

FUNKTIONALANALYTISCHE METHODEN IN DER KLASSISCHEN PHYSIK (LINEARE THEORIE) (2022/23)

Holger Stephan, Berlin*

2. November 2022

Die Funktionalanalysis analysiert Funktionale. Funktionale sind strukturerhaltende Abbildungen abstrakter Objekte in die (z.B. reellen) Zahlen. Die Analyse der Funktionale soll helfen, die Eigenschaften der abstrakten Objekte zu verstehen. Geht es um das Verständnis physikalischer Objekte, ist die Frage, was die geeigneten mathematischen Objekte und Funktionale dafür sind. Es stellt sich heraus, daß man die realen Objekte Zustandsraum, Beobachtung und statistischer Zustandsraum zwangsläufig mit den mathematischen Objekten kompakter topologischer Raum, Banachverband der stetigen Funktionen und Einheitssphäre seiner stetigen und linearen Funktionale beschreiben muß. Damit ist auch das funktionalanalytische Grundgerüst der Vorlesung (Banachverbände und ihre dualen) beschrieben.

In der Vorlesung geht es nicht in erster Linie darum, konkrete Modelle für konkrete physikalische Prozesse zu entwickeln (z.B. die Wärmeleitungsgleichung zur Beschreibung der Temperaturentwicklung), sondern zu untersuchen wie ein klassisches physikalisches System prinzipiell beschrieben werden muß. Die Nichtbeachtung dieser Prinzipien führt zu Fehlern, die sich häufig erst bemerkbar machen, wenn man versucht, falsche Ansätze, die in einfachen Fällen zu brauchbaren Ergebnissen geführt haben, auf kompliziertere Probleme anzuwenden.

In der Vorlesung geht es viel um Dualität, d.h. das Verhältnis zueinander dualer Objekte. In der Physik interessiert man sich nur für zwei Typen von Größen: für extensive und intensive Größen. Die Dualität dieser beiden Typen zieht sich wie ein roter Faden durch die gesamte Mathematik. Wir treffen sie wieder in der Dualität von Kardinal- und Ordinalzahlen, Mengen und Teilmengen, symmetrischen und asymmetrischen Relationen, Radonmaßen und stetigen Funktionen.

Dieses spezielle Interesse – das uns meistens gar nicht bewußt ist – an prinzipiell nur zwei Typen von Größen führt rein logisch zu Naturgesetzen wie dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik.

Rot markiert sind Übungsaufgaben und Begriffe oder weiterführende Erläuterungen. Beides ist sinnvoll zu lösen bzw. zu rekapitulieren.

Grün markiert sind Merksätze (oder auf neudeutsch: take-home-messages), die kurz und prägnant das Wesen eines Sachverhaltes widerspiegeln und häufig aus mathematischer Sicht gerade falsch sind.

*e-mail: stephan@wias-berlin.de

URL: <http://www.wias-berlin.de/people/stephan>

1 Dualität extensiver und intensiver Größen

1.1 Erkenntnistheoretische Einführung

Der Mensch hat zwei Erkenntnisorgane: Die Sinne und das Denken. Die Sinne nehmen Fragmente aus der physischen Welt wahr, das Denken setzt sie zu einem Weltbild zusammen. Das geschieht unbewußt und es ist oft schwer festzustellen, welche Erkenntnisse durch Beobachtung und welche durch das Denken zustandegekommen sind.

Im Laufe der Geschichte hat es immer wieder philosophische Diskussionen gegeben, welche der beiden Seiten, die Beobachtung oder das Denken, wichtiger sind. Im antiken Griechenland (Platon, Aristoteles, sinngemäß: „Experimente verwirren nur.“) hielt man ausschließlich das Denken als die Quelle der wahren Erkenntnis.

Im Rahmen der Aufklärung begann die Rolle der Beobachtung immer mehr in den Vordergrund zu treten. Erkenntnis ist zweifellos möglich, aber wie? Beginnend mit Kant wurde die Frage gestellt: Was kann ich wissen?

Das führte etwa seit 1850 zur Dominanz des Materialismus und schließlich der weit verbreiteten Meinung, daß letztlich alles auf rein mechanische Gesetze zurückzuführen sei. Dieser Meinung wurde in den 20-er Jahren des 20. Jahrhundert mit der Entwicklung der Quantenmechanik ein starker Dämpfer verpaßt. Die Nachwehen dieser Strömung sind auch heute noch sehr stark: Letztlich kann man alle Naturerscheinungen, einschließlich biologischer Prozesse und das Denken auf das Fließen von Strömen, also der Bewegung von Teilchen zurückführen.

In der Zeit des Aufblühens des Materialismus wurde auch immer stärker die philosophische (Grund-)Frage gestellt (Feuerbach, Marx): Was ist primär, die Materie oder das Bewußtsein?, um sie sofort klar zu beantworten: Die Materie ist das Primäre. Dabei wurde freilich übersehen, daß die Definition des Begriffes Materie (z.B. bei Feuerbach und Lenin), das Primat des Denkens erfordert: Materie ist das, was außerhalb und unabhängig von unserem Bewußtsein existiert.

Obwohl es immer warnende Stimmen gab (Einstein, sinngemäß: „Es gibt keinen direkten Weg vom Experiment zur Theorie“), Mach („Man führt ungewöhnliche Unverständlichkeiten auf gewöhnliche Unverständlichkeiten zurück.“), Heisenberg („Was wir beobachten, ist nicht die Natur selbst, sondern die Natur, die unserer Methode der Befragung ausgesetzt ist.“), ist diesem Meinung nach wie vor die vorherrschende.

Bereits zu Beginn der Aufklärung, beginnend mit Hume, hat die Priorisierung auf die Beobachtung zu interessanten Paradoxa geführt, wie etwa zum Induktionsproblem (oder Humesche Problem): Wie ist es möglich, ausgehend von endlich vielen speziellen Beobachtungen allgemeingültige Gesetze zu formulieren.

Übrigens: Paradoxa sind immer ein Zeichen dafür, daß man etwas nicht verstanden hat. Und viele Paradoxa (z.B. die von Zenon oder das Großvaterparadoxon) haben ihre Ursache gerade im Unverständnis des Zusammenspiels von Beobachtung und Denken. Grob gesagt: Man nimmt das, was man eigentlich hinzuphantasiert hat, für bare Münze.

In der Mathematik dagegen werden neue Erkenntnisse allein durch das Denken gefunden. Sicher spielt die Beobachtung (im weitesten Sinne, auch durch geometrische Zeichnungen oder numerische Experimente) eine große Rolle bei der Auswahl der Probleme, die einem Mathematiker interessant erscheinen, aber die tatsächlichen sicheren Erkenntnis entstehen durch logische Schlüsse aus mehr oder weniger sinnvoll vorgegebenen Axiomen und Definitionen.

Das Induktionsproblem löst sich schnell auf, wenn wir parallel dazu das in der Mathematik gut bekannte (wenn auch nicht so formulierte) Deduktionsproblem (siehe z.B. Piaget) betrachten: Warum sind die, aus wenigen Axiomen und Definitionen hergeleitete neue Sätze, keine trivialen

Tautologien. Woher kommt die neue Information, die darin enthalten ist. Sie steckt wohl schon drin, nur hat es uns viel Mühe gekostet, sie uns bewußt werden zu lassen.

Wir werden uns auf keine Seite stellen und versuchen, gerade das Zusammenspiels von Beobachtung und Denken im Auge zu haben.

Im weiteren werden einige Grundprinzipien bei der Beschreibung physikalischer Prozesse mit mathematischen Hilfsmitteln vorgestellt. Schon die Frage nach Grundprinzipien bei der Beschreibung der Realität kann verwundern.

Man könnte meinen, die Natur ist so vielfältig und allmächtig, daß man sich keine Prinzipien vorgeben kann, weil sich Natur nicht dran halten muß. Das scheint richtig. Aber es gibt ja auch Naturgesetze, d.h. die Natur hält sich schon an Prinzipien. Aber wo kommen diese her und warum hält sich die Natur daran? Die Frage nach der Herkunft der naturgesetze hat ebenfalls Generationen von Philosophen beschäftigt.

Tatsächlich stecken die Antworten, die uns die Natur auf unsere Fragen gibt, bereits in den Fragen drin. Das, sollte es richtig sein, wäre ziemlich niederschmetternd. Ist man doch der Meinung, daß man der Natur mit großer Mühe ihre Geheimnisse entrissen hat. Da wäre die Erkenntnis, daß es nur unser Echo ist, das uns die Natur auf unsere Fragen zuruft, sehr ernüchternd.

Um dieser Idee, daß in unseren Fragen die Antworten bereits enthalten sind, auf den Grund zu gehen, müssen wir uns die Fragen, die wir an die Natur stellen, näher ansehen.

1.1.1 Was sind Zahlen und wozu brauchen wir sie?

Die Grundidee der Modellierung physikalischer Prozesse ist es, physikalischen Größen Zahlen zuzuordnen. Mit Zahlen können wir – im Gegensatz zu abstrakten physikalischen Zuständen – rechnen, wir können sie stets addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Hier sind Zahlen im weitesten Sinne in Form von Funktionen, Formeln, Beziehungen, ... gemeint, mit denen man letztlich wie mit Zahlen rechnen kann. Haben wir erstmal den physikalischen Größen Zahlen zugeordnet, können wir den ganzen widerspruchsfreien Apparat der Mathematik einsetzen.

Allerdings stellt man schon bei den einfachsten Aufgaben fest, daß an der Zuordnung von Zahlen zu – nicht nur physikalischen – Größen irgendetwas nicht stimmt. Man kann mit Zahlen zwar beliebig rechnen, sollte es aber – in Abhängigkeit vom Kontext – nicht unbedingt tun. Dazu einige Beispiele, zur einfachsten Rechenoperation

- Beim 100m-Lauf war Paul 2. und Fritz 5. Was ist $5 + 2$? Diese Aufgabe kann man in diesem Zusammenhang stellen, sie ist aber sinnlos, wogegen $5 - 2$ sinnvoll sein kann, das ist der Abstand der beiden. Es scheint so, daß man Ordinalzahlen zwar subtrahieren, aber nicht addieren sollte.

In der Physik haben wir denselben Effekt: Wir fahren 2 Stunden mit 60 km/h und 3 Stunden mit 100 km/h. $60 \text{ km/h} + 100 \text{ km/h}$ zu berechnen ist möglich, aber sinnlos. Dagegen ist $100 \text{ km/h} - 60 \text{ km/h}$ gerade der Betrag um den sich unsere Geschwindigkeit erhöht hat.

Geschwindigkeiten ähneln Ordinalzahlen.

- Kardinalzahlen kann man sicher addieren. Ein Auto mit 5 Sitzen und eins mit 7 Sitzen gibt $5+7=12$ Personen die Möglichkeit zusammen wegzufahren.

Wir hatten früher ein Auto mit 5 Sitzen. Das haben wir verkauft und uns ein neues mit 7 Sitzen gekauft. Warum ist jetzt $5 + 7$ keine sinnvolle Aufgabe? Weil es sich um

Kardinalzahlen zu verschiedenen Zeitpunkten handelt? Dagegen ist $7 - 5$ wieder sinnvoll, es beschreibt die „Sitzzunahme“.

Auf einem Bauernhof haben die Hühner gestern 12 Eier und heute 15 Eier gelegt. $12 + 15$ ist eine sinnvolle Aufgabe, obwohl es Kardinalzahlen zu verschiedenen Zeitpunkten sind.

Der Unterschied zwischen beiden Aufgaben besteht im Kausalverhältnis. Die 12 Eier und 15 Eier kann ich mir am nächsten Tag gemeinsam auf den Tisch legen und abzählen, sie hängen kausal nicht voneinander ab. Die beiden Autos dagegen hängen kausal voneinander ab. Das neue Auto erzwingt das Verkaufen des alten Autos (nehmen wir mal an, man hat genau ein Auto).

In der Physik gibt es ähnliches: Die Masse des Teilchens vor und nach dem Stoß zu addieren ist sicher Unsinn, die Subtraktion dagegen beschreibt etwa den Massenzuwachs.

Man sieht hier, daß bei der Benutzung zwischen Ordinalzahlen (darf ich nie addieren, aber subtrahieren) und Kardinalzahlen (darf ich addieren, falls sie in keinem Kausalverhältnis stehen) ein Unterschied zu bestehen scheint, obwohl beide Typen in der Mathematik identifiziert werden. Gerade diese Identifizierung ist die Grundlage für die widerspruchsfreie Definition der Grundrechenarten. Intuitiv benutzen wir diese Identifizierung beim Zählen: Wir bestimmen eine Kardinalzahl, indem wir abzählen, d.h., jedem Objekt aus der zu zählenden Menge der Reihe nach eine Ordinalzahl zuordnen. Trotzdem sollte man das „Zählen“ nicht mit der „Zahl“ verwechseln (Spengler: „Weil der lebendige Akt des Zählens mit der Zeit irgendwie in Beziehung steht, hat man immer wieder Zahl und Zeit vermengt. Aber Zählen ist keine Zahl, so wenig als Zeichnen eine Zeichnung ist. Zählen und Zeichnen ist ein Werden, Zahlen und Figuren sind ein Gewordenens.“)

Obwohl die Zahlen zu den geläufigsten mathematischen Objekten gehören, die seit Jahrtausenden fehlerfrei benutzt werden, gibt es auch aus rein mathematischer Sicht einige Momente, die stutzig machen sollten. So wurden die natürlichen Zahlen axiomatisch erst 1892 mit den Peano-schen Axiomen festgelegt. 1887 erschienen vier wissenschaftliche Arbeiten von solchen Größen wie Dedekind, Helmholtz, Kronecker und Husserl, die alle, grob gesagt, den Titel trugen: Was sind Zahlen?

Man kann sich vorstellen, daß die richtige Benutzung der Zahlen um so wichtiger wird, je komplizierter die betrachteten Probleme werden.

Merke: Nicht alles, was man tun darf, ist sinnvoll.

Merke: Ordinal- und Kardinalzahlen werden in der Mathematik identifiziert, behalten aber bei Gebrauch ihre Unterschiede.

1.1.2 Wofür interessieren wir uns eigentlich und wofür nicht?

Dazu werden wir als erstes untersuchen, für welche physikalischen Größen wir (also der Mensch) uns überhaupt interessieren. Das ist nämlich bei weitem nicht alles Erdenkliche.

Wir haben ein Objekt vor uns, was kann man ihm für Attribute (physikalische Größen) zuordnen: Farbe, Länge, Masse, Helligkeit, Geschmack, ausgeübte Kraft, Temperatur, Geschwindigkeit, Impuls, Energie, Volumen, Preis, Anzahl (wenn das Objekt aus Teilen besteht), Leistung, Ladung, Entropie und vieles mehr.

Diese Vielfalt von Größen täuscht darüber hinweg, daß viele „Größen“ in der Liste nicht auftreten, z.B. die Wurzel aus der Länge oder Energie hoch $3/7$.

Mathematisch könnte man sich mit diesen Größen beschäftigen, aber es macht keiner. Was haben diese Größen an sich, daß sie uns nicht und jene, daß sie uns doch interessieren?

Es stellt sich heraus, daß den Menschen nur ganz bestimmte Größen mit speziellen Eigenschaften interessieren. Das hat weitreichende Folgen. Wenn wir nämlich feststellen, daß eine uns interessierende Größe ein spezielles Verhalten zeigt, und wir dieses Verhalten Naturgesetz nennen, könnte es sein, daß dieses Verhalten an der Größe selbst und nicht an der Natur liegt. Dazu ein Gedankenexperiment: Angenommen, aus irgendeinem Grunde, der in der Organisation des menschlichen Körpers liegt, interessieren wir uns nur für Portionen von Bonbons, die Primzahlen sind. Weiter stellen wir fest, daß es immer und überall beim Verteilen von Bonbons an Kinder Streit gibt, weil die Verteilung nie aufgeht und immer manche Kinder mehr Bonbons als andere erhalten (wenn nicht zufällig die Anzahl der Kinder mit der Anzahl der Bonbons übereinstimmt oder 1 ist). Kann man daraus den Schluß ziehen, sozusagen als Naturgesetz, daß Kinder streitsüchtig sind? Oder liegt es an unserer Art Bonbontüten zu füllen?

1.1.3 Unterschiede zwischen den Größen

Wir haben ein Objekt vor uns, daß durch viele verschiedene Größen charakterisiert wird und fragen uns nach den Eigenschaften dieser Größen und ihrem Verhalten, wenn sich die Objekte verändern.

Das unterschiedliche Verhalten der verschiedenen Größen wird deutlich, wenn wir mehrere Objekte betrachten, und beobachten, wie sich die Größen bei Wechselwirkung verschiedener Objekte verändern, wenn sie "in Bewegung geraten".

- **Volumen und Temperatur**

Wenn wir zwei Flüssigkeitsvolumen mit verschiedener Temperatur zusammenbringen und einen Wärmekontakt herstellen, dann addieren sich die Volumina, aber die Temperaturen gleichen sich aus.

- **Alkoholgehalt, Alkoholmenge und Gesamtmenge**

Bei alkoholischen Getränken haben wir es mit drei Größen zu tun: Gesamtmenge, Alkoholgehalt, Alkoholmenge.

Wenn wir zwei alkoholische Getränke zusammenkippen und mischen, dann addieren sich die Gesamtmengen, der Alkoholgehalt gleicht sich aus und die Menge an reinem Alkohol addiert sich auch. Zwei Größen addieren sich, eine Größe mittelt sich.

- **Geschwindigkeit, Masse und Impuls**

Wir haben zwei Massen, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten in die gleiche Richtung bewegen. Die schnellere Masse fliegt vor der langsameren. Wir koppeln beide Massen durch ein Seil. Was passiert? Nach einer gewissen Einschwingphase, bei der die Elastizität des Seils überschüssige Energie dissipiert, werden sich beide Massen mit derselben Geschwindigkeit bewegen. Diese gemeinsame Geschwindigkeit liegt zwischen den beiden ursprünglichen Geschwindigkeiten. Die Masse und der Impuls des Gesamtsystems ergeben sich als Summe der ursprünglichen Teilmassen und Teilimpulse.

- **Geschwindigkeit, Weg und Zeit**

Wenn ein Gesamtweg aus Teilstücken besteht, die wir mit verschiedenen Geschwindigkeiten zurücklegen, dann ist für jedes Teilstück seine Länge, die benötigte Zeit und die jeweilige Geschwindigkeit charakteristisch. Der Gesamtweg ist die Summe der Längen

der Teilstücke und die Gesamtzeit ist die Summe der Teilzeiten. Die Geschwindigkeiten mitteln sich nicht in der Realität, aber in Gedanken ist die mittlere Geschwindigkeit eine wichtige Größe. Sie liegt zwischen der größten und kleinsten Teilgeschwindigkeit.

Wenn wir z.B. die Strecke mit zwei Geschwindigkeiten 130 km/h und 60 km/h zurückgelegt haben, ist die Summe diese Geschwindigkeiten – 190 km/h – völlig uninteressant.

In beiden Beispielen verhält sich die Geschwindigkeit mittelnd, in einem real, im andern in Gedanken.

- **Kraft, Federkonstante und Auslenkung** Wir koppeln zwei Federn in Reihe. Die Kraft mittelt sich, die Auslenkungen addieren sich. Bei der Federkonstanten addieren sich die Kehrwerte. Das deutet darauf hin, daß man eigentlich nicht die Federkonstante sondern die inverse Federkonstante als Größe betrachten sollte. Die ist nämlich additiv. Das sieht man sehr gut, bei Spiralfedern. Da ist inverse Federkonstante proportional zur Windungszahl.
- Bei geometrischen Größen (**Länge, Flächeninhalt**) muß man aufpassen, sie können sich wie bekannt addieren, aber auch mitteln, wie das folgende Beispiel zeigt:

Wir betrachten zwei mit Wasser gefüllte Gefäße. Verbindet man solche durch einen Schlauch und ermöglicht dem Wasser zu fließen, gleichen sich die Höhen aus. (Tatsächlich gleicht sich der Druck in den Gefäßen aus, der in diesem Fall aber zur Wasserhöhe proportional ist.)

1.1.4 Zwei Typen von physikalischen Größen

Wir stellen fest, daß sich von uns als interessant empfundene Größen in zwei Typen einteilen lassen, solche, die sich addieren und solche, die sich mitteln, wenn verschiedenen Objekte in Kontakt gebracht werden. Dabei spielt sich das Addieren in Gedanken ab, wir fassen die Objekte unter diesem Gesichtspunkt gedanklich zusammen. Das Mitteln der anderen Größen vollzieht sich real. Dazu müssen allerdings geeignete Bedingungen geschaffen werden, wir müssen das Ausgleichen der Größe ermöglichen. Das wurde erreicht durch das Beseitigen der Trennwand zwischen den Körpern beim Ausgleich der Temperatur, das Ineinandergießen (Mischen) der Mischgetränke oder das Aneinanderkoppeln der Massen.

Tatsächlich hängt die Eigenschaft, additiv oder mittelnd zu sein, nicht von den Objekten oder der Situation sondern nur von der Größe selbst ab. Man kann also die Größen bezüglich dieser Eigenschaft kategorisieren. Additive Größen werden extensiv, mittelnde Größen werden intensiv genannt. Diese Bezeichnungen spielen heute eigentlich nur noch in der Thermodynamik eine Rolle. Ursprünglich wurden sie aber als allgemeine Kategorien von Immanuel Kant 1781 in der "Kritik der reinen Vernunft" (Kapitel) eingeführt.

Beispiele für extensive Größen sind Zeitintervall, Länge (Breite, Höhe), Fläche, Volumen, Masse, Ladung, Impuls, Energie, Äpfel, Birnen, Stückzahl, Geld

Beispiele für intensive Größen sind Temperatur, Alkoholgehalt, Geschwindigkeit, Kraft, elektr. Strom, elektr. Spannung, Druck, Preise.

Hier ist allerdings zu erwähnen, daß die visuelle Wahrnehmung des Menschen sehr komplex ist, was dazu führt, daß räumliche Größen wie Länge oder Fläche eigentlich nicht ohne weitere Erklärungen als extensive Größen gezählt werden können und auch tatsächlich als intensive Größen auftreten können. Das Verhalten räumlicher Größen wird in einem Extrapunkt besprochen.

Häufig ist die Zuordnung nicht leicht, da unter speziellen Bedingungen extensive Größen auch mittlend und intensive Größen auch additiv auftreten können. Entscheidend ist, wie sich die Größen in allgemeinen Situationen verhalten.

Merke: Den Menschen interessieren nur intensive und extensive Größen.

Es sei bemerkt, daß sich “Größen” wie “die Wurzel aus der Länge” oder “Energie hoch $3/7$ ” in keine dieser Typen einordnen läßt. Zum Glück interessieren sie uns nicht.

Jeder Physiker wird sicher sofort eine große Zahl von “Größen” nennen können, als Beispiel sei die Beschleunigung erwähnt, die durchaus interessieren und sich hier nicht oder nicht eindeutig (wie die Länge) einordnen lassen. Diese Beispiele lassen sich bei genauem Hinsehen “wegdiskutieren” bzw. erklären. So ist die Beschleunigung “eigentlich” der inverse Krümmungsradius. Newtons zweites Gesetz könnte man so formulieren: Die extensive Masse geteilt durch den Krümmungsradius ist die Kraft.

Es entsteht natürlich sofort die Frage, warum wir uns nur für intensive und extensive Größen interessieren. Wenn man sich die intensiven Größen genauer betrachtet, stellt man fest, daß es genau die sind, die wir mit unseren Sinnen wahrnehmen und vergleichen können (wärmer/kälter, größer/kleiner, schärfer/milder, stärker/schwächer, ...).

Unser Interesse für intensive Größen ist also offensichtlich. Uns interessiert das, was wir wahrnehmen. Wäre der menschliche Körper mit anderen Sinnesorganen ausgestattet, würden uns intensive Größen vielleicht gar nicht interessieren.

Extensive Größen dagegen, können wir nicht wahrnehmen, auch wenn wir häufig den Eindruck haben, daß wäre der Fall. So ist es sehr schwer Massen zu schätzen. Sie wird über die Kraft, die sie z.B. auf die Hand ausübt wahrgenommen. Die Kraft wiederum wird punktuell wahrgenommen. Wir können Kräfte punktuell sehr gut vergleichen, aber z.B. zwei gleich schwere aber unterschiedlich geformte Objekte nur mit großer Mühe.

Warum interessieren uns also extensive Größen? Wir können intensive Größen wahrnehmen, aber diese Empfindung ist sehr subjektiv. Um sie zu objektivieren, wollen wir ihnen Zahlen zuordnen. Das wiederum geht nur mit Hilfe von extensive Größen. Denen Zahlen zuzuordnen ist relativ einfach.

Die Theorie der intensiven und extensiven Größen ist sehr kompliziert. Oft hat man den Eindruck, daß diese Einteilung widersprüchlich ist. Diese Widersprüche lassen sich in der Regel nach einiger Überlegung auflösen. Mehr noch: Immer, wenn man auf scheinbare Widersprüche stößt, sollte das ein Zeichen dafür sein, daß man das Problem noch nicht endgültig verstanden hat.

1.2 Zahlen für physikalische Größen

1.2.1 Zählen. Messen extensiver Größen

Uns ist die Benutzung von Zahlen dermaßen geläufig, daß wir gar nicht mehr wissen, wo die Zahlen ursprünglich herkommen. Was ist das erste Beispiel, wo wir in der Praxis Zahlen verwenden? Beim Zählen. Wir können die Anzahl von Objekten in einer von uns vorgegebenen Menge durch Abzählen bestimmen.

Die Fähigkeit zum Zählen ermöglicht es, auch anderen extensiven Größen – etwa Längen – Zahlen zuzuordnen. Dazu wählt man sich ein gut bekanntes und jeder Zeit griffbereites Objekt mit definierter Länge (Elle, Schritt, Daumenbreite, ...) als Normlänge (Normmaß) und stellt fest, wie oft dieses Normmaß in einer gegebenen Länge aufgeht. Dazu muß man das Normmaß lückenlos und „in Reihe“ aneinanderlegen. Die zu messende Länge gibt dabei die Richtung an. Hier ist wieder die Fähigkeit zu zählen erforderlich. Man erhält etwa: In die gegebene Länge L passen 5 Normlängen L_0 : $L = 5 \cdot L_0$. Damit diese Methode funktioniert, ist erforderlich, daß die zu messende Größe additiv – also extensiv – ist und beim Meßprozeß erhalten bleibt. (Deshalb wählt man Normlängen etwa aus Holz und nicht aus Gummi.)

Nimmt man es genauer, so ist ein Meßprozeß das Bilden der Differenz zweier intensiver Größen. Die Normgröße L_0 könnte man schon vorher als Skala auf einem Stock (Zollstock) abtragen (offensichtlich bei der Länge) und dann an die zu messende Größe anlegen. Das ergibt $L = (x_1 - x_0) \cdot L_0$, wobei x_0 und x_1 Anfangs- und Endpunkt der Skala sind. Beim Zählen könnte man auch mit einer Zahl $x_0 > 0$ beginnen. Die Anzahl ist dann $(x_1 - x_0) \cdot$ Stück, wobei x_0 vor dem ersten zu zählenden Objekt liegt.

An diesem Beispiel kann man zweierlei lernen: Koordinaten sind stets intensive Größen und von einer intensive Größen ist stets nur die Differenz, also ein relativer Wert von Interesse.

Eine Voraussetzung dafür, daß man eine Größe messen kann, ist ihre Erhaltung (in Raum und Zeit). Mit anderen Worten: Größen, die man messen kann bleiben erhalten. Besonders deutlich ist das bei der Volumenmessung durch Wasserverdrängung.

Diese Tatsache macht Erhaltungssätze beinahe zu Tautologien. Erhaltungssätze gibt es einerseits nur für extensive Größen und andererseits müssen extensive Größen erhalten bleiben. Das ist manchmal nicht so offensichtlich (etwa beim Impulserhaltungssatz), manchmal aber so offensichtlich, daß es nicht der Rede wert ist. So gibt es keinen Satz der Erhaltung der Länge, obwohl er sich mathematisch völlig äquivalent zum Impulserhaltungssatz „herleiten“ ließe.

Das nicht triviale am Energieerhaltungssatz ist, daß es gelingt, solche Experimente durchzuführen, daß man alle Energieanteile messen kann. Daß sie sich dann zur Gesamtenergie addieren, ist trivial.

1.2.2 Intensive Größen kann man nicht messen

Letztlich wird das Messen extensiver Größen häufig auf das Messen von Längen zurückgeführt. Das hängt mit der starken Dominanz unserer visuellen Fähigkeiten gegenüber allen anderen Sinnen zusammen. Das müßte aber nicht sein, man könnte sich für jede extensive Größe eine spezielle Meßmethode überlegen. So könnte man den Impuls messen, indem man kleine genormte Raketentriebwerke erzeugt und einen gegebenen Impuls mißt, indem man zählt wieviel solcher Raketentriebwerke gebraucht werden um den Impuls zu kompensieren. Das macht natürlich keiner. Lieber rechnet man den Impuls aus, indem man die Masse (die eigentlich nicht „gezählt“ sonder über die Kraft „gewogen“ wird) mißt und mit der Geschwindigkeit (die man auch nicht direkt messen kann) multipliziert.

Intensive Größen kann man aber prinzipiell nicht direkt messen. Das liegt daran, daß sie sich „beim Aneinanderlegen“ nicht additiv und damit nicht erhalten bleiben. Das wird besonders bei der Temperatur deutlich. Man kann nicht mehrere 1°C warme Körper geeignet zusammenlegen um eine höhere Temperatur zu erhalten.

Das selbe trifft für andere intensive Größen, etwa die Geschwindigkeit zu. Man erhält eben keinen sich mit 20 km/h bewegendem Körper aus zweien, die sich mit 10 km/h bewegen. Hier könnte man einwenden, daß man aus Erfahrung weiß, daß sich Geschwindigkeiten addieren.

Man könnte etwa auf einen sich mit 10 km/h bewegenden Wagen einen weiteren sich mit 10 km/h bewegenden Wagen stellen. Aber dieser weitere Wagen bewegt sich eben nicht mit 10 km/h relativ zum zu messenden Objekt sondern mit 20 km/h.

Wie später noch besprochen wird, tritt die “bekannte” Additivität der Geschwindigkeit nur unter speziellen Bedingungen auf und widerspricht nicht ihrem intensiven Charakter.

1.2.3 Berechnung intensiver Größen

Schaut man sich ein paar intensive x und extensive (P und Q) Größen an, so sieht man, daß sie häufig in der Form $Q = x \cdot P$ auftreten. Wir bezeichnen im weiteren extensive Größen mit großen, intensive mit kleinen Buchstaben.

	extensiv	=	intensiv	·	extensiv	
Chemie, Alltag	Anteil	=	Prozente	·	Gesamtmenge	$A = \% \cdot M$
	Alkoholmenge	=	Alkoholgehalt	·	Gesamtvolumen	
Mechanik	Weg	=	Geschwindigkeit	·	Zeitintervall	$L = v \cdot T$
	Impuls	=	Geschwindigkeit	·	Masse	$P = v \cdot M$
	Impuls	=	Kraft	·	Zeitintervall	$P = f \cdot T$
	Arbeit	=	Kraft	·	Weg	$W = f \cdot L$
	Auslenkung	=	Kraft	·	1/Federkonstante	$L = f \cdot D$
Geometrie	Fläche	=	Höhe	·	Länge	$F = h \cdot L$
	Volumen	=	Höhe	·	Fläche	$V = h \cdot F$
Elektrik	Ladung	=	Spannung	·	Kapazität	$Q = v \cdot C$
	Ladung	=	el. Strom	·	Zeitintervall	$Q = i \cdot T$
Wärmelehre	Energie	=	Druck	·	Volumen	$E = \varrho \cdot V$
	Energie	=	Temperatur	·	Entropie	$E = \theta \cdot S$
Optik	Licht	=	Helligkeit	·	Fläche	$I = h \cdot F$
Ökonomie	Umsatz	=	Preis	·	Stückzahl	$U = c \cdot K$

Bei den geometrischen Zusammenhängen ist zu beachten, daß die Länge, etwa als “Höhe” auch als intensive Größe auftreten kann.

Sollte der Zusammenhang der Größen $Q = x \cdot P$ irgendwie “kanonisch” sein, so könnte man einen Zahlwert für x einfach als $x = Q/P$ definieren, wobei P und Q als extensive Größen gemessen werden können.

$$x = \frac{Q}{P} \iff Q = x \cdot P \quad (1)$$

Diese Zuordnung ist tatsächlich beinahe eindeutig – bis auf Verschiebung und Skalierung. Die Skalierung ist offensichtlich, das ist nur eine Änderung der Maßeinheit (m/s anstelle von km/h). Die Verschiebung (und Skalierung) wird besonders deutlich bei den verschiedenen Temperaturskalen, die sich in ihrer Skalierung und in ihrem “Nullpunkt” unterscheiden.

Diese Eindeutigkeit der Berechnung einer intensiven Größe (modulo affiner Transformation) ist ein strenger mathematischer Satz (siehe nächste Subsection). Ihm haben wir zu “verdanken”, daß exaktes Definieren von physikalischen Größen und Rechnen damit überhaupt möglich ist.

1.2.4 Physikalische Einheiten

Jede interessante physikalische Größe läßt sich auf diese Weise zuordnen. Am einfachsten ist diese Zuordnung über die Einheiten möglich. Dabei werden einige Einheiten, nämlich Länge[L],

Masse[M], Zeitintervall[T] und Ladung[Q=As] als Grundeinheiten definiert. Zu beachten ist, daß die extensive Größe Ladung [Q] (zählen von Elektronen) und nicht etwa wie allgemein üblich der Strom [A] (intensive Größe: Ladung pro Zeit) als Grundeinheit gewählt werden muß. Extensive Größen zeichnen sich durch Homogenität 1 aus, intensive durch Homogenität 0. Homogenität bedeutet hier die Anzahl der Größen im Zähler minus der Anzahl der Größen im Nenner. Die Größen mit einer Grundeinheit sind offensichtlich extensiv.

Ausgewählte extensive Größen haben die Einheiten Länge[L], Masse[M], Zeitintervall[T], Impuls[ML/T], 1/Federkonstante[T²/M], Ladung[Q=As], Kapazität[T² Q²/M/L²], Volumen[V], Geldmenge[Euro], Anzahl[Stück], ...

Ausgewählte intensive Größen haben die Einheiten Geschwindigkeit[L/T], Kraft[ML/T²], el. Strom[Q/T=A], Prozentanteil[V/V = “ ”], ...

1.2.5 Das endliche duale Produkt

Mit (1) wird dem Produkt einer extensiven und einer intensiven Größe wieder eine extensive Größe zugewiesen. Diese kann man addieren. Das ergibt den häufig benutzten Ausdruck:

Extensiv = extensiv mal intensiv + extensiv mal intensiv + ...

Beispielsweise ist:

- Gesamtweg = Summe der Teilgeschwindigkeiten mal entsprechender Zeitintervalle
- Umsatz = Summe der Preise mal Stückzahlen

Eine typische Konstruktion in der linearen Algebra ist

$$Q = g_1 P_1 + \dots + g_n P_n$$

und wird meistens Skalarprodukt genannt. Hier sind $g = (g_1, \dots, g_n)$ und $P = (P_1, \dots, P_n)$ zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^n$.

Zwischen g_i und P_i gibt es mathematisch keinen Unterschied. Beides sind reelle Zahlen. Mit beiden kann man rechnen wie mit Zahlen. Aus physikalischer Sicht sind das aber völlig verschiedene Objekte. Es handelt sich um das Produkt eines Vektors aus intensiven und das eines Vektors aus extensiven Größen. So ein Produkt heißt – im Gegensatz zum Skalarprodukt, bei dem Größen desselben Typs multipliziert werden – duale Paarung. Es ist klar, daß man auch die beiden Räume – wieder im Gegensatz zum Skalarprodukt – unterscheiden sollte. Wie sich zeigen wird sind das zueinander duale Banachräume.

Im Grenzfall ergibt die duale Paarung das Lebesgueintegral:

$$Q = g_1 \cdot P_1 + \dots + g_n \cdot P_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q(B) = \int_B g(x) P(dx)$$

Genau genommen ist das aus dem euklidischen Raum bekannte Skalarprodukt $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ auch nur ein Spezialfall des allgemeineren Skalarproduktes $\sum_{i=1}^n x_i y_i \mu_i$, wobei μ ein geeignetes Maß ist.

Hilbertraum	Banachraum
$x, y \in \mathbb{R}^n, \mu \in \mathbb{R}_+^n \quad \mu \in \mathcal{P}, x, y \in L_2(\mu)$	$g \in \mathbb{R}_n, P \in \mathbb{R}_n^* \quad g \in \mathcal{C}, P \in \mathcal{C}^*$
$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \mu_i \rightarrow \int_{\mathcal{Z}} x(\xi) y(\xi) \mu(d\xi)$	$\langle g, P \rangle = \sum_{i=1}^n g_i P_i \rightarrow \int_{\mathcal{Z}} g(z) P(dz)$

1.2.6 Die Umkehrung des Lebesgueintegrals

1.2.7 Die scheinbare Additivität von Geschwindigkeiten und Kräften

Wenn intensive Größen additiv auftreten, dann bedeutet das, daß man eigentlich, eine extensive Größe betrachtet. Wenn man z.B. Geschwindigkeiten addiert, addiert man eigentlich die Wege bei gleichem gegebenem Zeitintervall. Oft bemerkt man nicht, daß der Nenner konstant bleibt. Beim Addieren von Kräften addiert man eigentlich die Arbeit (Arbeit ist Energie und extensiv), die über dieselbe Weglänge wirkt.

Nimmt man andere Beispiele intensiver Größen, etwa den Preis, wird das noch offensichtlicher. Wenn man n Stück X von etwas braucht und jedes Stück besteht aus einem A , einem B und einem C , kann man die Preise von A , B und C addieren um den Preis eines Stücks X erhalten will. Aber das ist eben ein sehr seltener Fall, daß man die selben Stückzahlen an Objekten braucht. Keiner kommt auf die Idee, zum Berechnen des Preises eines Butterbrottes, den Preis eines Brotes und den Preis eines Stück Butter zu addieren. Im Gegenteil, man bestimmt genau die Mengen, die man benötigt und addiert dann. Das bedeutet letztlich, daß man den Hauptnenner bildet. Auch das Addieren von gebrochenen Zahlen (intensive Größen) ist ohne weiteres nicht möglich. Man muß erst den Hauptnenner (extensive Größe) bilden und kann dann die Zähler (extensive Größe) addieren.

Der Unsinn mit der Addition von Geschwindigkeiten wird deutlich, wenn man z.B. den Weg konstant läßt: Von Berlin nach München ist ein Auto 130 km/h schnell, ein ICE 300 km/h. Wann könnte es sinnvoll sein, hier die Summe der Geschwindigkeiten zu bilden?

1.3 Mathematische Zusammenhänge physikalischer Größen

Wir untersuchen im weiteren einige mathematische Eigenschaften extensiver und intensiver Größen. Dazu werden die empirisch gewonnen Erkenntnisse in mathematische Ausdrücke gefaßt. Insbesondere geht es hier darum, was es bedeutet, einer intensiven Größe eine reelle Zahl zuzuordnen.

- Es seien B_i physikalische Objekte/Körper, mit denen wir wie mit disjunkten Mengen arbeiten können. Alle diese B_i seien gedanklich Teil einer Menge $\mathcal{Z}$. Das “in Kontakt bringen” zweier Objekte B_1 und B_2 zum Objekt B bezeichnen wir mit der disjunkten Vereinigung $B = B_1 \sqcup B_2$. Wir betrachten nur das “in Kontakt bringen” von disjunkten Objekten (Aristoteles: “Wo ein Körper ist, kann nicht ein anderer sein.”).
- Wir nehmen an – um uns die Betrachtungen nicht durch zusätzliche Fallunterscheidungen, die das Wesen der Sache nur vernebeln, zu verkomplizieren – daß die Objekte/Körper beliebig teilbar sind, wir also Objekte für beliebige Größen zur Verfügung haben.
- Wir nehmen an, daß wir jede extensive Größe P messen können, ihr also eine nichtnegative reelle Zahl aus $\mathbb{R}_+$ zuordnen können. Es gibt also Abbildungen $P : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $P(B) \in \mathbb{R}_+$. Da P eine extensive Größe ist, gilt bei Kontakt zweier Objekte

$$P(B_1 \sqcup B_2) = P(B_1) + P(B_2), \quad B_1, B_2 \in \mathcal{Z} \quad (2)$$

Des weiteren nehmen wir an, daß wir für jedes $\alpha \in \mathbb{R}_+$ ein $B \in \mathcal{Z}$ mit $P(B) = \alpha$ finden können (beliebige Teilbarkeit der Objekte).

- Wir nehmen an, daß wir jede intensive Größe x wahrnehmen und verschiedene Wahrnehmungen vergleichen können. Es gibt also Abbildungen $x : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$, $x(B) \in \mathcal{X}$, wobei $\mathcal{X}$ eine linear geordnete Menge sei. Für zwei Objekte B_1 und B_2 , gelte $x(B_1) \leq x(B_2)$, $x(B_1) \geq x(B_2)$ oder $x(B_1) = x(B_2)$.

Da x eine intensive Größe ist, gilt bei Kontakt zweier Objekte (o.B.d.A. sei $x(B_1) \geq x(B_2)$)

$$x(B_1) \leq x(B_1 \sqcup B_2) \leq x(B_2), \quad B_1, B_2 \in \mathcal{Z} \quad (3)$$

Des weiteren nehmen wir an, daß wir für jedes $\xi \in \mathcal{X}$ ein $B \in \mathcal{Z}$ mit $x(B) = \xi$ finden können (beliebige Teilbarkeit der Objekte).

- Wir nehmen an, daß wir zu jeder intensiven Größe x zwei extensive Größen P und Q derart finden können, daß Q für jedes Objekt eindeutig durch x und P bestimmt ist. Es gibt also einen funktionellen Zusammenhang $f : \mathcal{X} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, sodaß $Q(B) = f(x(B), P(B))$ für alle $B \in \mathcal{Z}$. Wir schreiben das als $Q = f(x, P)$ und nennen Q den Zähler und P den Nenner von x .

Die Frage ist: Wann und wie ist es möglich, ausgehend von der Kenntnis von f , der intensiven Größe x für jedes Objekt B eine reelle Zahl $g(x(B))$ zuzuordnen. Es stellt sich heraus, daß die – physikalisch völlig plausiblen – Voraussetzungen (2) und (3) derart streng sind, daß die empirische Definition

$$g(x(B)) = \frac{Q(B)}{P(B)}, \quad B \in \mathcal{Z}$$

die weitgehend einzige Möglichkeit dafür ist.

1.3.1 Ein bilinearer Zusammenhang

Grundlegend für die Möglichkeit, mathematische Aussagen in der Physik anzuwenden, ist intensiven Größen Zahlen zuzuordnen. Zwischen x , P und Q besteht ein funktioneller Zusammenhang $Q = f(x, P)$. Im Weiteren soll untersucht werden, ob man näheres über diesen Zusammenhang aussagen kann, insbesondere, ob es möglich ist, der intensiven Größe x eine reelle Zahl zuzuordnen.

Aussagen dazu liefert folgender

Satz: Es sei x eine intensive und P und Q extensive Größen. Dann existiert eine Funktion $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$, die jeder intensiven Größe streng monoton und damit eineindeutig eine reelle Zahl zuordnet.

Im Laufe des Beweises wird klar werden, welche mathematischen Voraussetzungen an die physikalischen Größen gestellt werden müssen und in welchem Sinn die Funktion C einzig ist. Die Voraussetzungen erfüllen intuitiv extensive und intensive Größen.

Beweis:

Wir setzen $Q_1 = Q(B_1)$, $Q_2 = Q(B_2)$, $Q_{12} = Q(B_1 \sqcup B_2)$, $P_1 = P(B_1)$, $P_2 = P(B_2)$, $P_{12} = P(B_1 \sqcup B_2)$, $x_1 = x(B_1)$, $x_2 = x(B_2)$, $x_{12} = x(B_1 \cup B_2)$. OBdA sei $x_1 \leq x_2$.

Dann gilt einerseits und andererseits:

$$\begin{aligned} Q_{12} &= Q_1 + Q_2 = f(x_1, P_1) + f(x_2, P_2) = \\ &= f(x_{12}, P_{12}) = f(x_{12}, P_1 + P_2) \end{aligned}$$

Es folgt

$$f(x_{12}, P_1 + P_2) = f(x_1, P_1) + f(x_2, P_2) \quad (4)$$

Wegen $x_1 \leq x_{12} \leq x_2$ folgt aus $x_1 = x_2 = x$ auch $x_{12} = x$ und damit

$$f(x, P_1 + P_2) = f(x, P_1) + f(x, P_2) \quad (5)$$

Für fixiertes x ist $f(x, \cdot)$ eine reellwertige additive Funktion. Sie muß linear sein. Das folgt aus folgendem

Lemma: Es sei $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die die Gleichung $h(x + y) = h(x) + h(y)$ erfüllt. Dann ist $h(x) = cx$ für beliebiges aber festes $c \in \mathbb{R}$.

Beweis des Lemmas: Unter Benutzung der Funktionalgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} y = x &\implies h(2x) = 2h(x) \\ \text{Induktion:} &\implies h(nx) = nh(x), \quad n \in \mathbb{N} \\ x = \frac{1}{m} &\implies h\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m}h(1), \quad m \in \mathbb{N} \\ &\implies h\left(\frac{n}{m}\right) = \frac{n}{m}h(1), \quad n, m \in \mathbb{N} \\ \text{Stetigkeit:} &\implies h(x) = xh(1) =: cx, \quad x > 0, \quad c \text{ bel.} \\ x = 0 &\implies h(0) = 0 \\ x < 0 : y = -x &\implies h(x) = -h(-x) \end{aligned}$$

Damit ist eine notwendige Bedingung an h gefunden. Die Probe bestätigt, daß jede lineare Funktion Lösung der Funktionalgleichung ist. □(Lemma)

Bemerkung 0: Diese Funktionalgleichung heißt Cauchysche Funktionalgleichung.

Bemerkung 1: Unter der Voraussetzung der Differenzierbarkeit folgt einfacher $h'(x+y) = h'(y)$ also $h'(x) = h'(0) =: c$. Hier wurde aber der allgemeinere Weg gegangen, weil Stetigkeit eine topologische Eigenschaft ist und Differenzierbarkeit eine metrische, die wir eigentlich nicht voraussetzen wollen.

Bemerkung 2: Die Voraussetzung der Stetigkeit kann abgeschwächt werden. Lokale Beschränktheit von h reicht aus.

Bemerkung 3: Es lassen sich nichtstetige Lösungen finden. Dazu stellt man $\mathbb{R}$ als unendlichdimensionalen linearen Raum über den rationalen Zahlen mithilfe einer sogenannten Hamel-Basis dar. Die Existenz einer solchen Basis läßt sich nur mit dem Auswahlaxiom beweisen.

Folgerung: Analog lassen sich weitere Funktionalgleichung lösen:

$$\begin{aligned} h(x+y) &= h(x) \cdot h(y) &\implies h(x) &= c^x \\ h(x \cdot y) &= h(x) + h(y) &\implies h(x) &= \log_c x \\ h(x \cdot y) &= h(x) \cdot h(y) &\implies h(x) &= x^c \end{aligned}$$

Damit erhalten wir aus (5) die Darstellung

$$Q = f(x, P) = C(x) \cdot P. \quad (6)$$

Aus (6) und (4) erhalten wir

$$C(x_{12})(P_1 + P_2) = C(x_1)P_1 + C(x_2)P_2$$

oder

$$C(x_{12}) = \frac{C(x_1)P_1 + C(x_2)P_2}{P_1 + P_2}$$

Hieraus folgt $C(x_{12}) \in [C(x_1), C(x_2)]$ (d.h., $C(x_1)$, $C(x_2)$ und $C(x_{12})$ liegen auf einer Geraden.

Monotonie: Wir zeigen, daß C eineindeutig oder konstant ist. Es sei $C(x_1) = C(x_2) = c$ aber $x_1 \neq x_2$. Dann ist auch $C(x_{12}) = c$. Damit ist C konstant. Diesen Fall können wir als uninteressant ausschließen, denn dann hängt $f(x, P)$ nicht von x ab. Das heißt, P ist nicht der Nenner von x . Damit ist C eineindeutig und wegen der linearen Ordnung von $\mathcal{X}$ monoton. Es existiert also C^{-1} und es gilt

$$x = C^{-1} \left(\frac{Q}{P} \right), \quad x(B) = C^{-1} \left(\frac{Q(B)}{P(B)} \right)$$

und

$$x_{12} = C^{-1} \left(\frac{C(x_1)P_1 + C(x_2)P_2}{P_1 + P_2} \right) \quad (7)$$

Wir wählen zwei Objekte B_1 und B_2 mit $P_1 = P_2$. Dann folgt aus $x_1 < x_2$ auch $Q_1 < Q_2$. Damit ist C monoton wachsend. Entscheidend ist hier nur die Monotonie von C . Ob C wächst oder fällt ist eine Frage der Definition der Ungleichung $x_1 < x_2$ (ob wir z.B. einer größeren Länge eine größere oder eine kleinere Zahl zuordnen wollen).

Einzigkeit: Angenommen, wir haben zwei Funktionen C_1 und C_2 , die verschiedene Möglichkeiten einer Funktion C für (6) darstellen. Den Zusammenhang dieser beiden Funktionen liefert folgendes

Lemma: Es seien $C_1, C_2 : \mathcal{X} \rightarrow I \subset \mathbb{R}$ zwei Abbildungen intensiver Größen in ein Intervall der reellen Zahlen. Für alle $P_1, P_2 \geq 0$ und alle $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ gelte

$$x_{12} = C_1^{-1} \left(\frac{C_1(x_1)P_1 + C_1(x_2)P_2}{P_1 + P_2} \right) = C_2^{-1} \left(\frac{C_2(x_1)P_1 + C_2(x_2)P_2}{P_1 + P_2} \right)$$

dann gibt es reelle Zahlen α und β mit

$$C_1(x) = \alpha C_2(x) + \beta$$

Beweis des Lemmas: Die Funktion $h = C_1 \circ C_2^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine reelle Funktion. Es sei $C_2(x_i) = \xi_i$ also $x_i = C_2^{-1}(\xi_i)$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \frac{C_1(x_1)P_1 + C_1(x_2)P_2}{P_1 + P_2} &= (C_1 \circ C_2^{-1}) \left(\frac{C_2(x_1)P_1 + C_2(x_2)P_2}{P_1 + P_2} \right) \\ \frac{(C_1 \circ C_2^{-1})(\xi_1)P_1 + (C_1 \circ C_2^{-1})(\xi_2)P_2}{P_1 + P_2} &= (C_1 \circ C_2^{-1}) \left(\frac{\xi_1 P_1 + \xi_2 P_2}{P_1 + P_2} \right) \end{aligned}$$

Das ist eine Gleichheit zwischen konvexen Kombinationen und dem Funktionswert der konvexen Kombination. Für solche Ausdrücke gilt die Jensensche Ungleichung. Hier gilt aber Gleichheit. In der Jensensche Ungleichung gilt Gleichheit für alle Argumente, genau dann, wenn die Funktion sowohl konvex als auch konkav und damit affin ist. Es gilt also $(C_1 \circ C_2^{-1})(\xi) = \alpha \xi + \beta$ mit gewissen reellen Zahlen α und β . Setzen wir wieder $C_2^{-1}(\xi) = x$ folgt die Behauptung.

□(Lemma) □(Satz)

Bemerkung 1: Die Eindeutigkeit bis auf affine Transformationen kennt man gut von der Messung intensiver Größen, etwa der Temperatur (Celsius- bzw. Fahrenheit-Skalen). Der Zahlenwert kann sowohl verschoben als auch skaliert werden.

Bemerkung 2: Viele intensive Größen haben einen natürlichen Nullpunkt (keine Helligkeit = 0, kein Preis = 0, ...). In diesem Fall sollte man den natürlichen Nullpunkt der reellen Zahl 0 zuordnen. Die Skalierbarkeit bleibt erhalten.

Bemerkung 3: Sollte die intensive Größen nach oben und unten beschränkt sein, dann sind α und β nicht mehr frei sondern bestimmen sich aus diesen Schranken.

Bemerkung 4: Die Eindeutigkeit bis auf affine Transformationen drückt sich bei der Geschwindigkeit durch das Galileische Relativitätsprinzip aus. Es läßt sich die Geschwindigkeit eines Objektes nur relativ zum Beobachter bestimmen.

Bemerkung 5: Bei der Messung extensiver Größen gibt es die affine Freiheit nicht: Eine Länge enthält z.B. 5 Normlängen. Das kann weder skaliert noch verschoben werden.

Bemerkung 6: Die fehlende Eindeutigkeit, mit der man intensiven Größen Zahlen zuordnen kann, macht deutlich, daß alle Zahlenwerte in der Physik – im Gegensatz zu den Größen selbst –, relativ sind. So etwa auch die Größe des Weltalls und Entfernungen zwischen den Sternen. Das wird manchmal als “Nichterkennbarkeit der Welt” interpretiert. Dabei wird implizit unterstellt, daß Erkennbarkeit bedeutet, physikalischen Größen eindeutig Zahlen zuordnen zu können. Siehe:

1.3.2 Definition des Zahl- und Mittelwertes intensiver Größen

Es sei im weiteren C eine feste Funktion entsprechend (6) und

$$g(B) = C(x(B)) = \frac{Q(B)}{P(B)} \tag{8}$$

der Wert der intensiven Größe x mit Zähler Q und Nenner P . Damit haben wir eine Abbildung $g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ gefunden.

Die Größe des Objektes B ist für die Definition von g eigentlich unwichtig, hauptsache, $x(B)$ ändert sich nicht allzu sehr, je kleiner B wird.

Es sei $B_2 \subset B_1$, dann gilt $Q(B_2) \leq Q(B_1)$ und $P(B_2) \leq P(B_1)$. Damit ist nicht klar, wie sich $g(B_1)$ und $g(B_2)$ zueinander verhalten. Es kann sein, daß für eine Folge von Objekten $B_n \subset \dots \subset B_2 \subset B_1$ gilt

$$\frac{Q(B_1)}{P(B_1)} = \frac{Q(B_2)}{P(B_2)} = \dots = \frac{Q(B_n)}{P(B_n)}$$

In so einem Fall können wir g auf dem kleinstmöglichen Objekt definieren.

Es sei $\{z\}$ kleinstmögliches Objekt, das in den B_i enthalten ist. Wir nennen so ein Objekt Zustand und definieren den Wert von x am Zustand z als

$$g(z) = \lim_{B \rightarrow \{z\}} \frac{Q(B)}{P(B)} = \inf_{z \in B} \frac{Q(B)}{P(B)} = \sup_{z \in B} \frac{Q(B)}{P(B)}$$

Diese Definition ist so zu verstehen: Der sup- und der inf-Ausdruck haben einen Sinn. Fall beide gleich sind, nennen wir diese Größe Limes.

Diese Definition ist nur sinnvoll, wenn g stetig ist. Diese Definition läßt sich unter gewisse Bedingungen durch den Satz von Radon und Nikodym verallgemeinern.

Es seien A und B disjunkte Objekte. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(A \sqcup B) &= \frac{Q(A \sqcup B)}{P(A \sqcup B)} = \frac{Q(A) + Q(B)}{P(A) + P(B)} = \frac{g(A)P(A) + g(B)P(B)}{P(A) + P(B)} = \\ &= g(A) \frac{P(A)}{P(A) + P(B)} + g(B) \frac{P(B)}{P(A) + P(B)} \end{aligned}$$

Der Wert der intensiven Größe einer Vereinigung ist also eine konvexe Kombination der einzelnen Werte.

Wir können eine besondere Addition definieren:

$$g(A \sqcup B) = g(A) \oplus g(B) = \frac{Q(A)}{P(A)} \oplus \frac{Q(B)}{P(B)} = \frac{Q(A) + Q(B)}{P(A) + P(B)}$$

Diese Größe wird Mediant der beiden Brüche bezeichnet.

1.3.3 Kardinal- und Ordinalzahlen

Eine endliche Kardinalzahl $|A|$ ist eine Darstellung der Mächtigkeit einer endlichen Menge A , also die Anzahl ihrer Elemente. Kardinalzahlen sind positiv, man kann sie addieren. Es ist $|A \cup B| = |A| + |B|$ falls $A \cap B = \emptyset$. Kardinalzahlen kann man vergleichen und linear ordnen. Eine Kardinalzahl ist eine "räumliche" Größe in dem Sinne, daß man sie zu einem Zeitpunkt (d.h. in einem stationären Zustand) im Raum wahrnehmen (als Anzahl der Elemente einer Menge) kann.

Eine Ordinalzahl ist der Index in einer linear geordneten Menge. Z.B. könnte man die Kardinalzahlen von einer gewissen Anzahl gegebener Mengen der Größe nach ordnen und in dieser Reihe Nummern verteilen. Je nachdem, von welchen Mengen man ausgegangen ist können dabei Lücken bleiben (wenn man z.B. nur die Kardinalzahlen für Mengen mit 1, 2 und 4 Elementen betrachtet hat, erhält die 4-er Menge den Index "3".)

Aus der Erfahrung wissen wir, daß es zu jeder Ordinalzahl auch eine Menge gibt, deren Kardinalzahl dieser Ordinalzahl entspricht. Das führt dazu, daß wir Kardinal- und Ordinalzahlen identifizieren. Erst das ermöglicht uns, die Kardinalzahl einer Menge mit vielen Elementen durch Abzählen der Elemente zu bestimmen.

Das Zählen selbst ist ein kausaler Prozeß, der in der Zeit stattfindet. Insbesondere sollte die Zeitrichtung mit der Zählrichtung übereinstimmen um zum richtigen Ergebnis zu gelangen.

Wir können also Kardinalzahl mit räumlichen und Ordinalzahlen mit zeitlichen Phänomenen in Verbindung bringen.

Mathematisch werden endliche Kardinal- und Ordinalzahlen identifiziert, indem zu jeder Ordinalzahl eine Mengen mit der entsprechenden Kardinalzahl definiert wird. Gut bekannt ist, daß sich im Unendlichen Kardinal- und Ordinalzahlen dagegen unterscheiden. Daß das auch im endlichen der Fall ist, sieht man, wenn man sie auf “nicht natürliche” aber dennoch endliche Zahlen verallgemeinert.

“Gebrochene” Kardinalzahlen kann man sich vorstellen, indem man nicht jedem Element einer Menge gleichwertig ein Element zuordnet sondern “großen” Elementen größere Zahlen. Genau das tut man, wenn man z.B. eine Länge mit kleinerem Maßstab mißt: Das Objekt ist länger als 3 Meter, aber kürzer als 4 Meter lang. Genaueres nachmessen ergibt 356 Zentimeter oder 3.56 Meter. Man kann auf diese Weise endliche Dezimalzahlen als Kardinalzahlen verstehen. Auch hier bleibt die Positivität, die Additivität und die Erhaltung bestehen.

“Gebrochene” Ordinalzahlen kann man sich auch vorstellen. Dazu muß man sich das Abzählen einer Menge vorstellen, die sich in der Zeit vergrößert.

Wie nummeriert man Objekte einer größer werdenden Menge, wenn man die bereits vergebenen Indizes erhalten will? Man muß Zwischenwerte einführen. Wir nehmen an, daß sich die Elemente einer Menge der “Größe” nach unterscheiden und nach diesem Kriterium nummeriert werden. Unsere Menge enthält zwei Element, die – nummeriert der “Größe” nach – die Nummern 0 und 1 erhalten. Kommt als nächstes Element ein noch größeres hinzu, erhält es die Nummer 2, ist es kleiner als die beiden, erhält es die Nummer –1. Liegt das 3. Element zwischen 0 und 1, ist es natürlich, ihm die Nummer 1/2 zu geben. So geht es immer weiter, jedem neuen Element gibt man als Nummer die Hälfte der beiden daneben liegenden.

Jede beliebige Menge kann man so der Größe nach ordnen ohne daß mit jedem neuen Element die ganze Menge umnummeriert werden muß. Macht man das so, wie dargestellt, erhält man als Nenner Zweierpotenzen, die schnell ziemlich groß werden. Andererseits werden viele rationale Zahlen nicht benutzt? Gibt es eine Möglichkeit, hinzukommende Elemente zu nummerieren, so daß potentiell alle rationalen Zahlen vorkommen? Dann wären auch die Nenner minimal. Ja, so eine Methode gibt es. Man gibt jedem neuen Element x den Mediant der beiden daneben stehenden Elemente a/b und c/d . D.h., man “addiert” die beiden Brüche so, als wenn es intensive Größen werden:

$$\frac{a}{b} < x < \frac{c}{d} \implies x = \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

Das ist in der Mathematik gut bekannt:

1.3.4 Fordkreise und Fareybrüche

Zu einer rationalen Zahl a/b sei der Fordkreis $K(a/b)$ der Kreis der Ebene des zweidim. Koordinatensystems mit dem Mittelpunkt $(a/b, 1/(2b^2))$ und dem Radius $1/(2b^2)$.

Eigenschaften von Fordkreisen:

- Ein Fordkreis berührt die x -Achse im Punkt a/b .
- Zwei Fordkreise können sich berühren, aber nie überlappen.
- Zwei Fordkreise $K(a/b)$ und $K(c/d)$ berühren sich genau dann, wenn bc und ad aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind.
- Der dritte Kreis, der zwei sich berührende Fordkreise $K(a/b)$ und $K(c/d)$ und die x -Achse berührt, ist ebenfalls ein Fordkreis $K(q/p)$. Die rationale Zahl q/p ist eindeutig durch $q = a + c$ und $p = b + d$ bestimmt. q/p ist also der Mediant von a/b und c/d .

Eine Farey-Folge n -ter Ordnung F_n ist eine geordnete Menge von Brüchen $\frac{p_i}{q_i}$ mit $p_i \leq q_i \leq n$, $i \in I$, $\gcd(p_i, q_i) = 1$ mit I Indexmenge und $p_i, q_i, n \in \mathbb{N}$, so daß $\frac{p_i}{q_i} < \frac{p_j}{q_j}$ für alle $i < j$ gilt.

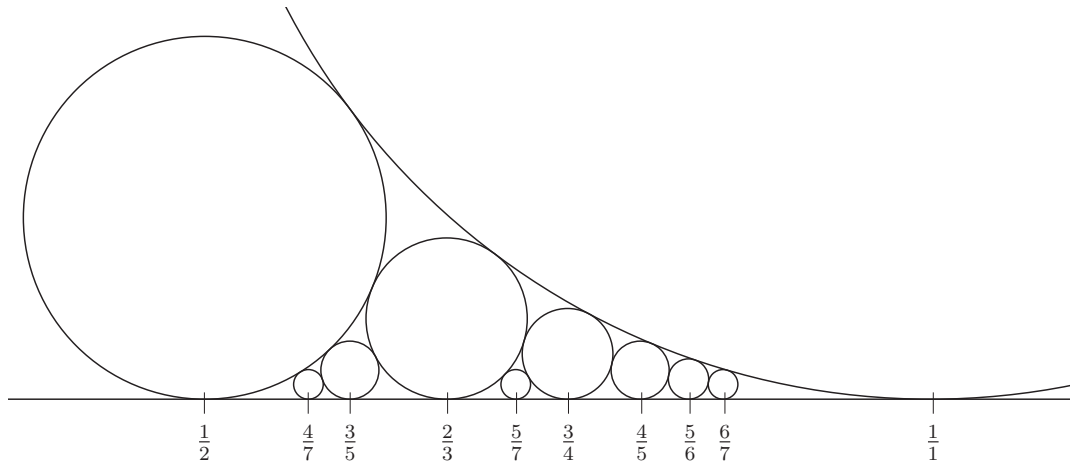
Beispiele:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right) \\
 F_2 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right) \\
 F_3 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right) \\
 F_4 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right) \\
 F_5 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right) \\
 F_6 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right) \\
 F_7 &= \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1} \right)
 \end{aligned}$$

Eigenschaften und Bemerkungen zu Fareybrüchen:

- Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ aufeinanderfolgende Brüche mit $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ in einer Farey-Folge, dann gilt $bc - ad = 1$ oder $bc = 1 + ad$, d.h., bc und ad sind aufeinanderfolgende natürliche Zahlen.
- Die Länge $|F_n|$ einer Farey-Folge ergibt sich rekursiv als $|F_n| = |F_{n-1}| + \varphi(n)$ und damit $|F_n| = 1 + \varphi(1) + \varphi(2) + \dots + \varphi(n-1) + \varphi(n)$. In einem Schritt wächst eine Farey-Folge also besonders stark, wenn n Primzahl ist. Dann ist $\varphi(n) = n - 1$.
- Eine Farey-Folge oder einfach Farey-Brüche ist in der Zahlentheorie eine geordnete Menge der vollständig gekürzten Brüche zwischen 0 und 1, deren jeweiliger Nenner den Index N nicht übersteigt.
- Es gibt übrigens eine Aussage über Farey-Brüche, die der Riemanschen Vermutung äquivalent ist (siehe wikipedia).

Im Bild: Die Fordkreise zur 2. Hälfte der Farey-Folge F_7 .



1.3.5 Der Satz von Benedetti

Eine einfache aber folgeschwere Anwendung der einfachsten Eigenschaften von extensiven und intensiven Größen ist der **Satz von Galilei-Benedetti**: Wir betrachten eine extensive Größe P und eine intensive Größe x und nehmen an, daß für zwei beliebige Objekte A und B mit $0 < P(A) \leq P(B)$ auch $x(A) \leq x(B)$ gilt. Dann ist x konstant (hängt also von P nicht ab).

Beweis: Wir betrachten $C = A \sqcup B$. Da P extensiv ist, folgt

$$P(A) \leq P(B) < P(C)$$

Aus der Intensivität von x folgt

$$x(A) \leq x(C) \leq x(B)$$

Da aber nach Voraussetzung aus $P(B) \leq P(C)$ auch $x(B) \leq x(C)$ folgen muß, muß x konstant sein. $\square$

Dieser Satz hat eine erstaunlich Anwendung. Angenommen, die Geschwindigkeit (intensive Größe) eines fallenden Objektes (z.B. zu einem festen Zeitpunkt) hängt von seiner Masse (extensive Größe) monoton ab (schwerer Körper fallen schneller), dann muß sie konstant sein. D.h., alle Körper fallen gleichschnell, wenn man die Bedingungen so gestaltet, daß die Geschwindigkeit nur von der Masse des Objektes abhängt.

Dieser Satz wurde zuerst von Giovanni Battista Benedetti (1530 – 1590) in einem Gedankenexperiment erwähnt, der damit zeigte, daß Aristoteles' Idee, daß "doppelt so schwere Körper doppelt so schnell fallen", falsch sein muß. Galilei erwähnt dieses Gedankenexperiment in seinen berühmten "Discorsi e dimostrazioni matematiche".

1.4 Zusammenfassung

1.4.1 Merksätze

- Naturerkenntnis entsteht durch Beobachtung und Denken.
- Den Menschen interessieren nur intensive und extensive Größen. Diese Größen haben spezielles Verhalten (mitteln bzw. additiv). Intensive Größen interessieren weil man sie beobachten kann. Extensive Größen interessieren weil man sie messen (zählen) kann.
- Intensive Größen kann man als Quotient zweier extensiver Größen darstellen. Diese Darstellung ist eindeutig modulo affiner Transformation.
- Extensive Größen ähneln Kardinalzahlen, intensive Größen ähneln Ordinalzahlen.

1.4.2 Übungsaufgaben

- Artikel zu Galileis Fallgesetz lesen.
- Beweise: Jede Menge ist weniger mächtig als die Menge ihrer Teilmengen. Genauer: Es gibt keine bijektive Abbildung zwischen einer Menge und der Menge ihrer Teilmengen.
- Beweise: Die Menge der Teilmengen von $\mathbb{N}$ und die Menge $\mathbb{R}$ sind gleichmächtig.
- Beweise: Ist die Summe einer gewissen Menge nichtnegativer reeller Zahlen endlich, sind höchstens abzählbar viele davon echt positiv.
- Entscheide ob $x = y$ oder $x \neq y$:

$$\begin{aligned} x &= \tan 7.5^\circ = \tan \frac{\pi}{24} \\ y &= \sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - 2 \end{aligned}$$

- Beweise, daß es wahrscheinlicher ist, mit einem realen Würfel k mal hintereinander dieselbe Zahl zu würfeln als mit einem idealen Würfel.
- Beweise, daß die Mediant-Konstruktion der rationalen Zahlen letztlich alle rationalen Zahlen zwischen 0 und 1 genau einmal zählt.

1.4.3 Begriffe erinnern/nachschlagen

- Banachraum, duale Paarung
- Anfänge der Topologie: Offene Mengen, Stetigkeit, Kompaktheit,
- Satz von Hahn-Banach
- Satz von Radon-Nikodym
- Satz von Riesz über die Darstellung linearer Funktionale
- Paradoxa: Zenons fliegendem Pfeil, Achilles und die Schildkröte, Großvaterparadoxon
- Konvexität: Konvexe Hülle, Extremale Elemente, Jensensche Ungleichung

1.4.4 Übersicht. Welten

	Beobachtungen	Zustände
math. Räume	$\mathcal{Z}^* = \mathcal{C}(\mathcal{Z})$ $\mathcal{Z}^{***}$	$\mathcal{Z}$ $\mathcal{Z}^{**} \supset \mathcal{P}(\mathcal{Z})$
Vertreter	$B \in 2^{\mathcal{Z}}$ Teilmengen	$z \in \mathcal{Z}$ Elemente, Punkte
kanonische Objekte	$\mathbb{1}_B(z)$	$\delta_z(B)$
Funktionale (Abbildungen nach $\mathbb{R}$)	$g : \mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen	$p : \mathcal{B} \subset 2^{\mathcal{Z}} \rightarrow \mathbb{R}_+$ Radonmaße
Physik bei der Wahrnehmung	intensiv primär	extensiv sekundär
Eigenschaften	mitteln sich stetig vergleichen	additiv positiv vergleichen
Wahrnehmung	räumlich wahrnehmbar berechenbar	zeitlich nicht wahrnehmbar meßbar
Funktionalanalytische Beziehung	$g(z) = q(B)/p(B) \Big _{z \in B}$ Radon-Nikodym-Ableitung	$q(B) = \int_B g(z)p(dz)$ Lebesgue-Integral
Operatoren vorher $t < t'$ nachher	$\mathbf{M} : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ Operator	$\mathbf{M}^* : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ adjungierter O.
Richtung in der Zeit Varianz	rückwärts pull back (Kontra-) Maximumprinzip	vorwärts push forward (Ko-) Funktionalungl.
Symmetrie	Invarianz geistiges	Erhaltung materielles
Welt	platonisch Welle	physisch Teilchen
Zahlen	Ordinal gemeiner Bruch	Kardinal endl. Dezimalbruch
Relation	Kontinuum antisymmetrisch	Diskret symmetrisch
Komplexität	2^n Zusammenhängend	n Einzel