mathcal{Z}$, so konvergiert die Folge stark gegen f, das heißt

$$\lim_{i\to\infty} \sup_{z\in\mathcal{Z}} |f_i(z) - f(z)| = \lim_{i\to\infty} \|f_i(z) - f(z)\| = 0.$$

Beweis: Für ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$ setze $E_i := \{z \in \mathcal{Z} \mid f(z) - f_i(z) < \varepsilon\}$. Da die Folge der f_i punktweise gegen f konvergiert, bilden die E_i eine Überdeckung von $\mathcal{Z}$, die wegen der vorausgesetzten Stetigkeit offen ist. Die Überdeckung $(E_i)_i$ ist monoton wachsend, da die Funktionenfolge diese Eigenschaft hat. Weil $\mathcal{Z}$ kompakt ist, wird $\mathcal{Z}$ bereits von endlich vielen der E_i überdeckt. Ist n der größte Index dieser endlich vielen Überdeckungsmengen, so gilt $E_i = \mathcal{Z}$ für alle größeren Indizes i. Also ist $|f(z) - f_i(z)| = f(z) - f_i(z) < \varepsilon$ für alle $z \in \mathcal{Z}$ und $i > n$, woraus die Behauptung folgt. □

Leicht anderer Beweis in Kaplan S.167, es wird nicht $E_i = \mathcal{Z}$ angenommen.

6.4 Zusammenfassung der Topologien in $\mathcal{Z}, \mathcal{Z}^*, \mathcal{Z}^{**}$ und $\mathcal{Z}^{***}$

In jedem Raum gibt es verschiedene Topologien, die starke, schwache und vage. Davon sind nur einige im weiteren interessant. Das hängt z.B. damit zusammen, daß es für manche Topologien nur uninteressante konvergente Folgen gibt.

6.4.1 Grobe Vergleiche von Topologien

Die “Körnigkeit” von Topologien hängt mit der Anzahl ihrer offenen Mengen zusammen. In Abhängigkeit davon unterscheiden sich weiter Eigenschaften. Grob sind die Zusammenhänge in der Tabelle dargestellt. Diese Tabelle dient zur Orientierung und ist nicht als mathematisch streng zu verstehen.

	$\#\mathcal{O}$	Metris	Kompakt	#kF	#sF
diskret stark schwach vage trivial	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

Die Bezeichnungen bedeuten:

- $\#\mathcal{O}$ — Anzahl der offenen Mengen in $\mathcal{X}$
- Metris — Metrisierbarkeit
- Kompakt — Kompaktheit
- #kF — Anzahl konvergenter Folgen $f : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$
- #sF — Anzahl stetiger Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathcal{X}$

6.4.2 Vergleich der Konvergenzen

$\mathcal{Z}$	$\mathcal{Z}^* = \mathcal{C}$	$\mathcal{Z}^{**} = \mathcal{C}^*$	$\mathcal{Z}^{***} = \mathcal{C}^{**}$	
$z_n \to z$	$g_n \to g$	$p_n \to p$	$\xi_n \to \xi$	
$z_n \to z$	$\Vert g_n - g\Vert \to 0$	$\Vert p_n - p\Vert \to 0$	$\Vert \xi_n - \xi\Vert \to 0$	s(trong)
	$g_n \nearrow g$	$p_n \nearrow p$	$\xi_n \nearrow \xi$	o(rder)
$g(z_n) \to g(z)$	$\langle g_n, p\rangle \to \langle g, p\rangle$	$\langle \xi, p_n\rangle \to \langle \xi, p\rangle$		w(eak)
	$g_n(z) \to g(z)$	$\langle g, p_n\rangle \to \langle g, p\rangle$	$p(B_n) \to p(B)$	v(age)
	$g_n(z) \to g(z)$	$p_n(B) \to p(B)$		p(ointw.)

Wir haben folgende Zusammenhänge

- Allgemein: s $\Longrightarrow$ w $\Longrightarrow$ v, s $\Longrightarrow$ o
- In $\mathcal{Z}$: w-abgeschlossen per Definition der Initialtopologie
- In $\mathcal{C}$: v=p (per Def.), w=p (weil $\mathcal{P}_e$ total ist), w+o=s (Satz von Dini)
- In $\mathcal{C}^*$: v=p, s- und w-Topologie sind beinahe diskret, deshalb uninteressant
- In $\mathcal{C}^{**}$: interessant für uns nur o und v

Im weiteren sind für uns nur folgende Konvergenzen von Interesse:

- Starke Konvergenz in $\mathcal{C}$
- Schwache Konvergenz in $\mathcal{C}$ (entspricht der vagen in $\mathcal{C}^*$).
- Vage Konvergenz in $\mathcal{P}$.

6.4.3 Einige interessante Sätze in allgemeinen Banachräumen und ihren dualen

Wir führen hier en paar wichtige Sätze zusammen, die sich mit kompakten Mengen beschäftigen.

Kompaktheitssatz von Riesz: Ein normierter Vektorraum ist dann und nur dann endlichdimensional, wenn die abgeschlossene Einheitskugel kompakt ist.
Bemerkung: Diese Aussage gilt nicht nur für die Einheitskugel sondern auch für den Schnitt der Einheitskugel mit dem positiven Kegel, also für $\mathcal{R}$ oder $\mathcal{P}$.

Oft unterscheiden sich die “starken” und “schwachen” Eigenschaften voneinander. Dazu gibt es folgende Sätze. Im weiteren seien $B = \{x \in \mathcal{X} | \|x\| \leq 1\}$ und $S = \{x \in \mathcal{X} | \|x\| = 1\}$ die stark abgeschlossene Kugel bzw. Sphäre. Nach Definition ist $\overline{B} = B$ und $\overline{S} = S$. Es gilt aber:

Satz: $\overline{B}^w = B$ und $\overline{S}^w = B$.
D.h., S ist nicht schwach abgeschlossen. Die stark offene Kugel ist nicht schwach offen. Das Innere von B ist leer.

Satz: Ist $A \in \mathcal{X}$ stark abgeschlossen und kompakt, dann ist A auch schwach abgeschlossen.

Satz (Eberline-Smulian): B ist schwach kompakt, gdw. $\mathcal{X} = \mathcal{X}^{**}$.
Das bedeutet, daß die schwache Topologie in $\mathcal{C}^*$ für uns (wir möchten, daß $\mathcal{P}$ kompakt ist) auch nicht geeignet ist, da $\mathcal{C}^*$ nicht reflexiv ist.

Satz (Mazur): Jede schwach konvergente Folge in einem normierten Vektorraum besitzt eine stark konvergente Folge von Konvexkombinationen der Folgenglieder.
Beweis:

- In lokalkonvexen topologischen Vektorräumen sind abgeschlossene und konvexe Mengen schwach abgeschlossen.
- Der Norm-Abschluss konvexer Mengen ist wieder konvex.
- Betrachte also die Menge aller Konvexkombinationen der x_n (die sog. konvexe Hülle). Deren Norm-Abschluss ist wieder konvex, damit ist die abgeschlossene konvexe Hülle der x_n schwach abgeschlossen. Nun ist x als schwacher Grenzwert von Elementen aus der abgeschlossenen konvexen Hülle ein Element dieser. Damit muss x Grenzwert einer Folge von Konvexkombinationen der x_n sein.

Im weiteren sei $B^* = \{x^* \in \mathcal{X}^* | \|x^*\| \leq 1\}$ die stark abgeschlossene Kugel in $\mathcal{X}^*$ und analog $B^{**} \subset \mathcal{X}^{**}$. Es gilt:
Satz (Goldstine): $\overline{J(B)}^v = B^{**}$ (die Einheitskugel in $\mathcal{X}$ ist vage dicht in der Einheitskugel in $\mathcal{X}^{**}$).
Das heißt, ein $\xi \in \mathcal{X}^{**}$ läßt sich durch eine vage konvergente Folge approximieren.

Satz (Banach-Alaoglu): B^* ist vage kompakt.
Dieser fundamentale Satz wird im allgemeinen mit dem Auswahlaxiom bewiesen, was immer ein Warnsignal ist, für den Fall, daß man diesen Satz kontruktiv anwenden will. Im Falle, daß $\mathcal{X}$ separabel ist, läßt sich diese Satz auch ohne das Auswahlaxiom beweisen. Dazu wird folgendes verwendet:

Satz (Banach-Alaoglu, separable Version): Es sei $\mathcal{X}$ separabel, dann ist B^* vage folgenkompakt.
Beweis: Es sei $\{x_k\} \subset \mathcal{X}$ dicht in $\mathcal{X}$ und $\{x_n^*\} \subset \mathcal{B}^*$ also $\|x_n^*\| \leq 1$. Wir beweisen (mit dem Cantorschen Diagonalverfahren), daß $\{x_n^*\}$ eine vage konvergente Teilfolge enthält.
Für jedes feste k ist $\{\langle x_n^*, x_k\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Daher existiert eine Unterfolge $m_k \subset \mathbb{N}$ derart, daß $\langle x_i^*, x_k\rangle_{i\in m_k} \overset{i\to\infty}{\to} y(x_k)$. Weiter gilt

$$|y(x_k)| \leq \lim_{i\to\infty} |\langle x_i^*, x_k\rangle_{i\in m_k}| \leq \liminf_{i\to\infty} \|x_i^*\| \cdot \|x_k\| \leq \|x_k\|$$

D.h., $y(x_k)$ ist eine beschränkte und offensichtlich lineare Abbildung auf einer dichten Menge. Folglich existiert ein $y^* \in B^*$ mit $\lim_{i\to\infty}\langle x_i^*, x_k\rangle = y(x_k) = \langle y^*, x_k\rangle$.
Nach Banach-Steinhaus ist y^* auf ganz $\mathcal{X}$ ein beschränktes lineares Funktional.

Bemerkung: Der letzte Beweis zeigt auch, daß, falls $\mathcal{X}$ separabel ist, daß dann B^* vage metrisierbar ist. $\mathcal{X}^*$ ist separabel aber nicht metrisierbar, es sei denn $\mathcal{X}$ ist endlichdimensional. Hieraus folgt bekanntlich, daß für den Beweis der Kompaktheit der Beweis der Folgenkompaktheit ausreicht.

Bemerkung: Leonidas Alaoglu kanadischer Mathematiker griechischer Abstammung, 1914 – 1981, siehe auch Buch von Adam Bobrowski: Functional Analysis for Probability and Stochastic Processes, S.186)

6.4.4 Beispiele

Die folgenden Beispiele zeigen, daß die verschiedensten Zusammenhänge zwischen den Konvergenzen möglich sind.

Beispiel 1: Es sei $\mathcal{X} = \mathcal{C}([0,1])$ und $x_n = 1 - z^n$.

Beispiel 2: Es sei $\mathcal{X} = \mathcal{C}(\mathbb{N})$ (nicht kompaktifiziert!). Wir betrachten die Folge $x_n = n\mathbb{1}_{\{n\}}$. Dann konvergiert $x_n \overset{p}{\to} \mathbb{0}$ punktweise, aber weder stark noch nach der Ordnung.

Beispiel 3: Es sei $\mathcal{X} = \mathcal{C}(\mathbb{N})$ (nicht kompaktifiziert!). Wir betrachten die Folge $x_n = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{\{i\}}$. Dann konvergiert $x_n \overset{p}{\to} \mathbb{1}$ punktweise und $x_n \overset{\circ}{\to} \mathbb{1}$ nach der Ordnung, aber nicht stark.
Das scheint ein Widerspruch zum Satz von Dini zu sein. Ist es aber nicht, da dieser Satz nur auf kompakten Räumen gilt. Auf einem kompakten Raum hat man folgendes Bild:

Beispiel 4: Es sei $\mathcal{X} = \mathcal{C}(\overline{\mathbb{N}})$ (kompaktifiziert!). Wir betrachten die Folge $x_n = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{\{i\}}$. Sie konvergiert wieder nicht stark, aber nach der Ordnung $x_n \overset{\circ}{\to} \mathbb{1}$. Allerdings konvergiert sie nicht punktweise, da die Folgen (x_n) Nullfolgen sind, $\mathbb{1}$ aber nicht.
Man könnte meinen, das Problem zu beheben, indem man $x_n = \mathbb{1}_\infty + \sum_{i=0}^{n} \mathbb{1}_{\{i\}}$ setzt. Das geht aber nicht, da $\mathbb{1}_{\{\infty\}} \notin \mathcal{C}(\overline{\mathbb{N}})$, da $\{\infty\}$ keine offene Menge ist (das Komplement $\mathbb{1}_{\{\infty\}}^{-1}(\{0\})$ ist nicht abgeschlossen).

6.4.5 Übungsaufgaben

ÜA 22 a) Beweise, daß $\mathcal{P}_e$ in der starken Topologie ein diskreter topologischer Raum ist.

ÜA 22 b) Entscheide, ob $\mathcal{P}_e$ in der schwachen Topologie ein diskreter topologischer Raum ist.

ÜA 23 a) Die Folge z_n konvergiere in $\mathcal{Z}$ gegen z. Untersuche ob und wie (stark, schwach, vage) die Folge δ_{z_n} gegen δ_z in $\mathcal{C}^*$ konvergiert.

ÜA 23 b) Die Folge z_n konvergiere in $\mathcal{Z}$ gegen z. Untersuche ob und wie (stark, schwach, vage) die Folge $\mathbb{1}_{\{z_n\}}$ gegen $\mathbb{1}_{\{z\}}$ in $\mathcal{C}^{**}$ konvergiert.

6.4.6 Bemerkungen, Gegenbeispiele und Lösungen der Übungsaufgaben

Die Unterschiede zwischen den Konvergenzen erkennt man besonders deutlich durch Gegenbeispiele.

- Die Funktionen $g_n(z) = z^n$ in $\mathcal{C}([0,1])$ konvergieren schwach oder – äquivalent – punktweise gegen $g = \mathbb{1}_{\{1\}}$, aber natürlich nicht stark, da $g \notin \mathcal{C}$. g_n konvergiert auch nicht stark in $\mathcal{C}^{**}$, da $\|g_n - g\| = 1$. Aber g_n konvergiert gegen g vage (punktweise) in $\mathcal{C}^{**}$.
- Die Konvergenz $z_n \to z$ in $\mathcal{Z}$ (im Sinne von: Jede Umgebung von z enthält ∞-viele Punkte aus der Menge (z_n)) ist äquivalent zur schwachen Konvergenz in $\mathcal{Z}$ also zu $g(z_n) \to g(z)$.
- $\mathcal{P}_e$ ist vage total (der span ist dicht) in $\mathcal{P}$. Das bedeutet, daß es für die schwache Konvergenz in $\mathcal{C}$ ausreicht, die Konvergenz auf Punktmaßen zu testen. Das heißt wiederum, daß die punktweise Konvergenz in $\mathcal{C}$ – die man als vage Konvergenz bezeichnen kann – zur schwachen Konvergenz äquivalent ist, wenn die Folge der Funktionen in $\mathcal{C}$ beschränkt ist.
- Man könnte fragen, ob es nicht sinnvoll ist, in $\mathcal{P}_e$ andere Topologien, etwa die starke Topologie zu betrachten. Es stellt sich heraus, daß in $\mathcal{P}_e$ die starke Topologie die diskrete ist. Hieraus folgt dann, daß jede konvergente Folge konstant (bis auf endlich viele Glieder) sein muß. Das wiederum hat zur Folge, daß jede stark stetige Halbgruppe in $\mathcal{C}^*$ auch uniform stetig ist und es somit in $\mathcal{C}^*$ nur beschränkte Generatoren gibt.

  Satz: In der starken Topolgie in $\mathcal{P}_e$ sind alle Mengen offen.

  Beweis: (Lösung von ÜA 22a) Wir beweisen, daß die Mengen $\{\delta_z\}$ offen sind, indem wir zeigen, daß mit jedem Punkt dieser Menge auch eine Umgebung in $\mathcal{P}_e$ enthalten ist. Für zwei $z_1 \neq z_2$ gilt $\|\delta_{z_1} - \delta_{z_2}\| = 2$. Es sei $\varepsilon < 2$. Dann enthält jede offene Kugel um δ_z mit dem Radius ε nur δ_z. Wegen $\delta_z \in \{\delta_z\}$ folgt die Behauptung. $\square$.
- Die Folge $p_n(dz) = (1 + \sin(nz))dz$ in $\mathcal{C}^*([-1,1])$ konvergiert bezüglich aller charakteristischer Funktionen (vermutlich äquivalent zu schwach), aber nicht stark.
- **Lösung von ÜA 23a)** Es sei $z_n \to z$ in $\mathcal{Z}$ (im Sinne von: Jede Umgebung von z enthält ∞-viele Punkte aus der Menge (z_n)). Wir nehmen an, daß (z_n) nicht konstant ist. Wann konvergiert $\delta_{z_n} \to \delta_z$? Auf alle Fälle vage, weil $g(z_n) \to g(z)$ aus der Stetigkeit von g folgt. Da $\|\delta_{z_n} - \delta_z\| = 2$, konvergiert δ_{z_n} nicht stark und auch nicht schwach, was man zeigt, wenn man z.B. als Testfunktion $\mathbb{1}_{\{z\}}$ betrachtet.

  In diskreten Räumen (oder wenn $\{z\}$ offen ist) konvergiert nur die konstante Folge, d.h., aus $z_n \to z$ folgt $z_n = z$.
- **Lösung von ÜA 23b)** Die Folge $\mathbb{1}_{\{z_n\}}$ konvergiert in $\mathcal{C}^{**}$ in keinem Sinn. Das sieht man daran, daß $\langle \mathbb{1}_{\{z_n\}}, \delta_z \rangle = 0$ aber $\langle \mathbb{1}_{\{z\}}, \delta_z \rangle = 1$. Daß heißt, die Folge konvergiert nicht mal vage.

Hieran sieht man einen wichtigen Unterschied zwischen stetigen Funktionen und Dichten von Maßen (z.B. bezügl. des Lebesguemaßes in $\mathbb{R}^n$). Es kann eine Folge von Dichten durchaus gegen die "Deltafunktion" $\delta(z)$ konvergieren.

6.4.7 Zusammenhang der Konvergenzen in der FunkA und W-Theorie

Die duale Paarung zwischen einer stetigen Funktion g und einem W-Maß p heißt in der W-Theorie Erwartungswert oder Mittelwert von g bezüglich p oder g-Moment von p oder nur Erwartungswert/Moment von g, wenn p durch den W-Raum $(\mathcal{Z}, \mathcal{B}, p)$ fixiert ist. Der Wert eines Maßes p auf einer Borelmenge B, also $p(B)$ ist die duale Paarung zwischen p und der char. Funktion von B, also $\mathbb{1}_B \in \mathcal{C}^{**}$.
Da in die Wahrscheinlichkeitstheorie in erster Linie W-Maße in $\mathbb{R}^n$ betrachtet werden, orientieren sich die Konvergenzbegriffe daran und unterscheiden insbesondere auch Konvergenz bezüglich Funktionen mit kompaktem Träger oder ohne.
Während die funktionalanlytischen Begriffe systematisch und allgemeingültig sind, unterscheiden sich die entsprechenden Begriffe in der W-Theorie davon.
Die vage Konvergenz in der Funktionalanalysis heißt schwache Konvergenz in der W-Theorie.
Die starke Konvergenz in der Funktionalanalysis heißt Konvergenz in totaler Variation in der W-Theorie.
Des Weiteren werden Konvergenzen der Art $p_n(B) \longrightarrow p(B)$ und $p(B_n) \longrightarrow p(B)$ betrachtet. Aus funktionalanlytischer Sicht sind das Konvergenzen bezüglich der Topologie $\sigma(\mathcal{C}^*, \mathcal{C}^{**})$, da $p(B) = \langle \mathbb{1}_B, p \rangle$ mit $\mathbb{1}_B \in \mathcal{C}^{**}$. Die Konvergenzen $p_n(B) \longrightarrow p(B)$ wird in der Wahrscheinlichkeitstheorie starke Konvergenz von Maßen genannt (hier schwache).
Die $\sigma(\mathcal{C}^*, \mathcal{C}^{**})$-Topologie ist "sehr diskret", was dazu führt, daß es kaum konvergente Folgen gibt. Um trotzdem Aussagen treffen zu können, wann $p_n(B) \longrightarrow p(B)$ oder $p(B_n) \longrightarrow p(B)$ stattfindet, werden Spezialfälle betrachtet, wann diese Konvergenzen mit Konvergenzen in der $\sigma(\mathcal{C}^*, \mathcal{C})$-Topologie übereinstimmen.
Dazu gibt es den **Portmanteau-Satz** (von Alexandrow):
Folgende Konvergenzen sind äquivalent

- $p_n \rightarrow p$ vage
- $p_n \rightarrow p$ vage auf $\mathcal{C}_{[0,1]}$
- $\limsup_{n\to\infty} p_n(F) \leq p(F)$ für alle $F \in \mathcal{F}$
- $\liminf_{n\to\infty} p_n(U) \geq p(U)$ für alle $U \in \mathcal{O}$
- $\lim_{n\to\infty} p_n(B) = p(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}$ und $p(\partial B) = 1$

Der Beweis des Satzes (die Umkehrung, daß aus der Konvergenz auf Borelmengen die vage Konvergenz folgt) ist nicht einfach und wird über sogenannte level-sets (Niveaumengen) geführt, mit denen es möglich ist, anstelle von Lebesgue-Integralen über $\mathcal{Z}$ Riemann-Integrale über dem Wertebereich von g zu betrachten. Nähers hierzu kann im WIAS-Preprint 1896 nachgelesen werden.
Für die anderen Teile des Beweises werden Folgen von Funktionen $g_n \in \mathcal{C}_{[0,1]}$ betrachtet, mit $g_n^{-1}(1) = F \in \mathcal{F}$ und $g_n^{-1}(0) = \mathcal{Z} \setminus U_n$, $U_n \in \mathcal{O}$ und $F \subset U_n$, $U_{n+1} \subset U_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = F$. Es ist

$$p(F) = \inf_{U_n \supset F} p(U_n) \geq \langle g_n, p \rangle \geq p(F)$$

Konvergenzen der Art $p(B_n) \rightarrow p(B)$ hängen mit der Regularität von p zusammen:

$$p(B) = \sup_{F \subset B \in \mathcal{B}} p(F) \ , \quad p(B) = \inf_{U \supset B \in \mathcal{B}} p(U)$$

Es gilt:

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A \Longrightarrow \mathbb{1}_{A_i} \to \mathbb{1}_A$ vage in $\mathcal{C}^{**}$.
- $A_n \uparrow A \Longrightarrow p(A_n) \to p(A)$, $A_n \uparrow A$ bedeutet $A_n \subset A_{n+1}$, $\bigcup_{i=n}^{\infty} A_n = A$
- $A_n \downarrow A \Longrightarrow p(A_n) \to p(A)$, $A_n \downarrow A$ bedeutet $A_n \supset A_{n+1}$, $\bigcap_{i=n}^{\infty} A_n = A$