Zahlenfolgen

Version 1.0, Juli 2001

Holger Stephan[*], *Berlin*
Weierstraß–Institut für Angewandte Analysis und Stochastik

Inhaltsverzeichnis

[*]e-mail: stephan@wias-berlin.de

Der vorliegende Artikel umfaßt einige Aspekte von Zahlenfolgen, die im Mathematikunterricht meist unbeachtet bleiben. Der Artikel ist als Ergänzung und Formelsammlung zum Schulstoff und zum Lösen von Olympiadeaufgaben gedacht. Das Niveau der einzelnen Abschnitte ist sehr unterschiedlich. Einiges ist für Schüler der 8. Klasse geeiget, einiges werden erst Schüler der 13. Klasse verstehen. Die beste Methode, den Artikel zu lesen ist die, – je nach Geschmack – unverständliche oder trivial (erscheinende) Teile zu überblättern.
Für Hinweise, Bemerkungen und gefundene Fehler bin ich sehr dankbar.

0.0.1 Bezeichnungen

Zahlenfolgen sind Objekte, bei denen jeder natürlichen Zahl eine (z.B. reelle) Zahl zugeordnet wird.

$$(f_n)_{n=0}^{\infty} = f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ ...$$

Manchmal ist es zweckmäßig, Folgen mit dem Index 1 beginnen zu lassen

$$(f_n)_{n=1}^{\infty} = f_1,\ f_2,\ f_3,\ ...$$

oder auch ganze Zahlen als Index zuzulassen:

$$(f_n)_{n=-\infty}^{\infty} = ...,\ f_{-3},\ f_{-2},\ f_{-1},\ f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ ...$$

Oft wird verkürzt von einer Folge f_n anstelle von $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ oder $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ die Rede sein.
Für Binomialkoeffizienten wird häufig anstelle von $\binom{n}{k}$ die international ebenfalls übliche und besser verallgemeinerbare Schreibweise C_n^k verwendet.
Am Ende von Beweisen oder begründenden Gedankengängen wird das Halmossymbol ■ verwendet.

1 Arithmetische Folgen

1.1 Arithmetische Folgen erster Ordnung

Üblicherweise heißen Folgen arithmetisch, wenn die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist. In der Mathematik unterscheidet man arithmetische Folgen verschiedener Ordnung. Eine Folge, deren Gliederdifferenz konstant ist, heißt arithmetische Folge erster Ordnung. Eine konstante Folge ist eine Folge aus identischen Zahlen, z.B. 1, 1, 1, ... Um festzustellen, ob eine Folge eine arithmetische Folge erster Ordnung ist, muß aus ihr also eine neue Folge gebildet werden, indem benachbarte Folgenglieder subtrahiert werden. Ist diese neue Folge eine konstante Folge, haben wir eine arithmetische Folge erster Ordnung vorzuliegen.
Ein Beispiel ist die Folge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, ... Hier ist die Differenz aufeinanderfolgender Glieder stets 1. Die Folge läßt sich fortsetzen, indem man diese Differenz sukzessive zu jedem Glied addiert. Die Folge läßt sich in einem Differenzenschema darstellen, das man erhält, indem man die ersten Folgeglieder ohne Komma, aber mit Zwischenraum nebeneinander schreibt und unter den Zwischenraum jeweils die Differenz der beiden darüber stehenden Zahlen schreibt:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 \\ & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \end{array}$$

Wenn die ersten beiden Glieder f_1 und f_2 einer solchen Folge bekannt sind, sind alle Glieder der Folge eindeutig bestimmt. Die Gliederdifferenz ist $d = f_2 - f_1$ und damit sind die folgenden Glieder

$$\begin{aligned} f_3 &= f_2 + d = 2f_2 - f_1 \\ f_4 &= f_3 + d = 3f_2 - 2f_1 \\ f_5 &= f_4 + d = 4f_2 - 3f_1 \end{aligned}$$

Es läßt sich leicht eine allgemeine Darstellung für das n-te Folgenglied erraten:

$$f_n = (n-1)f_2 - (n-2)f_1 = n(f_2 - f_1) - f_2 + 2f_1 \tag{1}$$

Tatsächlich ist das eine arithmetische Folge erster Ordnung, denn die Differenz zweier beliebiger benachbarter Glieder hängt nicht vom Index ab:

$$f_n - f_{n-1} = \Big(n(f_2 - f_1) - f_2 + 2f_1\Big) - \Big((n-1)(f_2 - f_1) - f_2 + 2f_1\Big) = f_2 - f_1$$

Das Differenzenschema für diese Folge ist

$$\begin{array}{ccccccccc} f_1 & & f_2 & & 2f_2 - f_1 & & 3f_2 - 2f_1 & & 4f_2 - 3f_1 \\ & f_2 - f_1 & & f_2 - f_1 & & f_2 - f_1 & & f_2 - f_1 & \end{array}$$

Eine arithmetische Folge erster Ordnung hat also stets die allgemeine Bildungsvorschrift (1). Und umgekehrt, wird eine Folge f_n durch ein Polynom ersten Grades (also eine lineare Funktion) in n definiert:

$$f_n = bn + c$$

mit beliebigen Koeffizienten b und c, dann ist diese Folge eine arithmetische Folge erster Ordnung, denn die Differenz zweier beliebiger aufeinanderfolgender Glieder

$$f_n - f_{n-1} = \Big(bn + c\Big) - \Big(b(n-1) + c\Big) = b$$

ist konstant (hängt nicht von n ab).
Eine arithmetische Folge erster Ordnung hängt also nur von zwei Zahlen ab. Diese beiden Zahlen müssen nicht die Anfangsglieder sein. Sind zum Beispiel das i-te und das j-te Glied f_i und f_j gegeben, lassen sich alle anderen Glieder daraus berechnen: Entsprechend der Darstellung (1) gilt

$$\begin{aligned} f_i &= i(f_2 - f_1) - f_2 + 2f_1 \\ f_j &= j(f_2 - f_1) - f_2 + 2f_1 \end{aligned} \tag{2}$$

Das sind zwei lineare Gleichungen mit den beiden Unbekannten f_1 und f_2, die sich leicht ermitteln lassen (Übungsaufgabe oder im Anhang nachsehen). Die Lösungen sind

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{(i-1)f_j - (j-1)f_i}{i-j} \\ f_2 &= \frac{(i-2)f_j - (j-2)f_i}{i-j} \end{aligned}$$

1.2 Arithmetische Folgen zweiter Ordnung

Die Definition der arithmetische Folge erster Ordnung läßt sich leicht verallgemeinern. Betrachtet man z.B. die Folge der Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, ... sieht man, wenn man das Differenzenschema für diese Folge bildet, daß sie keine arithmetische Folge erster Ordnung ist. Aber die Folge der Differenzen aufeinanderfolgender Glieder bildet so eine Folge (die Folge der ungeraden Zahlen).

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & & 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & 36 \\ & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & \\ & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \end{array}$$

Diese dritte Zeile heißt zweite Differenzenfolge. Eine Folge heißt arithmetische Folge zweiter Ordnung, wenn ihre zweite Differenzenfolge konstant ist. Ähnlich, wie eine arithmetische Folge erster Ordnung durch ihre beiden ersten Glieder eindeutig bestimmt ist, ist eine arithmetische Folge zweiter Ordnung durch ihre ersten drei Glieder eindeutig bestimmt. Es reichen nämlich drei Glieder aus, um das erste Glied der zweiten Differenzenfolge zu bestimmen:

$$\begin{array}{ccccc}
f_1 & & f_2 & & f_3 \\
 & f_2 - f_1 & & f_3 - f_2 & \\
 & & f_3 - 2f_2 + f_1 & &
\end{array}$$

Um die Folge fortzusetzen ist es zweckmäßig, als erstes die dritte Zeile konstant fortzusetzen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
f_1 & & f_2 & & f_3 & & \dots & & \dots \\
 & f_2 - f_1 & & f_3 - f_2 & & \dots & & \dots & \\
 & & f_3 - 2f_2 + f_1 & & f_3 - 2f_2 + f_1 & & f_3 - 2f_2 + f_1 & & f_3 - 2f_2 + f_1
\end{array}$$

Die zweite Zeile bildet eine arithmetische Folge erster Ordnung, da ihre Differenzenfolge konstant ist. Sie läßt sich also durch Addition der Differenz leicht fortsetzen:

$$\begin{array}{cccccccccc}
f_1 & & f_2 & & f_3 & & \dots & & \dots & \\
 & f_2 - f_1 & & f_3 - f_2 & & 2f_3 - 3f_2 + f_1 & & 3f_3 - 5f_2 + 2f_1 & & 4f_3 - 7f_2 + 3f_1 \\
 & & f_3 - 2f_2 + f_1 & & f_3 - 2f_2 + f_1 & & f_3 - 2f_2 + f_1 & & f_3 - 2f_2 + f_1 &
\end{array}$$

Die Glieder der ersten Differenzenfolge seien g_n. Da diese Folge eine arithmetische Folge erster Ordnung mit den beiden Anfangsgliedern $g_1 = f_2 - f_1$ und $g_2 = f_3 - f_2$ ist, läßt sich jetzt leicht aus der bereits bekannten Darstellung (1) das allgemeine Glied dieser Folge bestimmen:

$$\begin{aligned}
g_n &= n(g_2 - g_1) - g_2 + 2g_1 = \\
&= n(f_3 - 2f_2 + f_1) - (f_3 - f_2) + 2(f_2 - f_1) = \\
&= n(f_3 - 2f_2 + f_1) + 3f_2 - f_3 - 2f_1 = \\
&= (n-1)f_3 - (2n-3)f_2 + (n-2)f_1
\end{aligned} \tag{3}$$

Hieraus erhält man

$$\begin{aligned}
g_1 &= f_2 - f_1 \\
g_2 &= f_3 - f_2 \\
g_3 &= 2f_3 - 3f_2 + f_1 \\
g_4 &= 3f_3 - 5f_2 + 2f_1 \\
g_5 &= 4f_3 - 7f_2 + 3f_1 \\
g_6 &= 5f_3 - 9f_2 + 4f_1 \\
g_7 &= 6f_3 - 11f_2 + 5f_1
\end{aligned}$$

Jetzt lassen sich durch Addition noch die Glieder der ersten Zeile bestimmen:

$$\begin{array}{cccccccccc}
f_1 & & f_2 & & f_3 & & 3f_3 - 3f_2 + f_1 & & 6f_3 - 8f_2 + 3f_1 & \\
 & f_2 - f_1 & & f_3 - f_2 & & 2f_3 - 3f_2 + f_1 & & 3f_3 - 5f_2 + 2f_1 & & 4f_3 - 7f_2 + 3f_1 \\
 & & f_3 - 2f_2 + f_1 & & f_3 - 2f_2 + f_1 & & f_3 - 2f_2 + f_1 & & f_3 - 2f_2 + f_1 &
\end{array}$$

Setzt man dieses Schema noch eine Weile fort, läßt sich vielleicht das allgemeine Glied der Folge erraten. Sinnvoller ist es, es zu berechnen. Da die Folge $g_1, g_2, g_3, ...$ die erste Differenzenfolge ist, gilt also $g_1 = f_2 - f_1$, $g_2 = f_3 - f_2$ und allgemein $g_n = f_{n+1} - f_n$. Oder

$$\begin{aligned} f_2 &= f_1 + g_1 \\ f_3 &= f_2 + g_2 = f_1 + g_1 + g_2 \\ f_4 &= f_3 + g_3 = f_1 + g_1 + g_2 + g_3 \\ &\ \ ... \\ f_n &= f_{n-1} + g_{n-1} = f_1 + g_1 + g_2 + g_3 + ... + g_{n-1} = f_1 + \sum_{i=1}^{n-1} g_i \end{aligned}$$

Das allgemeine Glied der Folge g_i ist mit (3) bereits gefunden. Wir erhalten also

$$f_n = f_1 + \sum_{i=1}^{n-1} g_i = f_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \Big(i(f_3 - 2f_2 + f_1) + 3f_2 - f_3 - 2f_1 \Big)$$

Entscheidend für die Bildung der Summe ist nur die Abhängigkeit vom Summationsindex i. Es gilt also

$$\begin{aligned} f_n &= f_1 + \sum_{i=1}^{n-1} \Big(i(f_3 - 2f_2 + f_1) + 3f_2 - f_3 - 2f_1 \Big) = \\ &= f_1 + (f_3 - 2f_2 + f_1) \sum_{i=1}^{n-1} i + (3f_2 - f_3 - 2f_1) \sum_{i=1}^{n-1} 1 = \\ &= f_1 + (f_3 - 2f_2 + f_1) \frac{n(n-1)}{2} + (3f_2 - f_3 - 2f_1)(n-1) = \\ &= (f_3 - 2f_2 + f_1) \frac{n^2}{2} + (8f_2 - 3f_3 - 5f_1) \frac{n}{2} - (3f_2 - f_3 - 3f_1) \end{aligned} \tag{4}$$

Als Beispiel zur Probe können wir diese Formel für die Folge der Quadratzahlen testen, denn da ist das allgemeine Glied bekannt. Setzt man hier $f_1 = 1$, $f_2 = 2^2 = 4$ und $f_3 = 3^2 = 9$, erhält man

$$\begin{aligned} f_n &= (9 - 2 \cdot 4 + 1) \frac{n^2}{2} + (8 \cdot 4 - 3 \cdot 9 - 5 \cdot 1) \frac{n}{2} - (3 \cdot 4 - 9 - 3 \cdot 1) = \\ &= 2 \cdot \frac{n^2}{2} + 0 \cdot \frac{n}{2} - 0 = n^2 \end{aligned}$$

wie zu erwarten war.
Eine arithmetische Folge zweiter Ordnung hat also stets die allgemeine Bildungsvorschrift (4). Und umgekehrt, wird eine Folge f_n durch ein Polynom zweiten Grades in n definiert:

$$f_n = bn^2 + cn + d$$

mit beliebigen Koeffizienten b, c und d, so wird die erste Differenzenfolge g_n wegen

$$\begin{aligned} g_n &= f_{n+1} - f_n = b(n+1)^2 + c(n+1) + d - \big(bn^2 + cn + d\big) = \\ &= bn^2 + 2bn + b + cn + c + d - \big(bn^2 + cn + d\big) = \\ &= 2bn + b + c \end{aligned}$$

durch ein Polynom ersten Grades in n dargestellt, ist also eine arithmetische Folge erster Ordnung, deren Differenzenfolge konstant ist.

1.3 Arithmetische Folgen beliebiger Ordnung

Jetzt fällt es nicht schwer, eine arithmetische Folge beliebiger Ordnung zu definieren: Eine Folge heißt arithmetische Folge k-ter Ordnung, wenn ihre k-te Differenzenfolge konstant ist. Betrachtet man eine konstante Folge als arithmetische Folge nullter Ordnung, hat man diesen Begriff für jede natürliche Zahl definiert.
Aus den Untersuchungen der arithmetischen Folgen erster und zweiter Ordnung lassen sich einige Vermutungen über arithmetische Folgen k-ter Ordnung treffen:

1. Die erste Differenzenfolge ist eine arithmetische Folgen $(k-1)$-ter Ordnung.
2. Die Summe der Glieder ist eine arithmetische Folgen $(k+1)$-ter Ordnung.
3. $k+1$ aufeinanderfolgende Glieder bestimmen die gesamte Folge.
4. Jedes Polynom k-ten Grades definiert so eine Folge.
5. Die Formel der Bildungsvorschrift ist ein Polynom k-ten Grades.
6. Beliebige $k+1$ Glieder bestimmen die gesamte Folge.

Tatsächlich sind diese Vermutungen richtig.
Zu 1) Wenn eine Folge f_n eine arithmetische Folgen k-ter Ordnung ist, dann ist nach Definition die k-te Differenzenfolge konstant. Folglich ist für die erste Differenzenfolge g_n die $(k-1)$-te Differenzenfolge konstant, sie ist also nach Definition eine arithmetische Folgen $(k-1)$-ter Ordnung. Damit ist Vermutung 1) bewiesen. ■
Diese Gleichung

$$g_n = f_n - f_{n-1} \tag{5}$$

verbindet die Glieder zweier arithmetischer Folgen aufeinanderfolgender Ordnung miteinander. Damit läßt sich leicht Vermutung 2) bewiesen.
Zu 2) Es sei f_n eine arithmetische Folgen k-ter Ordnung und

$$h_n = f_1 + f_2 + ... + f_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

Dann gilt offensichtlich

$$h_n - h_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} f_i - \sum_{i=1}^{n-1} f_i = f_n \ .$$

Das heißt, die erste Differenzenfolge von h_n ist eine arithmetische Folgen k-ter Ordnung, also ist h_n eine arithmetische Folgen $k+1$-ter Ordnung. ■
Zu 4) Es sei

$$P_k(n) = c_k n^k + ... + c_1 n + c_0$$

ein Polynom k-ten Grades in n. Dann ist die erste Differenzenfolge

$$P_k(n) - P_k(n-1) = c_k\big(n^k - (n-1)^k\big) + ... + c_2\big(n^2 - (n-1)^2\big) + c_1$$

ein Polynom $(k-1)$-ten Grades, weil nach den binomischen Formeln

$$n^k-(n-1)^k=n^k-\sum_{i=0}^{k}C_n^i n^i=n^k-n^k-\sum_{i=0}^{k-1}C_n^i n^i=-\sum_{i=0}^{k-1}C_n^i n^i$$

ein Polynom $(k-1)$-ten Grades ist. Da wir bereits wissen, daß ein Polynom ersten Grades eine arithmetische Folgen erster Ordnung bildet, läßt sich die Vermutung jetzt mit vollständiger Induktion beweisen. ∎

Zu 5) Im Unterschied zu Vermutung 4) ist jetzt zu beweisen, daß jede arithmetische Folge k-ter Ordnung durch ein Polynom k-ten Grades dargestellt werden kann, das heißt, daß die Menge der arithmetischen Folgen k-ter Ordnung nicht größer ist als die Menge der Polynome k-ten Grades. Dazu reicht es zu zeigen, daß man zu jeder Folge ein entsprechendes Polynom finden kann. Das heißt, es ist zu zeigen, daß sich für jede arithmetische Folge k-ter Ordnung f_n stets Koeffizienten c_0, c_1, ..., c_k finden lassen, sodaß

$$f_n=c_kn^k+...+c_1n+c_0 \tag{6}$$

für beliebige n gilt. Wir wissen bereits nach Vermutung 4), daß die rechte Seite von (6) für beliebige Koeffizienten eine arithmetische Folge k-ter Ordnung bildet; die linke Seite ebenfalls nach Voraussetzung. Damit reicht es nach Vermutung 3) zu zeigen, daß sich Koeffizienten c_0, c_1, ..., c_k finden lassen, so daß (6) für $k+1$ aufeinanderfolgende Glieder gilt.

Der Beweis, daß sich solche Koeffizienten c_0, c_1, ..., c_k finden lassen, läßt sich konstruktiv führen, das heißt, diese Koeffizienten lassen sich explizit aus den $k+1$ aufeinanderfolgenden Gliedern bestimmen. Das ist nützlich, denn häufig hat man – z.B. mit dem Differenzenschema – erkannt, daß eine Folge eine arithmetische Folgen k-ter Ordnung ist, und möchte nun die explizite Darstellung, also das Polynom k-ten Grades ausgehend von den gebenen Anfangswerten bestimmen. Das ist ein Spezialfall folgender Aufgabe: Kann man die Koeffizienten eines Polynoms bestimmen, wenn man die Werte des Polynoms in bestimmten Punkten gegeben hat. Diese Aufgabe läßt sich vollständig lösen. Es gilt (siehe Abschnitt 5.3):

Die $k+1$ Koeffizienten eines Polynoms k-ten Grades $P_k(x)$ lassen sich genau dann eindeutig bestimmen, wenn die Werte des Polynoms in $k+1$ verschiedenen Punkten $x_0,...,x_k$ gegeben sind.

Diese Aussage beweist die Vermutungen **3)**, **5)** und **6)**. ∎

Als Beispiel wird der Fall $k=3$ betrachtet. Die Fälle $k=1$ und $k=2$ wurden bereits besprochen. Die Fälle $k>3$ lassen sich analog behandeln, allerdings steigt der Rechenaufwand schnell an.

Es sind also die Koeffizienten a, b, c und d der Darstellung

$$f_n=an^3+bn^2+cn+d\ . \tag{7}$$

zu bestimmen. Dazu ist ein Gleichungssystem zu lösen, das man erhält, indem man in (7) für n 4 Werte einsetzt, für die die Folgenglieder bekannt sind. Angenommen, das sind die Werte $n=1,2,3,4$. Dann erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
f_1 &= a+b+c+d\\
f_2 &= 8a+4b+2c+d\\
f_3 &= 27a+9b+3c+d\\
f_4 &= 64a+16b+4c+d
\end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann man jetzt mit den üblichen Lösungsmethoden für allgemeine lineare Gleichungssysteme lösen (siehe Abschnitt 5.2). Verständlicher ist es aber, wenn man ausnutzt, daß es sich um eine arithmetische Folge handelt und das Differenzenschema bildet und zwar für die linke und rechte Seite von Gleichung (7). Für die linke Seite erhält man

$$\begin{array}{ccccccc}
f_1 & & f_2 & & f_3 & & f_4 \\
& f_2 - f_1 & & f_3 - f_2 & & f_4 - f_3 & \\
& & f_3 - 2f_2 + f_1 & & f_4 - 2f_3 + f_2 & & \\
& & & f_4 - 3f_3 + 3f_2 - f_1 & & &
\end{array}$$

Die rechte Seite ergibt

$$\begin{array}{ccccccc}
a+b+c+d & & 8a+4b+2c+d & & 27a+9b+3c+d & & 64a+16b+4c+d \\
& 7a+3b+c & & 19a+5b+c & & 37a+7b+c & \\
& & 12a+2b & & 18a+2b & & \\
& & & 6a & & &
\end{array}$$

Da alle Zahlen gleich sein müssen, erhält man

$$\begin{array}{rcl}
f_4 - 3f_3 + 3f_2 - f_1 & = & 6a \\
f_3 - 2f_2 + f_1 & = & 12a + 2b \\
f_2 - f_1 & = & 7a + 3b + c \\
f_1 & = & a + b + c + d
\end{array}$$

Das ist wieder ein Gleichungssystem. Im Gegensatz zum ursprünglichen hat es aber Dreiecksform und läßt sich deshalb Schritt für Schritt lösen. Aus der ersten Gleichung folgt a. Das jetzt bekannte a kann man in die zweite Gleichung einsetzen und b berechnen. Auf diese Weise erhält man der Reihe nach alle gesuchten Koeffizienten.

1.4 Arithmetische Folgen und Pascalsches Dreieck

Unter allen arithmetischen Folgen spielen einige eine besondere Rolle. Das sind einerseits die Potenzen n^k, also die Polynome, bei denen alle Koeffizienten bis auf den bei der höchsten Potenz 0 sind, und andererseits die, die sich aus einer speziellen Folge durch Addition der Glieder ergeben. Dazu beginnen wir mit der konstanten Folge $f_n^{(0)} = 1$. Die Folge $f_n^{(1)}$ bilden wir, indem wir $f_0^{(1)} = 0$ und $f_n^{(1)}$ als Summe der vorangegangenen Glieder der Folge $f_n^{(0)}$, also $f_n^{(1)} = n$ setzen. Analog bilden wir die Folge $f_n^{(2)}$, indem wir $f_0^{(2)} = 0$ und $f_n^{(2)}$ als Summe der vorangegangenen Glieder der Folge $f_n^{(1)}$ setzen. Auf diese Weise lassen sich alle Glieder der Folgen $f_n^{(k)}$ bilden. Man erhält folgendes Schema:

	$_k{}^n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	$f_n^{(k)}$
$f_n^{(0)}$	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...	1
$f_n^{(1)}$	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	n
$f_n^{(2)}$	2	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	...	$n(n{-}1)/2 = C_n^2$
$f_n^{(3)}$	3	0	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	...	$\binom{n}{3} = C_n^3$
$f_n^{(4)}$	4	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	...	$\binom{n}{4} = C_n^4$
$f_n^{(5)}$	5	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	...	$\binom{n}{5} = C_n^5$

Beispielsweise entsteht die Zahl 70 in der 4. Zeile durch Addition der links darüber stehenden Zahlen der 3. Zeile:

$$70 = 0 + 0 + 0 + 1 + 4 + 10 + 20 + 35$$

Man erkennt leicht, daß es sich bei dieser Tabelle um das um 90° gedrehte Pascalsche Dreieck handelt. Die Folgeglieder sind die Binomialkoeffizienten

$$f_n^{(k)} = C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} \ .$$

Mit Hilfe dieser Folgen läßt sich das allgemeine Glied einer arithmetischen Folge besonders einfach ohne die Lösung eines Gleichungssystems bestimmen. Es sei g_n eine arithmetische Folge k-ter Ordnung, $g_n^{(1)}$ die erste Differenzenfolge, $g_n^{(2)}$ die zweite Differenzenfolge und so weiter $g_n^{(k)}$ die k-te Differenzenfolge (die konstant ist, weil g_n eine arithmetische Folge k-ter Ordnung ist). Das Differenzenschema sieht in diesem Fall folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
g_0 & & g_1 & & g_2 & & g_3 & & g_4 & & g_5 & & g_6 & & g_7 \\
& g_0^{(1)} & & g_1^{(1)} & & g_2^{(1)} & & g_3^{(1)} & & g_4^{(1)} & & g_5^{(1)} & & g_6^{(1)} & \\
& & g_0^{(2)} & & g_1^{(2)} & & g_2^{(2)} & & g_3^{(2)} & & g_4^{(2)} & & g_5^{(2)} & & g_6^{(2)} \\
& & & \ldots & & \ldots & & & & & & & & & \\
& & & & g_0^{(k)} & & g_1^{(k)} & & g_2^{(k)} & & g_3^{(k)} & & g_4^{(k)} & & g_5^{(k)}
\end{array}$$

Die letzte Folge ist konstant. Wir wissen, daß die Folge g_n durch die $k+1$ ersten Glieder g_0,...,g_k bestimmt ist. Sie ist aber auch durch die nullten Glieder der Differenzenfolgen g_0, $g_0^{(1)}$, ..., $g_0^{(k)}$ bestimmt, denn die Folgeglieder lassen sich Schritt für Schritt von unten nach oben bestimmen, so wie es im Fall der arithmetischen Folge zweiter Ordnung auf Seite 5 beschrieben wurde. Wenn diese $k+1$ Zahlen gegeben sind, läßt sich das allgemeine Glied g_n der Folge besonders einfach bestimmen. Es gilt

$$g_n = g_0 C_n^0 + g_0^{(1)} C_n^1 + g_0^{(2)} C_n^2 + \ldots + g_0^{(k)} C_n^k \ . \tag{8}$$

Anstelle eines Beweises wird dieser Zusammenhang am Beispiel der Folge der vierten Potenzen $g_n = n^4$ demonstriert. Wir bilden folgendes Differenzenschema:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
0 & & 1 & & 16 & & 81 & & 256 & & 625 & & 1296 & & 2401 \\
& 1 & & 15 & & 65 & & 175 & & 369 & & 671 & & 1105 & \\
& & 14 & & 50 & & 110 & & 194 & & 302 & & 434 & & \\
& & & 36 & & 60 & & 84 & & 108 & & 132 & & & \\
& & & & 24 & & 24 & & 24 & & 24 & & & &
\end{array}$$

Entsprechend Formel (8) müßte jetzt

$$g_n = n^4 = 24 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + 36 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + 14 \cdot \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + 1 \cdot \frac{n}{1} + 0 \cdot 1$$

gelten. Einfaches Nachrechnen bestätigt das.

2 Rekursive Folgen

Arithmetische Folgen entsprechen Polynomen. So, wie Polynome nur einen Teil aller Funktionen darstellen, gibt es natürlich auch Folgen, die keine arithmetischen sind. Zum Beispiel sind alle Differenzenfolgen der Folge der Zweierpotenzen $f_n = 2^n$ gleich:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & & 2 & & 4 & & 8 & & 16 & & 32 & & 64 & & \ldots \\
& 1 & & 2 & & 4 & & 8 & & 16 & & 32 & & \ldots & \\
& & 1 & & 2 & & 4 & & 8 & & 16 & & \ldots & &
\end{array}$$

Es kann also nie eine Differenzenfolge konstant werden. Diese Folge ist eine geometrische Folge, die dadurch charakterisiert ist, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist (nämlich 2).
Eine allgemeine geometrische Folge ist – wie eine arithmetische Folge erster Ordnung – durch die beiden ersten Glieder eindeutig bestimmt. Ist der Quotient der ersten beiden Glieder $q = f_2/f_1$, so hat eine geometrische Folge das allgemeine Glied $f_n = f_1 \cdot q^{n-1}$. Bildet man die Quotientenfolge (ähnlich wie die Differenzenfolge), erhält man das Quotientenschema

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
f_1 & & f_1 \cdot q & & f_1 \cdot q^2 & & f_1 \cdot q^3 & & f_1 \cdot q^4 & & f_1 \cdot q^5 & & f_1 \cdot q^6 & \ldots \\
& q & & q & & q & & q & & q & & q & & \ldots
\end{array}$$

Die geometrische Folge kommt in der Mathematik häufig vor und deshalb ist der Wunsch groß sie zu verallgemeinern. Es liegt natürlich nahe – in Analogie zu den arithmetischen Folgen – geometrische Folgen höherer Ordnung zu betrachten, solche, bei denen die zweite, dritte oder k-te Quotientenfolge konstant ist. Das führt auf Bildungsformeln, in denen Ausdrücke der Form q^{n^2} oder allgemeiner q^{n^k} vorkommen. Tatsächlich sind solche Verallgemeinerungen aber wenig interessant, denn wenn f_n eine solche geometrische Folge k-ter Ordnung ist, dann ist $g_n = \log f_n$ eine arithmetische Folge k-ter Ordnung und diese Folgen kennen wir bereits.
Eine interessante Verallgemeinerung der geometrischen Folge führt in eine ganz andere Richtung, nämlich zur Theorie der linearen rekursiven Folgen. Der Begriff „rekursive Folge“ ist etwas irreführend, denn gemeint ist nicht eine besondere Klasse von Folgen, sondern eine besondere Art die Glieder der Folge zu definieren. Exakter wäre die Bezeichnung „Folgen mit rekursiver Bildungsvorschrift“. Da sich aber der Begriff „rekursive Folge“ etabliert hat werden wir ihn im weiteren benutzen. Eine rekursive Folge ist eine Folge, deren Glieder durch die vorangegangenen Glieder berechnet werden. Ein Beispiel (und vermutlich das bekannteste) ist

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \ . \tag{9}$$

Damit kann man noch nicht viel anfangen, denn diese Vorschrift besagt nur, daß man z.B. f_5 durch Addition der Glieder f_4 und f_3 erhält. Um einge Glieder dieser Folge berechnen zu können, müssen also wenigstens noch zwei aufeinanderfolgende Glieder explizit gegeben sein, etwa

$$f_1 = 1, \ f_2 = 1 \ . \tag{10}$$

Damit lassen sich die weiteren Glieder berechnen. Es gilt

$$(f_n)_{n=1}^{\infty} = 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ 1597,\ \ldots \tag{11}$$

Diese Folge ist die berühmte Fibonaccifolge.

Diese Folge ist eine lineare rekursive Folge, da in die Bildungsvorschrift (9) nur lineare Ausdrücke der Folgenglieder, keine explizite Abhängigkeit vom Index n und kein absolutes Glied vorkommen. Eine lineare rekursive Folge wird also definiert durch eine Rekursionsvorschrift der Form

$$f_n = c_1 f_{n-1} + ... + c_k f_{n-k} \tag{12}$$

mit den konstanten Koeffizienten $c_1, ..., c_k$. Zum eindeutigen Bestimmen der Folge sind noch k Anfangsglieder $f_1, ..., f_k$ nötig. Sind die Anfangsglieder und die Koeffizienten gegeben, lassen sich die Folgeglieder eindeutig bestimmen, da die Vorschrift (12) explizit die nächsten Glieder bestimmt.

Nichtlineare Bildungsvorschriften für Folgen sind z.B.

$$f_n^2 = f_{n-1} + f_{n-2}^3$$

weil das Glied mit dem größten Index nicht explizit auf einer Seite der Gleichung steht,

$$f_{n+1} = \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{n}\right) f_n^2 - \frac{n^3}{3} + 1$$

weil der Index n explizit in der Bildungsvorschrift und nichtlineare Funktionen vorkommen (diese Folge stammt aus einer Aufgabe der zweiten Stufe der 39. Mathematik–Olympiade, Klasse 11-13) und

$$f_n = f_{n-1} + a \tag{13}$$

weil ein absolutes Glied vorkommt. Die letzte Form laßt sich aber stets in die Form (12) bringen, indem man statt n den Wert $n-1$ einsetzt und damit

$$f_{n-1} = f_{n-2} + a$$

erhält, woraus zusammen mit (13)

$$f_n = 2f_{n-1} - f_{n-2}$$

folgt.

Die geometrische Folge ist die einfachste rekursive Folge. Da der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, gilt für alle n

$$f_n = q \cdot f_{n-1}$$

Mit einem gegebenen Anfangswert f_1 ist diese Folge eindeutig bestimmt. Es gilt

$$\begin{aligned}
f_1 &= f_1 \\
f_2 &= f_1 \cdot q \\
f_3 &= f_2 \cdot q = f_1 \cdot q^2 \\
f_4 &= f_3 \cdot q = f_1 \cdot q^3 \\
f_5 &= f_4 \cdot q = f_1 \cdot q^4 \\
f_6 &= f_5 \cdot q = f_1 \cdot q^5
\end{aligned}$$

Hieraus läßt sich leicht die explizite Darstellung der Folge erraten:

$$f_n = f_1 \cdot q^{n-1} = \frac{f_1}{q} q^n$$

2.1 Explizite Darstellung der Fibonaccifolge

Im allgemeinen ist es nicht leicht eine explizite Darstellung z.B. für die Fibonaccifolge zu erraten. Man kann aber – in der Hoffnung, daß rekursive Folgen eine Verallgemeinerung von geometrischen sind – den Ansatz $f_n = x^n$ probieren. Setzt man das in (9) ein, erhält man

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$

oder nach Division durch x^{n-2}

$$x^2 = x + 1 \; . \tag{14}$$

Wir sehen also, daß $f_n = x^n$ nicht für beliebige x richtig sein kann, denn soll f_n (9) erfüllen, muß x (14) erfüllen, das heißt, x muß Lösung dieser quadratischen Gleichung sein. Die beiden Lösungen sind

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) = 1.6180339887498948482045868343656381177720 \\ x_2 &= \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) = -0.6180339887498948482045868343656381177720 \end{aligned}$$

Diesen Zahlen sieht man auf Anhieb nicht an, daß sie etwas mit der Fibonaccifolge zu tun haben. Tatsächlich erfüllt $f_n = x_1^n$ Gleichung (9), wie sich leicht nachprüfen läßt:

$$\begin{aligned} f_n - f_{n-1} - f_{n-2} &= x_1^n - x_1^{n-1} - x_1^{n-2} = \\ &= \frac{1}{2^n}\big(1+\sqrt{5}\big)^n - \frac{1}{2^{n-1}}\big(1+\sqrt{5}\big)^{n-1} - \frac{1}{2^{n-2}}\big(1+\sqrt{5}\big)^{n-2} = \\ &= \frac{1}{2^{n-2}}\big(1+\sqrt{5}\big)^{n-2}\left(\frac{1}{4}\big(1+\sqrt{5}\big)^2 - \frac{1}{2}\big(1+\sqrt{5}\big) - 1\right) = \\ &= \frac{1}{2^{n-2}}\big(1+\sqrt{5}\big)^{n-2}\left(\frac{1}{4}\big(1+2\sqrt{5}+5\big) - \frac{1}{2}\big(1+\sqrt{5}\big) - 1\right) = \\ &= \frac{1}{2^{n-2}}\big(1+\sqrt{5}\big)^{n-2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} - 1\right) = 0 \end{aligned}$$

Analog läßt sich zeigen, daß auch $g_n = x_2^n$ Gleichung (9) erfüllt. Keine der beiden Folgen $f_n = x_1^n$ und $g_n = x_2^n$ genügt aber den Anfangsbedingungen (10), bilden also nicht die Fibonaccifolge. Jetzt hilft die Linearität der Bildungsvorschrift (9) weiter. Erfüllen nämlich zwei Folgen f_n und g_n Gleichung (9), dann erfüllen auch die Folgen $c_n = \alpha \cdot f_n + \beta \cdot g_n$ für beliebige α und β Gleichung (9), denn es gilt

$$\begin{aligned} c_n &= \alpha \cdot f_n + \beta \cdot g_n = \\ &= \alpha \cdot \big(f_{n-1} + f_{n-2}\big) + \beta \cdot \big(g_{n-1} + g_{n-2}\big) = \\ &= \big(\alpha \cdot f_{n-1} + \beta \cdot g_{n-1}\big) + \big(\alpha \cdot f_{n-2} + \beta \cdot g_{n-2}\big) = c_{n-1} + c_{n-2} \end{aligned}$$

Folglich erfüllt

$$f_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n = \alpha\left(\frac{1}{2}\big(1+\sqrt{5}\big)\right)^n + \beta\left(\frac{1}{2}\big(1-\sqrt{5}\big)\right)^n \tag{15}$$

Gleichung (9). Unter diesen Folgen könnte eine sein, die auch die Anfangsbedingungen (10) erfüllt, das heißt, man kann versuchen, α und β so zu wählen, daß die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^1 + \beta\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^1 \\ 1 &= \alpha\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^2 + \beta\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^2 \end{aligned}$$

erfüllt sind. Das sind zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten α und β, die sich leicht bestimmen lassen: Ausmultipliziert erhält man

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sqrt{5}(\alpha-\beta) \\ 1 &= \frac{3}{2}(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\sqrt{5}(\alpha-\beta) \end{aligned}$$

Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten, erhält man

$$\alpha+\beta=0 \implies \beta=-\alpha \ .$$

In die erste eingesetzt, folgt

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \beta &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Damit erhält man abschließend – in (15) eingesetzt und umgeformt –

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n - \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n\right)$$

Tatsächlich liefert dieser Ausdruck die Folge (11). Es ist nützlich, diesen Ausdruck für einige n zu berechnen.

2.2 Explizite Darstellung allgemeiner rekursiver Folgen I

Es sei f_n eine allgemeine rekursive Folge k-ter Ordnung

$$f_n = c_1 f_{n-1} + ... + c_k f_{n-k} \tag{16}$$

mit konstanten Koeffizienten $c_1, ..., c_k$ und den Anfangswerten

$$f_1,\ f_2,\ ..., f_k \ . \tag{17}$$

Es ist sinnvoll $c_k \neq 0$ zu fordern, denn sonst wäre die Folge eigentlich eine rekursive Folge $k-1$-ter Ordnung.
Es fällt nicht schwer, die eben erprobte Methode auch hier anzuwenden. Es wird wieder der Ansatz $f_n = x^n$ gewählt, in (16) eingesetzt und durch x^{n-k} dividiert. Das ergibt

$$x^k = c_1 x^{k-1} + ... + c_{k-1}x + c_k \tag{18}$$

Wenn f_n die Form $f_n = x^n$ hat, muß x also Nullstelle des Polynoms

$$P_k(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - ... - c_{k-1}x - c_k \tag{19}$$

sein. Angenommen, $P_k(x)$ hat k verschiedene Nullstellen $x_1, ..., x_k$, das heißt, es gilt

$$P_k(x) = (x - x_1) \cdots (x - x_k) \ ,$$

dann ist die allgemeine Form der Folge

$$f_n = \alpha_1 x_1^n + ... + \alpha_k x_k^n$$

Die Koeffizienten α_1, ..., α_k sollten aus den Anfangswerten (17) bestimmbar sein, das heißt, es sollte gelten

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_1 x_1 + ... + \alpha_k x_k \\ f_2 &= \alpha_1 x_1^2 + ... + \alpha_k x_k^2 \\ &\ldots \\ f_k &= \alpha_1 x_1^k + ... + \alpha_k x_k^k \end{aligned}$$

Das ist wieder ein lineares Gleichungssystem, wie es Abschnitt 5.3 betrachtet wird. Es läßt sich eindeutig lösen, falls die Nullstellen $x_1, ..., x_k$ verschieden und ungleich 0 sind. Da $c_k \neq 0$ gefordert wurde, kann 0 keine Nullstelle sein.

2.3 Negative Indizees

Der Index, bei dem eine rekursive Folge beginnt (z.B. 0 oder 1) spielt keine besondere Rolle. Eine rekursive Folge läßt sich sogar in den negativen Indexbereich fortsetzen. Stellt man (16) nach f_{n-k} um erhält man

$$f_{n-k} = \frac{1}{c_k} f_n - \frac{c_1}{c_k} f_{n-1} - ... - \frac{c_{k-1}}{c_k} f_{n-k+1} \ .$$

2.4 Rekursive Darstellung arithmetischer Folgen

Auf den ersten Blick scheinen arithmetische Folgen nichts mit rekursiven Folgen zu tun zu haben. Die expliziten Darstellungen sind verschieden. Arithmetische Folgen werden durch Polynome, rekursive Folgen durch Summen von Potenzfunktionen dargestellt. Tatsächlich sind arithmetische Folgen ein Spezialfall rekursiver Folgen.
Für eine arithmetische Folge nullter Ordnung – also eine konstante Folge – gilt natürlich (der hochgestellte Index gibt die Ordnung der Folge an, $f_n^{(k)}$ sei das n-te Glied einer arithmetischen Folge k-ter Ordnung)

$$f_n^{(0)} = f_{n-1}^{(0)} \ . \tag{20}$$

Eine arithmetische Folge erster Ordnung hat die Eigenschaft, daß die Differenz zweier benachbarter Glieder konstant, also ein Glied einer arithmetischen Folge nullter Ordnung war:

$$f_n^{(1)} - f_{n-1}^{(1)} = f_n^{(0)}$$

Setzt man jetzt für n den Wert $n - 1$ ein, erhält man

$$f_{n-1}^{(1)} - f_{n-2}^{(1)} = f_{n-1}^{(0)} \ .$$

Wegen (20) sind die beiden rechten Seiten gleich, also auch die linken:

$$f_n^{(1)} - f_{n-1}^{(1)} = f_{n-1}^{(1)} - f_{n-2}^{(1)}$$

oder

$$f_n^{(1)} = 2f_{n-1}^{(1)} - f_{n-2}^{(1)} \; . \tag{21}$$

Wir erhalten, daß eine arithmetische Folge erster Ordnung eine rekursive Folge zweiter Ordnung ist. Wir wissen zwar, daß diese Folge durch ein Polynom ersten Grades beschrieben wird, können aber trotzdem versuchen, die allgemeine Methode zur Bestimmung der expliziten Darstellung anzuwenden: Wir setzten $f_n^{(1)} = x^n$. In (21) eingesetzt und durch x^{n-2} dividiert, ergibt das

$$x^2 = 2x - 1 \; .$$

Diese Gleichung hat nur eine Lösung (eine Doppellösung) $x_1 = x_2 = 1$. Dieser Fall war im letzten Abschnitt extra ausgeschlossen worden. Die Methode versagt also für arithmetische Folgen erster Ordnung, obwohl es auch rekursive Folgen sind.
Für eine arithmetische Folge zweiter oder höherer Ordnung läßt sich ebenfalls eine Rekursionsvorschrift finden. Es gilt

$$f_n^{(2)} - f_{n-1}^{(2)} = f_n^{(1)} \tag{22}$$

Setzt man jetzt für n die Werte $n-1$ und $n-2$ ein, erhält man

$$\begin{aligned} f_{n-1}^{(2)} - f_{n-2}^{(2)} &= f_{n-1}^{(1)} \\ f_{n-2}^{(2)} - f_{n-3}^{(2)} &= f_{n-2}^{(1)} \end{aligned}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit 2 und subtrahiert davon die zweite, erhält man

$$2\big(f_{n-1}^{(2)} - f_{n-2}^{(2)}\big) - \big(f_{n-2}^{(2)} - f_{n-3}^{(2)}\big) = 2f_{n-1}^{(1)} - f_{n-2}^{(1)}$$

Die rechte Seite läßt sich wegen (21) mit (22) gleichsetzen, was

$$2\big(f_{n-1}^{(2)} - f_{n-2}^{(2)}\big) - \big(f_{n-2}^{(2)} - f_{n-3}^{(2)}\big) = f_n^{(2)} - f_{n-1}^{(2)}$$

ergibt, woraus schließlich folgt

$$f_n^{(2)} = 3f_{n-1}^{(2)} - 3f_{n-2}^{(2)} + f_{n-3}^{(2)} \; . \tag{23}$$

Das charakteristische Polynom für diese Rekursionsvorschrift ist

$$x^3 = 3x^2 - 3x + 1 \; .$$

Das erinnert an die binomischen Formeln und man sieht leicht, daß

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3 \; .$$

Das Polynom hat also eine dreifache Nullstelle $x = 1$. Auch hier versagt die allgemeine Methode. Es läßt sich leicht (z.B. durch vollständige Induktion) zeigen, daß das charakteristische Polynom $P_k(x)$ einer arithmetischen Folge k-ter Ordnung $(x-1)^k$ ist. Das heißt, es gilt

$$\begin{aligned} P_k(x) &= (x-1)^k = (-1)^k + k(-1)^{k-1}x + \frac{k(k-1)}{2}(-1)^{k-1}x^2 + ... + k(-1)^1x^{k-1} + x^k = \\ &= \sum_{j=0}^{k} C_k^j (-1)^{k-j} x^j \end{aligned}$$

Wobei C_k^j die Binomialkoeffizienten

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

sind. Ausgehend vom charakteristischen Polynom läßt sich leicht die rekursive Darstellung der Folge finden. Es gilt

$$f_n = -\sum_{j=0}^{k-1} C_k^j (-1)^{k-j} f_j$$

Die Voraussetzung, daß die Nullstellen des charakteristischen Polynoms paarweise verschieden sein müssen, ist also unbefriedigend, denn schon bei arithmetische Folgen ist diese Voraussetzung verletzt.

2.5 Explizite Darstellung allgemeiner rekursiver Folgen II

Wir wollen jetzt den Fall betrachten, daß die Nullstellen des charakteristischen Polynoms vielfach sein können. Es sei $P_k(x)$ das charakteristische Polynom einer rekursiven Folge k-ter Ordnung f_n. Es habe die Nullstellen $x_1, ..., x_m$, die die Vielfachheit $j_1, ..., j_m$ haben können. Es gilt also

$$P_k(x) = (x - x_1)^{j_1} \cdots (x - x_m)^{j_m} \ .$$

Da $P_k(x)$ ein Polynom k-ten Grades ist, muß natürlich $j_1 + ... + j_m = k$ gelten. Die explizite Darstellung ist dann

$$f_n = Q_1(n) x_1^n + ... + Q_m(n) x_m^n$$

wobei $Q_1(n), ..., Q_m(n)$ Polynome $j_1 - 1$-ten, ... bzw. $j_m - 1$-ten Grades in n sind. Ausführlicher geschrieben bedeutet das

$$f_n = (a_0^{(1)} + a_1^{(1)} n + ... + a_{j_1-1}^{(1)} n^{j_1-1}) x_1^n + ... + (a_0^{(m)} + a_1^{(m)} n + ... + a_{j_m-1}^{(m)} n^{j_m-1}) x_m^n \tag{24}$$

Diese Darstellung hängt über die Koeffizienten der Polynome $Q_1(n), ..., Q_m(n)$ von $j_1 + ... + j_m = k$ freien Zahlen ab. Diese lassen sich bestimmen, wenn die k Anfangswerte $f_1,...,f_k$ gegeben sind. Da Formel (24) ziemlich unübersichtlich ist, ist es sinnvoll, einige Spezialfälle zu betrachten.

2.5.1 Eine k-fache Nullstelle

Hat $P_k(x)$ nur eine k-fache Nullstelle x_1, dann nimmt (24) die Form

$$f_n = (a_0 + a_1 n + ... + a_{k-1} n^{k-1}) x_1^n$$

an. Gilt $x_1 = 1$, so ist f_n ein Polynom $k-1$-ten Grades, f_n ist also eine arithmetische Folge $k-1$-ter Ordnung, was wir schon wissen.

2.5.2 Formeln zu rekursiven Folgen zweiter Ordnung

Die ersten Glieder

$$
\begin{aligned}
f_n &= c_1 f_{n-1} + c_2 f_{n-2} \\
f_0 &= f_0 \\
f_1 &= f_1 \\
f_2 &= c_1 f_1 + c_2 f_0 \\
f_3 &= c_1 f_2 + c_2 f_1 = c_1 c_2 f_0 + (c_1^2 + c_2) f_1 \\
f_4 &= c_1 f_3 + c_2 f_2 = (c_1^2 c_2 + c_2^2) f_0 + (c_1^3 + 2c_1 c_2) f_1 \\
f_5 &= c_1 f_4 + c_2 f_3 = (c_1^3 c_2 + 2c_1 c_2^2) f_0 + (c_1^4 + 3c_1^2 c_2 + c_2^2) f_1 \\
f_6 &= c_1 f_5 + c_2 f_4 = (c_1^4 c_2 + 3c_1^2 c_2^2 + c_2^3) f_0 + (c_1^5 + 4c_1^3 c_2 + 3c_1 c_2^2) f_1 \\
f_7 &= c_1 f_6 + c_2 f_5 = (c_1^5 c_2 + 4c_1^3 c_2^2 + 3c_1 c_2^3) f_0 + (c_1^6 + 5c_1^4 c_2 + 6c_1^2 c_2^2 + c_2^3) f_1
\end{aligned}
$$

Charakteristisches Polynom

$$x^2 = c_1 x + c_2$$

Nullstellen

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{2}\Big(c_1 + \sqrt{c_1^2 + 4c_2}\Big) \\
x_2 &= \frac{1}{2}\Big(c_1 - \sqrt{c_1^2 + 4c_2}\Big) \\
x_1 x_2 &= c_2 \\
x_1 + x_2 &= c_1 \\
x_1 - x_2 &= \sqrt{c_1^2 + 4c_2}
\end{aligned}
$$

Explizite Darstellung im Fall einfacher Nullstellen

$$
\begin{aligned}
f_n &= \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n \\
f_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\
f_1 &= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2
\end{aligned}
$$

Hieraus lassen sich die freien Koeffizienten α_1 und α_2 berechnen:

$$\alpha_1 = \frac{f_1 - f_0 x_2}{x_1 - x_2} \;, \quad \alpha_2 = \frac{f_0 x_1 - f_1}{x_1 - x_2}$$

also folgt

$$
\begin{aligned}
f_n &= \frac{1}{x_1 - x_2}\Big((f_1 - f_0 x_2) x_1^n + (f_0 x_1 - f_1) x_2^n\Big) = \\
&= \frac{1}{x_1 - x_2}\Big(f_1 (x_1^n - x_2^n) + f_0 x_1 x_2 (x_2^{n-1} - x_1^{n-1})\Big) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{c_1^2 + 4c_2}}\Big(f_1 (x_1^n - x_2^n) - f_0 c_2 (x_2^{n-1} - x_1^{n-1})\Big)
\end{aligned}
$$

Spezialfälle
Für $f_0 = 1$ und $f_1 = 0$ folgt

$$f_n = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + 4c_2}} \left(x_1^{n-1} - x_2^{n-1} \right)$$

Für $f_0 = 0$ und $f_1 = 1$ folgt

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{c_1^2 + 4c_2}} \left(x_1^{n} - x_2^{n} \right)$$

Explizite Darstellung, im Fall doppelter Nullstellen
Es gilt $x_1 = x_2 \neq 0$.

$$\begin{aligned} f_n &= (\alpha_1 + \alpha_2 n) x_1^n \\ f_0 &= \alpha_1 \\ f_1 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 \end{aligned}$$

Hieraus lassen sich die freien Koeffizienten α_1 und α_2 berechnen:

$$\alpha_1 = f_0 \ , \quad \alpha_2 = \frac{f_1 - f_0}{x_1}$$

also folgt

$$f_n = \left(f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1} n \right) x_1^n = \frac{f_0 x_1 + (f_1 - f_0) n}{x_1} x_1^n$$

2.6 Konvergenz rekursiver Folgen

Es sei f_n eine rekursive Folge k-ter Ordnung, deren charakteristisches Polynom $P_k(x)$ k verschiedene Nullstellen $x_1, ..., x_k$ besitze. Dann ist die allgemeine Form der Folge

$$f_n = \alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + ... + \alpha_k x_k^n$$

Angenommen, $x_1 = 1$ und die anderen Nullstellen sind alle vom Betrag her kleiner Eins. Dann ist

$$f_n = \alpha_1 + \alpha_2 x_2^n + ... + \alpha_k x_k^n$$

und

$$\lim_{n \to \infty} f_n = \alpha_1$$

weil für alle $j > 1$

$$\lim_{n \to \infty} x_j^n = 0$$

gilt.
Sind alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms vom Betrag her kleiner Eins, so ist $f_n \longrightarrow 0$.
Ist x_1 die vom Betrag her größte Nullstelle, so ist

$$g_n = \frac{f_n}{x_1^n} = \alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^n + ... + \alpha_k \left(\frac{x_k}{x_1} \right)^n$$

wieder eine rekursive Folge k-ter Ordnung mit Eins als vom Betrag her größter Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Es gilt also

$$\lim_{n\to\infty} f_n x_1^{-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{x_1^n} = \alpha_1 \ .$$

Diese Aussage bleibt erhalten, wenn nicht alle Nullstellen verschieden sind, sondern nur die vom Betrag her größte Nullstelle einfach ist.
Unter den gleichen Bedingungen konvergiert auch der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder einer Folge. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{f_{n+1}}{f_n} &= \frac{\alpha_1 x_1^{n+1} + \alpha_2 x_2^{n+1} + \dots + \alpha_k x_k^{n+1}}{\alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \dots + \alpha_k x_k^n} = \\
&= \frac{\alpha_1 x_1^{n+1} + \alpha_2 x_1 x_2^n + \dots + \alpha_k x_1 x_k^n - \big(\alpha_2 x_2^n (x_1 - x_2) + \dots + \alpha_k x_k^n (x_1 - x_n)\big)}{\alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \dots + \alpha_k x_k^n} = \\
&= x_1 - \frac{\alpha_2 x_2^n (x_1 - x_2) + \dots + \alpha_k x_k^n (x_1 - x_n)}{\alpha_1 x_1^n + \alpha_2 x_2^n + \dots + \alpha_k x_k^n} = \\
&= x_1 - \frac{\alpha_2 (x_2/x_1)^n (x_1 - x_2) + \dots + \alpha_k (x_k/x_1)^n (x_1 - x_n)}{\alpha_1 + \alpha_2 (x_2/x_1)^n + \dots + \alpha_k (x_k/x_1)^n}
\end{aligned}$$

Ist x_1 die dem Betrag nach größte Nullstelle, gehen alle Ausdrücke der Form $(x_i/x_1)^n$ für $n \longrightarrow \infty$ gegen Null und es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = x_1 \ . \tag{25}$$

Haben zwei Folgen f_n und g_n die explizite Darstellung

$$\begin{aligned}
f_n &= a x_1^n + \dots \\
g_n &= b x_1^n + \dots
\end{aligned}$$

mit gleichen, dem Betrag nach größten Nullstellen x_1, so konvergiert $f_n x_1^{-n}$ gegen a und $g_n x_1^{-n}$ gegen b und folglich gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{g_n} = \frac{a}{b} \ .$$

Insbesondere gilt diese Konvergenz, wenn f_n und g_n die gleiche rekursive Bildungsvorschrift aber verschiedene Anfangsglieder besitzen.

2.7 Quotienten–Differenzen–Schema

Oft kommt es vor, daß eine Folge nur durch ihre ersten Glieder oder durch eine komplizierte Bildungsvorschrift gegeben ist, und man möchte wissen, ob sie zu einer bekannten Klasse von Folgen, etwa zu den rekursiven, gehört. Für arithmetische Folgen war das einfach: Man bildet die Differenzenfolgen bis eine konstant bleibt. Für rekursive Folgen gibt es eine ähnliche Methode, das Quotienten–Differenzen–Schema. Diese Schema läßt sich am besten an einem Beispiel demonstrieren. Dazu betrachten wir die Fibonaccifolge. Wir schreiben sie unter eine Folge aus Einsen:

1.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1.	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597

Darunter bilden wir eine neue Folge. Dazu werden drei aufeinanderfolgende Glieder der zweiten Folge und ein Glied der ersten Folge aus folgendem Schema

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ W & X & E \\ S & & \end{array}$$

miteinander verknüpft. Das Glied der neuen Folge wird nach der Formel

$$S = \frac{W \cdot E - X^2}{N}$$

bestimmt. Damit erhalten wir

$$\begin{array}{r|ccccccccccccccccc} 1. & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2. & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 & 144 & 233 & 377 & 610 & 987 & 1597 \\ 3. & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

Diese neue Folge ist eine geometrische mit dem Quotienten -1. Wendet man das Verfahren erneut an, das heißt, bildet man eine vierte Folge aus der dritten und zweiten erhält man

$$\begin{array}{r|ccccccccccccccccc} 1. & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2. & 1 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89 & 144 & 233 & 377 & 610 & 987 & 1597 \\ 3. & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 4. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

da bei einer geometrischen Folge f_n stets $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = 0$ gilt.
Es stellt sich heraus, daß dieses Schema ausgehend von einer rekursiven Folge k-ter Ordnung nach $k-1$ Schritten stets eine geometrische Folge, also eine rekursive Folge erster Ordnung liefert.
Wendet man das Verfahren auf die rekursive Folge (36) aus der Aufgabe aus Abschnitt 4.1 an, erhält man

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	−2	−22	−117	−521	−2148	−8508
0	−1	−3	−26	−250	−2227	−20125	−181236	−1633092	−14713861
−1	17	−37	209	−613	2693	−9073	36221	−129481	496985
84	−84	84	−84	84	−84	84	−84	84	−84
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Die Zahl 2693 in der vierten Zeile wird zum Beispiel nach der Formel

$$2693 = \frac{(-250) \cdot (-20125) - (-2227)^2}{22}$$

gebildet.
Genau wie das Differenzenschema aus arithmetischen Folgen k-ter Ordnung nach $k-1$ Schritten eine arithmetische Folge erster Ordnung liefert, liefert dieses Schema aus rekursiven Folgen k-ter Ordnung nach $k-1$ Schritten eine rekursive Folge erster Ordnung. Allerdings sind – im Unterschied zu arithmetischen Folgen – die Zwischenfolgen im allgemeinen keine rekursiven Folgen $(k-1)$-ter, $(k-2)$-ter, usw. Ordnung.

Ist f_n eine allgemeine rekursive Folge zweiter Ordnung mit der expliziten Bildungsvorschrift

$$f_n = a_1 x_1^n + a_2 x_2^n \ ,$$

sieht das Schema so aus:

	1	1	1	1	1...
f_n	$a_1x_1 + a_2x_2$	$a_1x_1^2 + a_2x_2^2$	$a_1x_1^3 + a_2x_2^3$	$a_1x_1^4 + a_2x_2^4$	...
g_n	$a_1a_2(x_1 - x_2)^2$	$a_1a_2(x_1 - x_2)^2 x_1x_2$	$a_1a_2(x_1 - x_2)^2 x_1^2x_2^2$	$a_1a_2(x_1 - x_2)^2 x_1^3x_2^3$	...
	0	0	0	0	0...

Im allgemeinen gilt

$$\begin{aligned} g_n &= (f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2)/1 = \big(a_1x_1^{n-1} + a_2x_2^{n-1}\big)\big(a_1x_1^{n+1} + a_2x_2^{n+1}\big) - \big(a_1x_1^n + a_2x_2^n\big)^2 = \\ &= a_1^2x_1^{2n} + a_1a_2x_1^{n-1}x_2^{n+1} + a_1a_2x_1^{n+1}x_2^{n-1} + a_2^2x_2^{2n} - a_1^2x_1^{2n} - 2a_1a_2x_1^nx_2^n - a_2^2x_2^{2n} = \\ &= a_1a_2(x_1 - x_2)^2x_1^{n-1}x_2^{n-1} \end{aligned}$$

Tatsächlich kommt es nicht auf die explizite Form von f_n an, sondern es ist die Rekursionseigenschaft

$$f_n = c_1 f_{n-1} + c_2 f_{n-2}$$

entscheidend. Es gilt

$$\begin{aligned} g_n &= f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = f_{n-1}(c_1f_n + c_2f_{n-1}) - f_n(c_1f_{n-1} + c_2f_{n-2}) = \\ &= c_2(f_{n-1}^2 - f_nf_{n-2}) = -c_2g_{n-1} \end{aligned}$$

das heißt, das Schema funktioniert auch, wenn $x_1 = x_2$ eine Doppelnullstelle ist.
Für allgemeine rekursive Folge dritter Ordnung sind die Glieder der Zwischenfolgen:

$$\begin{aligned} f_n^{(3)} &= a_1x_1^n + a_2x_2^n + a_3x_3^n \\ f_n^{(2)} &= a_1a_2(x_1 - x_2)^2x_1^{n-1}x_2^{n-1} + a_1a_3(x_1 - x_3)^2x_1^{n-1}x_3^{n-1} + a_2a_3(x_2 - x_3)^2x_2^{n-1}x_3^{n-1} \\ f_n^{(1)} &= a_1a_2a_3(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2x_1^{n-2}x_2^{n-2}x_3^{n-2} \end{aligned}$$

Für allgemeine rekursive Folge vierter Ordnung sind die Glieder der Zwischenfolgen:

$$\begin{aligned} f_n^{(4)} &= a_1x_1^n + a_2x_2^n + a_3x_3^n + a_4x_4^n \\ f_n^{(3)} &= a_1a_2(x_1 - x_2)^2x_1^{n-1}x_2^{n-1} + a_1a_3(x_1 - x_3)^2x_1^{n-1}x_3^{n-1} + a_1a_4(x_1 - x_4)^2x_1^{n-1}x_4^{n-1} + \\ &+ a_2a_3(x_2 - x_3)^2x_2^{n-1}x_3^{n-1} + a_2a_4(x_2 - x_4)^2x_2^{n-1}x_4^{n-1} + a_3a_4(x_3 - x_4)^2x_3^{n-1}x_4^{n-1} \\ f_n^{(2)} &= a_1a_2a_3(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2x_1^{n-2}x_2^{n-2}x_3^{n-2} + \\ &+ a_1a_2a_4(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_4)^2(x_2 - x_4)^2x_1^{n-2}x_2^{n-2}x_4^{n-2} + \\ &+ a_1a_3a_4(x_1 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2(x_3 - x_4)^2x_1^{n-2}x_3^{n-2}x_4^{n-2} + \\ &+ a_2a_3a_4(x_2 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2(x_3 - x_4)^2x_2^{n-2}x_3^{n-2}x_4^{n-2} \\ f_n^{(1)} &= a_1a_2a_3a_4(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_1 - x_4)^2(x_2 - x_3)^2(x_2 - x_4)^2(x_3 - x_4)^2x_1^{n-3}x_2^{n-3}x_3^{n-3}x_3^{n-3} \end{aligned}$$

An diesem Beispiel sieht man, daß die Zwischenfolgen keine rekursiven Folgen abklingender Ordnung sind. So sind $f_n^{(2)}$ und $f_n^{(3)}$ rekursive Folgen 6-ter Ordnung.
Die Methode funktioniert nicht, wenn irgendwo in den Folgen Nullen stehen (da beim Berechnen der neuen Folgen dividiert wird). Dann läßt sie sich aber leicht modifizieren. Details hierzu kann man im sehr lesenswerten Buch von [2] von J. Conway finden.

2.8 Periodische Folgen

Folgen heißen periodisch, wenn sich ihre Glieder ab einem bestimmten Index wiederholen. Z. B. ist die Folge

$$(f_n)_{n=1}^{\infty} = 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...$$

periodisch. Offensichtlich ist sie auch rekursiv, denn es gilt

$$f_n = f_{n-3}\ . \tag{26}$$

Mit den Anfnagswerten

$$f_1 = 1,\ f_2 = 2,\ f_3 = 3$$

ist sie eindeutig bestimmt. Das charakteristische Polynom für diese Folge ist

$$P(x) = x^3 - 1\ .$$

Dieses Polynom hat drei Nullstellen, allerdings sind zwei komplex

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ x_3 &= -\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Die allgemeine explizite Darstellung einer Folge mit der Rekursionsvorschrift (26) ist also

$$f_n = a_1 x_1^n + a_2 x_2^n + a_3 x_3^n = a_1 + a_2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n + a_3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n$$

Auf den ersten Blick wundert es, daß es Koeffizienten a_1, a_2 und a_3 derart geben soll, daß dieser nicht nur irrationale sondern sogar komplexe Ausdruck für alle n ganzzahlig werden soll. Tatsächlich leisten die Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ 2 &= a_1 + a_2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + a_3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \\ 3 &= a_1 + a_2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 + a_3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 \end{aligned}$$

nämlich

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i \\ a_3 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}i \end{aligned}$$

das gewünschte. Es gilt

$$f_n = 2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}i\right)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}i\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n \tag{27}$$

Diesen Ausdruck lassen wir einen Augenblick so stehen und betrachten allgemeine periodische Folgen mit der Periodenlänge k. Für solche gilt

$$f_n = f_{n-k} \ ,$$

es sind also rekursive Folgen k-ter Ordnung. Ihr charakteristisches Polynom ist

$$P(x) = x^k - 1 \ .$$

Die Nullstellen dieses Polynoms sind alle einfach und wenn k ungerade ist, bis auf $x_1 = 1$ alle komplex. Ist k gerade, ist auch -1 Nullstelle. Die anderen $k-2$ Nullstellen sind komplex. Sie bilden die Eckpunkte eines regulären k-Ecks auf dem Einheitskreis, mit einem Eckpunkt bei 1. Diese k Zahlen heißen k-te komplexe Einheitswurzeln und bilden den Einstieg in einige Gebiete der Mathematik wie z.B. die Gruppentheorie. Diese Einheitswurzeln lassen sich kompakter schreiben als

$$x_j = e^{2\pi i \frac{j-1}{k}} = \cos\left(2\pi \frac{j-1}{k}\right) + i \sin\left(2\pi \frac{j-1}{k}\right), \ j = 1, ..., k \tag{28}$$

Da sie auf dem Einheitskreis liegen, haben sie den Absolutbetrag 1.
Mit Hilfe von (28) läßt sich der Ausdruck (27) weiter umformen. Es gilt nämlich

$$\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^n = e^{i120^\circ n} = \cos\left(120^\circ n\right) \pm i \sin\left(120^\circ n\right)$$

und

$$\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} i = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i30^\circ n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\cos 30^\circ \pm i \sin 30^\circ\Big)$$

Hiermit folgt aus (27)

$$\begin{aligned} f_n &= 2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ\Big)\Big(\cos\left(120^\circ n\right) + i \sin\left(120^\circ n\right)\Big) + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ\Big)\Big(\cos\left(120^\circ n\right) - i \sin\left(120^\circ n\right)\Big) \end{aligned}$$

Multipliziert man das aus, sieht man, daß die imaginären Ausdrücke wegfallen. Es bleibt

$$f_n = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\Big(\cos 30^\circ \cos\left(120^\circ n\right) - \sin 30^\circ \sin\left(120^\circ n\right)\Big)$$

Dieser Ausdruck läßt sich nach dem Additionstheorem für die cos-Funktion $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ weiter umformen:

$$f_n = 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos\left(120^\circ n + 30^\circ\right)$$

Diesem Ausdruck sieht man zwar immer noch nicht an, daß er ganzzahlig ist, aber schon eher, daß er reell und periodisch ist.

3 Mehrdimensionale Folgen

Neben Zahlenfolgen lassen sich auch Folgen von Paaren $(f_n, g_n) = (f, g)_n$, von Tripeln $(f_n, g_n, h_n) = (f, g, h)_n$ oder allgemein Folgen von m-Tupeln $(f^{(1)}, ..., f^{(m)})$ betrachten. Das sind streng genommen keine Zahlenfolgen mehr, sondern eher Vektorfolgen, denn $(f, g)_n$ läßt sich als Folge von Vektoren auf der Ebene und $(f^{(1)}, ..., f^{(m)})_n$ ananlog als Vektor im m-dimensionalen euklidischen Raum auffassen.

3.1 Zweidimensionale rekursive Folgen erster Ordnung

Es seien x_n und y_n zwei Folgen, die sich gegenseitig rekursiv definieren:

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 y_{n-1} \tag{29}$$
$$y_n = b_1 x_{n-1} + b_2 y_{n-1} \tag{30}$$

mit den Anfangswerten x_1 und y_1. Schreibt man (x_n, y_n) als Vektor, so ist dieses Gleichungssystem äquivalent zur Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

oder zu

$$z_n = \mathbf{A} z_{n-1}, \;\; z_0$$

wenn man $z_n = (x_n, y_n)$ und für die Matrix das Symbol $\mathbf{A}$ setzt. In dieser Form sieht man, daß es sich um eine rekursive Folge erster Ordnung handelt, also um eine geometrische (Vektor)Folge. Die explizite Darstellung dieser Folge ist formal

$$z_n = \mathbf{A}^n z_0,$$

wobei allerdings $\mathbf{A}^n$ die n-te Potenz einer Matrix ist.

3.1.1 Zusammenhang mit zwei rekursiven Folgen zweiter Ordnung

Setzt man in (29) $n-1$ anstelle von n und das Ergebnis dann in (30) ein, erhält man

$$\begin{aligned} x_n &= a_1 x_{n-1} + a_2 \Big(b_1 x_{n-2} + b_2 y_{n-2} \Big) = a_1 x_{n-1} + a_2 b_1 x_{n-2} + b_2 \Big(a_2 y_{n-2} \Big) = \\ &= a_1 x_{n-1} + a_2 b_1 x_{n-2} + b_2 \Big(x_{n-1} - a_1 x_{n-2} \Big) = \\ &= (a_1 + a_2) x_{n-1} - (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_{n-2} \end{aligned}$$

und analog

$$y_n = (a_1 + a_2) y_{n-1} - (a_1 b_2 - a_2 b_1) y_{n-2}$$

Die einzelnen Komponenten des Vektors z_n bilden also eine rekursive Folge zweiter Ordnung und zwar mit derselben Rekursionsvorschrift. Erforderlich sind jetzt aber jeweils zwei Anfangswerte x_0 und x_1 bzw. y_0 und y_1. Die beiden Werte x_1 und y_1 folgen aus (29)–(30). Äquivalent zu (29)–(30) erhält man schließlich

$$\begin{aligned} x_n &= (a_1 + a_2) x_{n-1} - (a_1 b_2 - a_2 b_1) x_{n-2} \\ x_0 &= x_0 \\ x_1 &= a_1 x_0 + a_2 y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_n &= (a_1+a_2)y_{n-1} - (a_1b_2 - a_2b_1)y_{n-2} \\ y_0 &= y_0 \\ y_1 &= b_1x_0 + b_2y_0 \end{aligned}$$

Es gilt auch die Umkehrung. Es seien

$$\begin{aligned} x_n &= Ax_{n-1} - Bx_{n-2} \ , \quad x_0 \ , \quad x_1 \\ y_n &= Ay_{n-1} - By_{n-2} \ , \quad y_0 \ , \quad y_1 \end{aligned}$$

zwei rekursive Folgen zweiter Ordnung mit gleicher Rekursionsvorschrift und unterschiedlichen Anfangswerten. Gesucht ist eine Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenschaften

$$A = a_1 + b_2, \ B = a_1b_2 - a_2b_1,$$

und

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Diese Aufgabe läßt sich lösen. Die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{Ax_1y_0 - Bx_0y_0 - x_1y_1}{x_1y_0 - x_0y_1} & \dfrac{Bx_0^2 - Ax_0x_1 + x_1^2}{x_1y_0 - x_0y_1} \\ \dfrac{Ay_0y_1 - By_0^2 - y_1^2}{x_1y_0 - x_0y_1} & \dfrac{Bx_0y_0 - Ax_0y_1 + x_1y_1}{x_1y_0 - x_0y_1} \end{pmatrix}$$

hat diese Eigenschaften. Die Darstellung ist also möglich, wenn die Nenner nicht 0 werden. Wir erhalten die Aussage:
Zwei rekursive Folgen zweiter Ordnung mit gleicher Rekursionsvorschrift und unterschiedlichen Anfangswerten lassen sich als zweidimensionale rekursive Folge erster Ordnung darstellen, wenn $x_1y_0 \neq x_0y_1$.

3.1.2 Zweidimensionale Darstellung einer rekursiven Folgen zweiter Ordnung

Alle Glieder einer rekursiven Folgen zweiter Ordnung

$$f_n = c_1f_{n-1} + c_2f_{n-2}$$

lassen sich aus den beiden ersten Gliedern bestimmen. So lassen sich z.B. das 2. und 3. Glied aus dem 0. und 1. bestimmen (siehe Punkt 2.5.2)

$$\begin{aligned} f_3 &= (c_1^2 + c_2)f_1 + c_1c_2f_0 \\ f_2 &= c_1f_1 + c_2f_0 \end{aligned}$$

Allgemein gilt

$$f_{n+1} = c_1f_n + c_2f_{n-1} = (c_1^2 + c_2)f_{n-1} + c_1c_2f_{n-2} \qquad (31)$$

$$f_n = c_1f_{n-1} + c_2f_{n-2} \qquad (32)$$

Es lassen sich also immer zwei aufeinanderfolgende Glieder aus zwei aufeinanderfolgenden bestimmen. Deshalb bietet es sich an, immer zwei aufeinanderfolgende Glieder zu einem Vektor zusammenzufassen.

$$z_n = \begin{pmatrix} f_{2n+1} \\ f_{2n} \end{pmatrix}$$

Dann läßt sich (31) – (32) äquivalent als

$$\begin{pmatrix} f_3 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^2 + c_2 & c_1 c_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix}$$

oder allgemeiner

$$\begin{pmatrix} f_{2n+1} \\ f_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^2 + c_2 & c_1 c_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{2n-1} \\ f_{2n-2} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix}$$

oder als

$$z_n = \begin{pmatrix} c_1^2 + c_2 & c_1 c_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} z_{n-1} , \quad z_0 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix}$$

schreiben, also als zweidimensionale rekursive Folge erster Ordnung.

3.2 Dreidimensionale rekursive Folgen erster Ordnung

3.2.1 Dreidimensionale Darstellung einer rekursiven Folgen dritter Ordnung

Völlig analog zur rekursiven Folgen zweiter Ordnung, lassen sich bei einer rekursiven Folge dritter Ordnung

$$f_n = c_1 f_{n-1} + c_2 f_{n-2} + c_3 f_{n-3}$$

jeweils drei aufeinanderfolgende Glieder aus jeweils drei aufeinanderfolgenden bestimmen. Eine Formel hierfür erhält man, wenn man versucht, die Glieder f_3, f_4 und f_5 aus den Gliedern f_0, f_1 und f_2 zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}
f_3 &= c_1 f_2 + c_2 f_1 + c_3 f_0 && (33)\\
f_4 &= c_1 f_3 + c_2 f_2 + c_3 f_1 = c_1(c_1 f_2 + c_2 f_1 + c_3 f_0) + c_2 f_2 + c_3 f_1 = \\
&= (c_1^2 + c_2) f_2 + (c_1 c_2 + c_3) f_1 + c_1 c_3 f_0 && (34)\\
f_5 &= c_1 f_4 + c_2 f_3 + c_3 f_2 = \\
&= c_1\big((c_1^2 + c_2) f_2 + (c_1 c_2 + c_3) f_1 + c_1 c_3 f_0\big) + c_2(c_1 f_2 + c_2 f_1 + c_3 f_0) + c_3 f_2 = \\
&= (c_1^3 + 2c_1 c_2 + c_3) f_2 + (c_1^2 c_2 + c_1 c_3 + c_2^2 + c_3) f_1 + (c_1^2 c_3 + c_2 c_3) f_0 && (35)
\end{aligned}$$

Es lassen sich drei aufeinanderfolgende Glieder zu einem Vektor zusammenzufassen.

$$z_n = \begin{pmatrix} f_{3n+2} \\ f_{3n+1} \\ f_{3n} \end{pmatrix}$$

Dann läßt sich (33) – (35) äquivalent als

$$\begin{pmatrix} f_5 \\ f_4 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^3 + 2c_1 c_2 + c_3 & c_1^2 c_2 + c_1 c_3 + c_2^2 + c_3 & c_1^2 c_3 + c_2 c_3 \\ c_1^2 + c_2 & c_1 c_2 + c_3 & c_1 c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \\ f_0 \end{pmatrix}$$

oder allgemeiner

$$\begin{pmatrix} f_{3n+2} \\ f_{3n+1} \\ f_{3n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^3 + 2c_1c_2 + c_3 & c_1^2c_2 + c_1c_3 + c_2^2 + c_3 & c_1^2c_3 + c_2c_3 \\ c_1^2 + c_2 & c_1c_2 + c_3 & c_1c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_{3n-1} \\ f_{3n-2} \\ f_{3n-3} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \\ f_0 \end{pmatrix}$$

oder als

$$z_n = \begin{pmatrix} c_1^3 + 2c_1c_2 + c_3 & c_1^2c_2 + c_1c_3 + c_2^2 + c_3 & c_1^2c_3 + c_2c_3 \\ c_1^2 + c_2 & c_1c_2 + c_3 & c_1c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} z_{n-1} , \quad z_0 = \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \\ f_0 \end{pmatrix}$$

schreiben, also als dreidimensionale rekursive Folge erster Ordnung.

4 Folgen in der Zahlentheorie

Unter den Folgen spielen in der Zahlentheorie diejenigen eine besondere Rolle, deren Glieder ganzzahlig sind. Viele Aufgaben von Mathematikolympiaden führen gerade auf die Frage, wann eine Folge ganzzahlig ist.

4.1 Ganzzahligkeit algebraischer Ausdrücke

Sind die Koeffizienten $c_1,...,c_k$ einer rekursiven Folge k-ter Ordnung

$$f_n = c_1 f_{n-1} + ... + c_k f_{n-k}$$

und die ersten k Glieder

$$f_1, \ ..., \ f_k$$

ganzzahlig, dann sind natürlich auch alle weiteren Glieder ganzzahlig, da das n-te Glied aus den k vorangegangenen Gliedern nur durch Addition und Multiplikation von ganzen Zahlen bestimmt wird. Ausgehend von der rekursiven Darstellung einer Folge ist es also leicht zu entscheiden, ob die Glieder ganzzahlig sind oder nicht. Der expliziten Darstellung sieht man die Ganzzahligkeit meistens nicht an. Der Trick besteht dann darin, die rekursive Darstellung zu finden.

Aufgabe: *Beweise, daß der Ausdruck*

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{3+\sqrt{2}}{16+12\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n - \frac{78+51\sqrt{2}+36\sqrt{3}+23\sqrt{6}}{8\left(3+6\sqrt{2}+\sqrt{3}+3\sqrt{6}\right)}(1-\sqrt{2})^n + \\ &+ \frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{6}-9-6\sqrt{2}}{4\left(3+6\sqrt{2}+\sqrt{3}+3\sqrt{6}\right)}(2+\sqrt{3})^n - \left(\frac{7}{4}+\sqrt{3}\right)(2-\sqrt{3})^n \end{aligned}$$

für alle natürlichen n ganzzahlig ist.

Lösung: Der Ausdruck hat die Form einer expliziten Darstellung einer rekursiven Folge 4-ter Ordnung. Durch einfaches Nachrechnen sieht man, daß $f_1 = f_2 = 0$ und $f_3 = f_4 = 1$ (oder, was nicht so aufwendig ist: $f_0 = -5$ und $f_{-1} = -9$). Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(x)$ sind $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ und $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3}$, also gilt

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = \\ &= (x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3}) = \\ &= -1+2x+8x^2-6x^3+x^4 \end{aligned}$$

Damit erhält man als rekursive Darstellung

$$f_n = 6f_{n-1} - 8f_{n-2} - 2f_{n-3} + f_{n-4} \tag{36}$$

woraus die Ganzzahligkeit ersichtlich ist. ■

4.2 Arithmetische Folgen erster Ordnung

Eine arithmetische Folge erster Ordnung hat die allgemeine Form

$$f_n = an + b$$

Sind a und b natürliche Zahlen und ist $0 \leq b < a$, dann durchläuft f_n gerade alle Zahlen, die bei der Division durch a den Rest b lassen. Beispielsweise ist für $a = 3$ und $b = 1$

$$(f_n)_{n=-\infty}^{\infty} = ..., \ -8, \ -5, \ -2, \ 1, \ ,4 \ ,7 \ ,10 \ ,...$$

$f_n = an + b$ ist also äquivalent zur Restklasse b mod a.
Eine weitere Anwendung von arithmetischen Folgen erster Ordnung in der Zahlentheorie liefert der Satz von Dirichlet:
Unter den Gliedern einer arithmetischen Folgen erster Ordnung $f_n = an + b$ mit Teilerfremden a und b gibt es unendlich viele Primzahlen

4.3 Ganzzahlige arithmetische Folgen

Die Koeffizienten der rekursiven Darstellung arithmetischer Folgen sind (wie in Abschnitt 2.4 gezeigt) die Binomialkoeffizienten und somit ganzzahlig. Folglich ist eine arithmetische Folge k-ter Ordnung ganzzahlig, wenn es die ersten $k+1$ Glieder sind. Auf diesem Prinzip bauen viele Aufgaben auf, bei denen zu zeigen ist, daß bestimmte Polynome mit rationalen Koeffizienten in ganzen Zahlen ganze Werte annehmen.
Aufgabe: *Beweise, daß der Ausdruck*

$$n^3 + 3n^2 - n - 3$$

für alle ungeraden n durch 48 teilbar ist.
Diese Aufgabe wurde in der Mathematikolympiade der DDR 1963 in der zweiten Stufe für die 11. Klasse gestellt (siehe [4]). Sie läßt sich natürlich einfach durch Ausklammern und Fallunterscheidung lösen. Hier soll aber versucht werden, den Beweis mit Hilfe von ganzzahligen Folgen zu führen.
Lösung: Setzt man $n = 2m + 1$, ist zu zeigen, daß die Folge

$$f_m = \frac{1}{48}\Big((2m+1)^3 + 3(2m+1)^2 - (2m+1) - 3\Big)$$

für natürliche m ganzzahlig ist. Das ist der Fall, da f_m eine arithmetische Folge 3-ter Ordnung ist und $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_2 = 4$ und $f_3 = 10$ gilt, wie sich leicht nachrechnen läßt. ■
Die Methode auf diese Aufgabe angewendet scheint mit Kanonen auf Spatzen geschossen zu sein. Bei der folgenden Aufgabe freut man sich aber, daß es eine Methode gibt, die ohne Fallunterscheidung und Restklassenbetrachtungen Modulo 2, 3, 4 und 5 zur Lösung führt.
Aufgabe: *Beweise, daß der Ausdruck*

$$f_n = \frac{6}{5}n - \frac{13}{12}n^2 - 2n^3 - \frac{7}{12}n^4 + \frac{3}{10}n^5 + \frac{1}{6}n^6$$

für alle natürlichen n ganzzahlig ist.
Lösung: Es gilt $f_1 = -2$, $f_2 = -7$, $f_3 = 87$, $f_4 = 700$, $f_5 = 2906$, $f_6 = 8889$ und $f_7 = 22519$. ■
In diesem Fall gibt es noch eine weitere Lösungsmöglichkeit. Die erste Differenzenfolge

$$g_n = f_n - f_{n-1} = 1 + n - 2n^2 - 2n^3 - n^4 + n^5$$

ist ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, das heißt

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} g_i \ .$$

f_n ist also die Summe ganzer Zahlen.
Tatsächlich nimmt ein Polynom $P_k(n)$ mit Grad k für alle ganzen (nicht nur natürliche) Zahlen n ganze Werte an, wenn das für $k+1$ aufeinanderfolgende ganze Zahlen der Fall ist. Die eben gelöste Aufgabe hätte man also auch mit weniger Rechenaufwand lösen können, indem man $f_{-3} = 42$, $f_{-2} = 1$, $f_{-1} = -1$, $f_0 = 0$, $f_1 = -2$, $f_2 = -7$ und $f_3 = 87$ bestimmt.

4.4 Ganzzahlige periodische Folgen

Im Abschnitt 2.8 haben wir gesehen, daß periodische Folgen stets rekursiv sind, wobei die Nullstellen des charakteristischen Polynoms einfach und vom Betrag 1 sind. Dabei wurde die Ganzzahligkeit der Folgeglieder nicht benutzt. Es läßt sich leicht zeigen, daß auch die Umkehrung gilt, allerdings nur für ganzzahlige Folgen. Wir betrachten eine beliebige rekursive Folge mit einfachen Nullstellen, die vom Betrag her kleiner oder gleich 1 sind. Die explizite Darstellung dieser Folge ist

$$f_n = a_1 x_1^n + a_2 x_2^n + ... + a_k x_k^n$$

mit gewissen Konstanten a_1,...,a_k. Will man jetzt den Betrag von f_n abschätzen, erhält man unter Berücksichtigung der Rechenregeln für Beträge und der Eigenschaft der Nullstellen $|x_1| \leq 1$,...,$|x_k| \leq 1$

$$\begin{aligned} |f_n| &= \left|a_1 x_1^n + a_2 x_2^n + ... + a_k x_k^n\right| \leq \left|a_1 x_1^n\right| + \left|a_2 x_2^n\right| + ... + \left|a_k x_k^n\right| = \\ &= |a_1|\left|x_1^n\right| + |a_2|\left|x_2^n\right| + ... + |a_k|\left|x_k^n\right| = |a_1||x_1|^n + |a_2||x_2|^n + ... + |a_k||x_k|^n \leq \\ &\leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_k| \end{aligned}$$

Es sei N so eine natürliche Zahl, daß $|a_1|+|a_2|+...+|a_k| \leq N$ gilt. Dann ist $|f_n| \leq N$. Die Folge f_n kann also nur Werte im Intervall $[-N, N]$ annehmen, das heißt, eine von $2N+1$ Zahlen. Da die Folge aus unendlich vielen Gliedern besteht, muß sie spätestens nach $2N+1$ Gliedern wieder eine Zahl annehmen, die schon einmal vorkam. Das gilt für jede beliebige beschränkte ganzzahlige Folge. Das bedeutet aber nicht, daß die Folge periodisch ist, wie das Beispiel

$$(f_n)_{n=1}^{\infty} = 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, ...$$

(die Zahl der Nullen zwischen zwei Einsen wächst um Eins) zeigt. Diese Folge ist beschränkt, ganzzahlig aber nicht periodisch, denn sie ist nicht rekursiv. Rekursive Folgen mit dieser Eigenschaft sind stets periodisch. Um das zu zeigen, betrachten wir die k-Tupel

$$\left(f_{n+1}, f_{n+2}, ..., f_{n+k}\right) \ .$$

Da f_n nur $2N+1$ verschiedene Werte annehmen kann, gibt es nur $(2N+1)^k$ verschiedene solche k-Tupel. Diese Zahl kann sehr groß sein, aber sie ist stets endlich. Das heißt früher oder später gibt es ein $m \leq (2N+1)^k$, sodaß gilt

$$\big(f_1, f_2, ..., f_k\big) = \big(f_{m+1}, f_{m+2}, ..., f_{m+k}\big) \ .$$

Da k aufeinanderfolgende Glieder einer rekursiven Folge k-ter Ordnung diese eindeutig bestimmen, muß für alle $j \geq 1$ gelten $f_j = f_{m+j}$, das heißt, die Folge ist periodisch.

4.5 Rationale Approximationen, rekursive Folgen und Diophantische Gleichungen

Es stellt sich heraus, daß es zwischen verschiedenen mathematischen Objekten, die auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun haben, tiefliegende Zusammenhänge gibt. Diese Objekte sind

1. Irrationale Lösungen w einer quadratischen Gleichung,
2. Fixpunkte gebrochen linearer Funktionen,
3. Iterative Bestimmung des Fixpunktes gebrochen linearer Funktionen,
4. Rationale Approximation einer irrationalen Zahl w,
5. Zweidimensionale rekursive Folgen erster Ordnung,
6. Diophantische Gleichung zweiter Ordnung mit zwei Unbekannten,
7. Rekursive Folge zweiter Ordnung,
8. Erzeugende Funktion rekursiver Folgen,
9. Zerlegung einer irrationalen Zahl w in einen Kettenbruch.

Bis auf Kettenbrüche und erzeugende Funktionen sollen die Zusammenhänge jetzt untersucht werden. Dazu wird als erstes erklärt, was mit den einzelnen Punkten gemeint ist.

4.5.1 Lösungen einer quadratischen Gleichung

Die allgemeine quadratische Gleichung

$$aw^2 + bw + c = 0 \tag{37}$$

hat die Lösungen

$$w_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \frac{1}{2a}\Big(- b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\Big)$$

Sie sind reell, wenn

$$b^2 \geq 4ac$$

und ganz, wenn

$$b^2 - 4ac = k^2 \ .$$

Dieser Fall ist uninteressant. Es soll deshalb im weiteren stets b^2-4ac kein Quadrat sein. Dann hat w die Form

$$w_{1,2}=\frac{\beta\pm\sqrt{\alpha}}{\gamma}$$

mit der Bedingung, daß $\alpha>0$ keine Quadratzahl ist.
Umgekehrt, sind solche $w_{1,2}$ Lösungen einer quadratischen Gleichung, dann gilt

$$0 \;=\; \left(w-\frac{\beta+\sqrt{\alpha}}{\gamma}\right)\left(w-\frac{\beta-\sqrt{\alpha}}{\gamma}\right)=\left(w-\frac{\beta}{\gamma}\right)^2-\frac{\alpha}{\gamma^2}=w^2-\frac{2\beta}{\gamma}w+\frac{\beta^2}{\gamma^2}-\frac{\alpha}{\gamma^2}\ .$$

Das heißt, w ist Lösung der Gleichung

$$\gamma^2w^2-2\beta\gamma w+\beta^2-\alpha=0\ .$$

4.5.2 Fixpunkte gebrochen linearer Funktionen

Es sei $f(x)$ eine Funktion, die eine Menge auf sich selbst abbildet. Diese Menge können z.B. die reellen Zahlen sein. Diese Funktion hat einen Fixpunkt x_0, wenn gilt

$$f(x_0)=x_0$$

Eine gebrochen lineare Funktion ist eine Funktion der Form

$$f(x)=\frac{a_1x+a_2}{b_1x+b_2} \tag{38}$$

mit gewissen Koeffizienten a_1, a_2, b_1 und b_2. Der Fall $b_1=0$ ist wenig interessant, da $f(x)$ dann linear ist.
Die Funktion $f(x)$ ist für alle reellen x mit Ausnahme der Stelle $x_\infty=-b_2/b_1$ definiert. In x_∞ hat sie eine Polstelle. $x_0=-a_2/a_1$ ist eine Nullstelle. Für $x\to\pm\infty$ hat sie die Asymptotik $y_\infty=a_1/b_1$. Bei $y_0=a_2/b_2$ schneidet sie die y-Achse.
Gebrochen lineare Funktionen haben die besondere Eigenschaft, daß sie ineinander eingesetzt wieder gebrochen lineare Funktionen ergeben:

$$f\big(f(x)\big)=\frac{(a_1^2+a_2b_1)x+(a_1a_2+a_2b_2)}{(a_1b_1+b_1b_2)x+(a_2b_1+b_2^2)} \tag{39}$$

Bildet man aus den Koeffizienten in (38) eine Matrix

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\ ,$$

so ist die Matrix für die Koeffizienten in (39)

$$\begin{pmatrix} a_1^2+a_2b_1 & a_1a_2+a_2b_2\\ a_1b_1+b_1b_2 & a_2b_1+b_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{pmatrix}=\mathbf{A}^2$$

Dieser Zusammenhang zwischen 2×2-Matrizen und gebrochen linearen Funktionen gilt auch für verschiedene solche Funktionen. Entspricht $\mathbf{A}$ der Funktion $f(x)$ und $\mathbf{B}$ der Funktion $g(x)$, dann entspricht $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ der Funktion $f\big(g(x)\big)$.
Diese Koeffizienten a_1, a_2, b_1 und b_2 bestimmen die Funktion nicht eindeutig, da man Zähler und Nenner in der Definition (38) mit einer Konstanten erweitern oder kürzen könnte, ohne

daß sich $f(x)$ ändert. Deshalb ist es sinnvoll, eine Bedingung an die Koeffizienten zu stellen, die den Ausdruck eindeutig macht. Als besonders geeignet hat sich als Bedingung

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1 \tag{40}$$

herausgestellt. Das ist gerade die Determinate der Matrix $\mathbf{A}$. Der Fall, daß diese Determinate 0 ist, bedeutet, daß $a_1/a_2 = b_1/b_2$ ist und damit, daß sich in (38) der Zähler und der Nenner kürzen läßt. Dann ist $f(x)$ konstant, also uninteressant.
Matrizen mit Determinate $= 1$ lassen sich invertieren, daß heißt, es gibt eine Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ für die gilt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$, wobei $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix ist (sie entspricht der Funktion $f(x) = 1/x$). Es gilt

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}$$

wegen

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei man (40) zu berücksichtigen hat.
Der Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ entspricht natürlich die inverse Funktion

$$f^{-1}(y) = \frac{b_2 y - a_2}{a_1 - b_1 y} \ ,$$

das heißt die Funktion, für die gilt

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = f\big(f^{-1}(x)\big) = x \ .$$

Ein Fixpunkt w der Funktion $f(x)$ ist so ein Punkt, für den

$$w = \frac{a_1 w + a_2}{b_1 w + b_2} \tag{41}$$

gilt. $b_1 = b_2 = 0$ kann nicht sein, denn dann wäre (40) verletzt. Ist $b_1 = 0$ und $b_2 \neq 0$, dann ist $f(x)$ linear und aus (41) folgt

$$w = \frac{a_2}{b_2 - a_1} \ .$$

Dieser Fall ist wenig interessant.
Ist $b_1 \neq 0$, so ist w endlich. Deshalb kann man in (41) mit dem Nenner multiplizieren (ansonsten wäre (40) verletzt) und erhält nach leichtem Umformen, daß w Lösung der Gleichung

$$b_1 w^2 + (b_2 - a_1) w - a_2 = 0 \tag{42}$$

sein muß. Damit ist ein
Zusammenhang 2 $\Longrightarrow$ 1
hergestellt. Gleichung (42) hat die beiden Lösungen

$$w_{1,2} = \frac{1}{2b_1}\Big(a_1 - b_2 \pm \sqrt{(a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1}\Big) = \frac{1}{2b_1}\Big(a_1 - b_2 \pm \sqrt{b_2^2 - 2a_1 b_2 + a_1^2 + 4a_2 b_1}\Big) \ .$$

Dieser Ausdruck läßt sich weiter umformen, indem man berücksichtigt, daß aus (40)

$$4a_2 b_1 = 4a_1 b_2 - 4$$

folgt. Es gilt abschließend

$$w_{1,2} = \frac{1}{2b_1}\Big(a_1 - b_2 \pm \sqrt{(a_1 + b_2 + 2)(a_1 + b_2 - 2)}\Big) \ . \tag{43}$$

4.5.3 Iterative Bestimmung von Fixpunkten

Manchmal ist es sinnvoll, den Fixpunkt w der Funktion $f(x)$ nicht direkt durch Lösen einer quadratischen Gleichung, sondern näherungsweise zu bestimmen. Das heißt, man findet eine Folge w_n, die gegen den Fixpunkt w konvergiert

$$\lim_{n\to\infty} w_n = w \ .$$

Eine Möglichkeit zur Konstruktion einer solchen Folge wäre eine rekursive Darstellung. Gibt man sich ein w_1 vor, könnte man w_n aus w_{n-1} durch die Vorschrift

$$w_n = f(w_{n-1}) \tag{44}$$

bestimmen. Falls w_n gegen w konvergiert und $f(x)$ in der Nähe von w stetig ist, kann man in (44) zum Grenzwert $n \to \infty$ übergehen und erhält

$$w = f(w) \ ,$$

die Fixpunktgleichung. Ob die Folge w_n überhaupt konvergiert und gegen welchen Fixpunkt, ist erst einmal unklar. Man kann annehmen, daß die Konvergenz gegeben ist, wenn sich w_1 bereits in der Nähe von w befindet. Das ist im allgemeinen aber falsch.
Hinreichend für die Konvergenz ist, daß die Abstände der Folgeglieder in der Nähe des Fixpunktes kleiner werden. Es muß also

$$|w_n - w_{n-1}| \leq c|w_{n-1} - w_{n-2}| \tag{45}$$

mit einem $c < 1$ gelten.
Unter Berücksichtigung von (44) und der Eigenschaften von Funktionen und ihrer Ableitungen erhält man

$$w_n - w_{n-1} = f(w_{n-1}) - f(w_{n-2}) = f'(\tilde{w})(w_{n-1} - w_{n-2}) \ , \tag{46}$$

wobei $\tilde{w}$ ein Punkt zwischen w_{n-1} und w_{n-2}, also auch in der Nähe von w ist. Wenn $|f'(x)| \leq c < 1$ gilt in der Nähe des Fixpunktes, so folgt (45) aus (46).
Im Fall der gebrochen linearen Funktionen bedeutet (44)

$$w_n = f(w_{n-1}) = \frac{a_1 w_{n-1} + a_2}{b_1 w_{n-1} + b_2} \ . \tag{47}$$

Wir haben also zu untersuchen, wie groß $f'(x)$ in der Nähe der Fixpunkte (43) ist. Es gilt (unter Berücksichtigung von (40))

$$f'(x) = -\frac{1}{(b_1 x + b_2)^2}$$

und damit

$$f'(w_{1,2}) = -\frac{4}{\left(a_1 + b_2 \pm \sqrt{(a_1 + b_2 + 2)(a_1 + b_2 - 2)}\right)^2} \ .$$

Untersucht man diesen Ausdruck genauer, stellt man fest, daß er nur für einen Fixpunkt dem Betrag nach kleiner 1 ist. Gegen diesen Fixpunkt konvergiert die Iteration (47). Dieser Fixpunkt heißt anziehend, der andere abstoßend. Tatsächlich ist das für jeden Anfangswert w_1 der Fall, auch wenn er nicht in der Nähe des anziehenden Fixpunktes liegt. Sogar, wenn der Anfangswert beliebig nahe am abstoßenden Fixpunkt liegt, konvergiert er früher oder später gegen den anziehenden. Das ist eine besondere Eigenschaft der gebrochen linearen Funktionen und gilt nicht für allgemeine Funktionen.

4.5.4 Rationale Approximation

Ist w irrational, dann heißt eine gegen w konvergierende Folge w_n rationale Approximation von w, wenn die w_n gebrochene Zahlen sind, wenn es also zwei Folgen ganzer Zahlen x_n und y_n gibt, mit der Eigenschaft

$$w = \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \, . \tag{48}$$

Approximiert man irrationale Zahlen durch rationale immer besser, so muß der Nenner der rationalen Zahl immer größer werden. Das heißt, wenn (48) gilt, muß

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \infty \tag{49}$$

gelten (wenn man nur positive Nenner betrachtet).

4.5.5 Zweidimensionale rekursive Folgen erster Ordnung

Es sei

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 y_{n-1} \tag{50}$$
$$y_n = b_1 x_{n-1} + b_2 y_{n-1} \tag{51}$$

oder

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \; , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \tag{52}$$

eine zweidimensionale rekursive Darstellung erster Ordnung.
Aus (50) und (51) ist sofort ersichtlich, daß

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{a_1 x_{n-1} + a_2 y_{n-1}}{b_1 x_{n-1} + b_2 y_{n-1}} = \frac{a_1 \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + a_2}{b_1 \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} + b_2}$$

gilt. Setzt man

$$w_n = \frac{x_n}{y_n}$$

folgt

$$w_n = \frac{a_1 w_{n-1} + a_2}{b_1 w_{n-1} + b_2} \, .$$

Hieraus ist sofort ein **Zusammenhang 5 $\Longleftrightarrow$ 3** ersichtlich:
Eine zweidimensionale rekursive Folgen erster Ordnung – definiert durch die Matrix $\mathbf{A}$ *– liefert eine iterative Approximation des anziehenden Fixpunktes einer gebrochen linearen Funktion* $f(x)$*, die der Matrix* $\mathbf{A}$ *entspricht.*
Eine Folgerung hiervon ist ein **Zusammenhang 5 $\Longleftrightarrow$ 4**:
Sind die Koeffizienten a_1, a_2, b_1, b_2 und die Anfangswerte x_1 und y_1 ganzzahlig, dann sind auch alle Folgeglieder ganzzahlig. Damit bildet die Folge x_n/y_n eine rationale Approximation des anziehenden Fixpunktes der Funktion

$$f(x) = \frac{a_1 x + a_2}{b_1 x + b_2} \, .$$

Zusammenhang 1 $\Longrightarrow$ 2 $\Longrightarrow$ 5:
Jetzt ist es auch nicht schwer, eine rationale Approximation für eine beliebig vorgegebene irrationale Zahl

$$w = \frac{\beta + \sqrt{\alpha}}{\gamma}$$

($\alpha > 0$ sei keine Quadratzahl) zu finden.
Wir wissen, daß w Lösung der quadratischen Gleichung

$$\gamma^2 w^2 - 2\beta\gamma w + \beta^2 - \alpha = 0 \tag{53}$$

ist. Die Zahlen α, β und γ seien ganz. Gleichung (53) läßt sich leicht umformen. Es gilt

$$w(\gamma^2 w + \delta) = (\delta - 2\beta\gamma)w + \alpha - \beta^2$$

für beliebige δ. Hieraus folgt

$$w = \frac{(\delta - 2\beta\gamma)w + \alpha - \beta^2}{\gamma^2 w + \delta} \; .$$

Eine entsprechende gebrochen lineare Funktion mit diesem Fixpunkt wäre also

$$f(x) = \frac{(\delta - 2\beta\gamma)x + \alpha - \beta^2}{\gamma^2 x + \delta} \; ,$$

wobei δ geeignet zu wählen ist. Allerdings gelingt es nicht unbedingt, δ so zu wählen, daß die Matrix, die dieser gebrochen linearen Funktion entspricht eine Determinante vom Wert 1 hat. Aber das ist kein prinzipielles Problem. Es läßt sich stets δ so wählen, daß die Determinante ganzzahlig ist. Eine geeignete rationale Approximation für w liefert also die rekursive Folge

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta - 2\beta\gamma & \alpha - \beta^2 \\ \gamma^2 & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \; , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

mit geeigneten ganzzahligen Anfangswerten x_1 und y_1.

4.5.6 Diophantische Gleichung zweiter Ordnung mit zwei Unbekannten

Gleichungen werden diophantisch genannt, wenn nur nach ganzzahligen Lösungen gesucht wird. Gleichungen mit einer Unbekannten haben – wenn überhaupt – häufig wohl definierte reelle oder komplexe Lösungen. Diese können unter Umständen auch ganzzahlig sein. Hat eine Gleichung mehrere Unbekannte, ist sie eigentlich unterbestimmt (Regel: Zum Bestimmen einer Unbekannten benötigt man eine Gleichung) und das Suchen nach allgemeinen (reellen oder komplexen) Lösungen hat wenig Sinn. Reizvoll kann es aber sein, Lösungen in einer eingeschränkten Menge, z.B. den ganzen Zahlen zu suchen. Dann können sogar Gleichungen mit mehreren Unbekannten keine Lösungen besitzen. Das ist z.B. bei der berühmten Fermatschen Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

der Fall. Inzwischen ist bewiesen, daß es keine ganzen Zahlen x, y und z gibt, die diese Gleichung für festes $n > 2$ erfüllen.

Diophantische Gleichungen zweiter Ordnung mit zwei Unbekannten sind Gleichungen, in denen zwei Unbekannte, z.B. x und y, und höchstens quadratische Terme vorkommen. Die allgemeine Form einer solchen Gleichung ist

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \ ,$$

wobei die Koeffizienten A, B, C, D, E und F ganzzahlig sein sollen. In Abhängigkeit von den Koeffizienten kann so eine Gleichung keine Lösung haben, wie

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

(weil Quadrate immer positiv sind), endlich viele Lösungen wie

$$xy - 2x - 2y = 0 \tag{54}$$

oder unendlich viele.
Gleichung (54) entsteht, wenn man untersucht, mit welchen regulären x-Ecken man die Ebene auslegen kann. Dabei bezeichnet y die Zahl der x-Ecke, die in einem Punkt zusammenstoßen. Diese Gleichung läßt sich leicht lösen, wenn man sieht, daß sie äquivalent zu

$$(x - 2)(y - 2) = 4$$

ist. Es ist also 4 in ein Produkt von zwei Faktoren zu zerlegen. Diese Gleichung hat nur die positiven Lösungen $(x, y) = (6, 3),\ (4, 4),\ (3, 6)$ und einige nicht positive Lösungen.

Zusammenhang 1 $\iff$ 4 $\iff$ 6:
Es sei wieder

$$w = \frac{\beta + \sqrt{\alpha}}{\gamma}$$

($\alpha > 0$ sei keine Quadratzahl) und

$$w = \lim_{n\to\infty} w_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} \ .$$

eine gesuchte rationale Approximation. Die Zahlen α, β und γ seien ganz.
Wir wissen, daß w Lösung der quadratischen Gleichung

$$\gamma^2 w^2 - 2\beta\gamma w + \beta^2 - \alpha = 0 \tag{55}$$

ist. Bildet $w_n = x_n/y_n$ so eine Approximation, so kann man annehmen, daß w_n zwar nicht exakt (55) erfüllt, aber fast. w_n sei also Lösung der Gleichung

$$\gamma^2 w_n^2 - 2\beta\gamma w_n + \beta^2 - \alpha = \varepsilon_n$$

mit einem ε_n, das mit wachsendem n gegen 0 geht. Setzt man hier $w_n = x_n/y_n$, sieht man, daß x_n und y_n Lösung der Gleichung

$$\gamma^2 x_n^2 - 2\beta\gamma x_n y_n + (\beta^2 - \alpha) y_n^2 = \varepsilon_n y_n^2$$

sein müssen. Mit zunehmendem n geht y_n gegen ∞. Setzt man $\varepsilon_n y_n^2 = c$, geht folglich ε_n mit wachsendem n gegen 0. Ist c ganz, dann ist

$$\gamma^2 x_n^2 - 2\beta\gamma x_n y_n + (\beta^2 - \alpha) y_n^2 = c$$

eine diophantische Gleichung zweiter Ordnung mit den beiden Unbekannten x_n und y_n. Und umgekehrt, ist (x_n, y_n) eine Folge ganzzahliger Lösungen dieser Gleichung mit wachsendem y_n, dann ist $w_n = x_n/y_n$ eine rationale Approximation von w.
Diese Gleichung muß aber nicht für jedes c Lösungen haben. Falls sie aber für ein c Lösungen besitzt, dann sind es unendlich viele.

4.5.7 Rekursive Folgen zweiter Ordnung

Es sei

$$z_n = c_1 z_{n-1} + c_2 z_{n-2},\ z_0,\ z_1$$

eine rekursive Folge zweiter Ordnung. Ihr charakteristisches Polynom ist

$$P(z) = z^2 - c_1 z - c_2 \tag{56}$$

Zusammenhang 7 $\Longrightarrow$ 5:
Wir wissen bereits, daß man eine rekursive Folge zweiter Ordnung als zweidimensionale rekursive Folge erster Ordnung betrachten kann. Es gilt

$$\begin{pmatrix} z_3 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^2 + c_2 & c_1 c_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

oder allgemeiner

$$\begin{pmatrix} z_{2m+1} \\ z_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^2 + c_2 & c_1 c_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_{2m-1} \\ z_{2m-2} \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} z_1 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Zusammenhang 5 $\Longrightarrow$ 2:
Die aus der Matrix dieser Rekursion gebildete gebrochen lineare Funktion ist

$$f(x) = \frac{c_1^2 + c_2 x + c_1 c_2}{c_1 x + c_2} \ .$$

Ihr Fixpunkt w ist Lösung der Gleichung

$$w = \frac{c_1^2 + c_2 w + c_1 c_2}{c_1 w + c_2}$$

oder

$$w^2 - c_1 w - c_2 = 0 \ .$$

w ist also gerade Nullstelle des charakteristischen Polynoms (56) der Folge z_n. Das heißt, die Folge

$$w_n = \frac{z_{2n+1}}{z_{2n}}$$

konvergiert gegen den anziehenden Fixpunkt der Funktion $f(x)$. Andererseits wissen wir bereits (siehe Abschnitt 2.6, Gleichung (25)), daß z_{2n+1}/z_{2n} gegen die dem Betrag nach größte Nullstelle des charakteristischen Polynoms konvergiert. Diese ist also der anziehende Fixpunkt der Funktion $f(x)$.

4.5.8 Beispiel: Goldener Schnitt

Angenommen, man möchte rationale Näherungslösungen der Gleichung

$$z^2 - z - 1 = 0 \tag{57}$$

erhalten. Die Lösungen sind

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{2}\big(1+\sqrt{5}\big) = 1.6180339887498948482045868343656381177720\\
z_2 &= \frac{1}{2}\big(1-\sqrt{5}\big) = -0.6180339887498948482045868343656381177720\\
1 &= z_1 + z_2
\end{aligned}$$

und aus der Geometrie bekannt als Verhältnisse des goldenen Schnitts. Außerdem trafen wir auf die Gleichung (57) und diese Zahlen bereits in Abschnitt 2.1. Gleichung (57) liefert die Nullstellen des charakteristischen Polynoms der Fibonaccifolge.
Eine rationale Approximation wäre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = y_1$$

In die Gleichung, eingesetzt ergibt das

$$\frac{x_n^2}{y_n^2} - \frac{x_n}{y_n} - 1 = \varepsilon_n$$

(nicht 0 auf der rechten Seite, da die Gleichheit nur näherungsweise erfüllt ist) oder

$$x_n^2 - x_n y_n - y_n^2 = \varepsilon_n y_n^2$$

Setzt man die rechte Seite konstant, wird die Gleichung in dem Maße erfüllt, wie y_n^2 gegen ∞ geht. Es sei

$$x_n^2 - x_n y_n - y_n^2 = \alpha\ .$$

x_n und y_n sind also Lösungen der diophantischen Gleichung

$$x^2 - xy - y^2 = \alpha\ .$$

Löst man diese Gleichung bezüglich x auf, erhält man

$$x_{1,2} = \frac{y \pm \sqrt{5y^2 + 4\alpha}}{2}$$

Es gilt

$$x_1 + x_2 = y$$

das heißt, wenn x_1/y eine Approximation für z_1 ist, dann ist x_2/y eine Approximation für z_2. Es reicht somit, sich auf x_1 zu konzentrieren.

$$x = \frac{y + \sqrt{5y^2 + 4\alpha}}{2}$$

Ganze Lösungen für x gibt es daher, wenn $5y^2+4\alpha$ eine Quadratzahl ist, also wenn es ganzzahlige Lösungen der Gleichung

$$5y^2 + 4\alpha = m^2$$

gibt. Mit etwas Probieren (unter Zuhilfenahme eines Computers vielleicht) erkennt man, daß das nur für spezielle α möglich ist, und zwar für

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1,\ 4,\ 5,\ 9,\ 16,\ 20,\ 25,\ 36,\ 45,\ 49,\ 64,\ 80,\ 81,\ 100 \\ \alpha_2 &= 11,\ 19,\ 29,\ 31,\ 41,\ 44,\ 55,\ 59,\ 61,\ 71,\ 76,\ 79,\ 89,\ 95,\ 99 \end{aligned}$$

Dabei sind die Quadratzahlen eigentlich uninteressant, da sie alle Lösungen nur mit einem Faktor multiplizieren. Dieser Folge sieht man ihre Natur auf den ersten Blick nicht an. Sie scheint weder eine arithmetische, noch eine rekursive zu sein. Wünscht man nähere Informationen zu einer ganzzahligen Folge, gibt es dazu im Internet eine beinahe unermessliche Sammlung von solchen Folgen, die in jahrelanger Arbeit von N. J. A. Sloane zusammengestellt wurde. Gibt man die obige Folge unter

`http://www.research.att.com/~njas/sequences`

ein, erhält man:

```
ID Number: A031363
Sequence:  1,4,5,9,11,16,19,20,25,29,31,36,41,44,45,49,55,59,61,64,71,
           76,79,80,81,89,95,99,100,101,109,116,121,124,125,131,139,
           144,145,149,151,155,164,169,171,176,179,180,181,191,196,199,
           205,209,211,220,225,229,236
Formula:   Primes = 2 or 3 mod 5 occur with even exponents.
           Nonzero terms in expansion of Dirichlet series Product_p
              (1-(Kronecker(m,p)+1)*p^(-s)+Kronecker(m,p)*p^(-2s))^(-1) for
              m= 5.
```

Im Fall $\alpha = 1$ ist also die Gleichung $5y^2 + 4 = m^2$ in ganzen Zahlen zu lösen. Mit Hilfe eines Computers erhält man

n	x_n	y_n	x_n/y_n	$x_n/y_n - z_1$
0	1	0	∞	∞
1	2	1	2.0000000000000000000000000000	0.381966
2	5	3	1.6666666666666666666666666667	0.0486327
3	13	8	1.6250000000000000000000000000	0.00696601
4	34	21	1.6190476190476190476190476190 5	0.00101363
5	89	55	1.6181818181818181818181818181 8	0.000147829
6	233	144	1.6180555555555555555555555556	0.0000215668
7	610	377	1.6180371352785145888594164456 2	$3.146528619740655 \cdot 10^{-6}$
8	1597	987	1.6180344478216818642350557244 1	$4.590717870160305 \cdot 10^{-7}$
9	4181	2584	1.6180340557275541795665634674 9	$6.697765933136198 \cdot 10^{-8}$
10	10946	6765	1.6180339985218033998521803399 8	$9.771908551647593 \cdot 10^{-9}$
11	28657	17711	1.6180339901755970865563773925 8	$1.4257022383517905 \cdot 10^{-9}$
12	75025	46368	1.6180339889579020013802622498 2	$2.0800715317567542 \cdot 10^{-10}$

Hieraus ist leicht zu erkennen, daß

$$\begin{aligned} y_n &= x_{n-1} + y_{n-1} \\ x_n &= x_{n-1} + y_n \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}$$

gilt. Die gemischte Folge $y_0, x_0, y_1, x_1, y_2, x_2, y_3, x_3, ...$ ist die Fibonaccifolge. Man sieht, daß die Quotienten schnell gegen das Verhältnis des goldenen Schnitts konvergieren.
Im Fall $\alpha = 5$ ist also die Gleichung $5y^2 + 20 = m^2$ in ganzen Zahlen zu lösen. Mit Hilfe eines Computers erhält man wieder

n	x_n	y_n	x_n/y_n	$x_n/y_n - z_1$
1	3	1	3.0000000000000000000000000000	1.38197
2	7	4	1.7500000000000000000000000000	0.131966
3	18	11	1.6363636363636363636363636363636	0.0183296
4	47	29	1.62068965517241379310344827586	0.00265567
5	123	76	1.61842105263157894736842105263	0.000387064
6	322	199	1.61809045226130653266331658291	0.0000564635
7	843	521	1.61804222648752399232245681381	$8.237737629144118 \cdot 10^{-6}$
8	2207	1364	1.61803519061583577712609970674	$1.2018659409289215 \cdot 10^{-6}$
9	5778	3571	1.61803416409969196303556426771	$1.7534979711483098 \cdot 10^{-7}$
10	15127	9349	1.61803401433308375227297037116	$2.5583188904068382 \cdot 10^{-8}$
11	39603	24476	1.61803399248243176989704200032	$3.732536921692455 \cdot 10^{-9}$
12	103682	64079	1.61803398929446464520357683484	$5.4456979699899 \cdot 10^{-10}$

Die gemischte Folge $y_0, x_0, y_1, x_1, y_2, x_2, y_3, x_3, ...$ ist nicht die Fibonaccifolge. Sie unterscheidet sich von ihr durch die Anfangswerte. Diese Folge heißt Lucas–Folge und spielt in der Theorie der Pseudoprimzahlen eine Rolle.

4.6 Pseudoprimzahlfolgen

Ein wichtiges Problem in der Zahlentheorie ist es, festzustellen, ob eine gegebene Zahl Primzahl – $\mathcal{P}$ sei die Menge der Primzahlen – oder zusammengesetzt ist. Dafür sind Pseudoprimzahltests sehr beliebt. Solche Tests funktionieren für alle Primzahlen, aber leider auch für einige zusammengesetzte Zahlen – die Pseudoprimzahlen. Ein Beispiel ist der klassische Fermattest:

$$p \in \mathcal{P} \implies 2^p - 2 \equiv 0 \bmod p$$

Für jede Primzahl p ist $2^p - 2$ durch p teilbar. Aber es ist auch

$$\begin{aligned} 2^{341} - 2 &= 4479489484355608421114884561136888556243290994469299069799978201927583742360321890761754986543214231550 = \\ &= 341 \cdot 13136332798696798888899954724741608669335164206654835981818117894215788100763407304286671514789484550 \end{aligned}$$

und $341 = 11 \cdot 31$ ist keine Primzahl. Sogar den allgemeineren Test

$$p \in \mathcal{P} \implies k^p - k \equiv 0 \bmod p\ , \quad k \in \mathbb{N} \tag{58}$$

erfüllen Zahlen, die sogenannten Carmichael–Zahlen. Für so eine Zahl p ist $k^p - k$ für jedes k durch p teilbar. Die kleinste solche Zahl ist $561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$.

Im weiteren werden Verallgemeinerungen des Fermattests vorgestellt, die noch strenger sind, das heißt Tests, die noch weniger zusammengesetzte Zahlen erfüllen. Man nimmt an, daß alle Pseudoprimzahltests unendlich viele Pseudoprimzahlen liefern, obwohl das im konkreten Fall oft schwer zu beweisen ist. So wurde erst vor kurzem bewiesen, daß es unendlich viele Carmichael–Zahlen gibt. „Weniger" ist hier also im Sinne von Häufigkeit zu verstehen. Ein Maß für die Güte eines Pseudoprimzahltests ist das Verhältnis der Anzahl der Pseudoprimzahlen zur Anzahl der tatsächlichen Primzahlen unter einer gegebenen Schranke. So gibt es unter 10^10 nur 14884 zusammengesetzte Zahlen, die den klassischen Fermattest (zur Basis 2) bestehen und sogar nur 1547 Carmichael–Zahlen (selbstverständlich weniger, sie sind ja eine Teilmenge). Primzahlen dagegen gibt es unter 10^10 genau 455052510 Stück. Einen Pseudoprimzahltest, der nur eine endliche Zahl von Pseudoprimzahlen liefert, hat noch keiner gefunden. Das wäre auch ein echter Primzahltest, denn diese endlich vielen Pseudoprimzahlen kann man dann als Ausnahmen werten.

4.6.1 Theorie

Der Beweis von Aussage (58) beruht auf einer Eigenschaft der Binomialkoeffizienten C_n^k

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

$$p \in \mathcal{P} \implies C_p^j \equiv 0 \bmod p \ , \quad j = 1, ..., p-1$$

Ein Blick auf das Pascalsche Dreieck bestätigt das. Beweisen läßt sich diese Aussage einfach mit Hilfe des Satzes: Ist $a \cdot b$ aber nicht a durch eine Primzahl p teilbar, so ist b durch p teilbar. Offenbar ist

$$j! \cdot C_p^j = p \cdot (p-1) \cdots (p-j+1)$$

durch p teilbar. Aber $j!$ kann für $j < p$ nicht durch die Primzahl p teilbar sein. Also muß C_p^j durch p teilbar sein.
Jetzt kann man Aussage (58) mit vollständiger Induktion bezüglich k beweisen. Für $k = 1$ ist $k^p - k = 0$ also durch alle Zahlen teilbar. Der Schritt von k auf $k+1$ folgt aus der Formel

$$(k+1)^p = k^p + \sum_{j=1}^{p-1} C_p^j k^j + 1$$

Die Summe ist durch p teilbar wie eben bewiesen, also ist

$$(k+1)^p - k^p - 1 \equiv 0 \bmod p \ ,$$

was äquivalent ist zu

$$(k+1)^p - (k+1) \equiv k^p - k \bmod p \ .$$

Das heißt, $(k+1)^p - (k+1)$ läßt bei der Division durch p den gleichen Rest wie $k^p - k$, also 0 nach Induktionsvoraussetzung.

Aussage (58) kann man auch auf umständlichere, dafür aber verallgemeinerbare Art beweisen: Offenbar ist $k^p = (1 + \ldots + 1)^p$, wobei in der Klammer k Einsen stehen. Diese Klammer läßt sich ausmultiplizieren. Es gilt

$$\begin{aligned} k^p &= (1 + \ldots + 1)^p = \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k=0 \\ j_1+\ldots+j_k=p}}^{p} C_p^{j_1,\ldots,j_k} \cdot 1^{j_1} \cdot \ldots \cdot 1^{j_k} = \\ &= 1^p + \ldots + 1^p + \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_k=0 \\ j_1+\ldots+j_k=p}}^{p-1} C_p^{j_1,\ldots,j_k} \cdot 1^{j_1} \cdot \ldots \cdot 1^{j_k} \end{aligned} \tag{59}$$

Hier sind

$$C_p^{j_1,\ldots,j_k} = \frac{(j_1 + \ldots + j_k)!}{j_1 \cdot \ldots \cdot j_k} = \frac{p!}{j_1 \cdot \ldots \cdot j_k}$$

die Multinomialkoeffizienten, für die sich analog zu den Binomialkoeffizienten zeigen läßt

$$p \in \mathcal{P} \implies C_p^{j_1,\ldots,j_k} \equiv 0 \bmod p \ , \quad j_1, \ldots, j_k < p \ , \quad j_1 + \ldots + j_k = p \ .$$

Also ist die Summe auf der rechten Seite von (59) durch p teilbar und somit gilt

$$1^p + \ldots + 1^p - (1 + \ldots + 1)^p \equiv 0 \bmod p$$

Bei diesem Beweis wurde nicht verwendet, daß es sich bei den Summanden um Einsen handelt. Völlig analog läßt sich zeigen

$$p \in \mathcal{P} \implies f_1^p + \ldots + f_k^p - \Big(f_1 + \ldots + f_k\Big)^p \equiv 0 \bmod p \ , \tag{60}$$

wobei die $f_1, \ldots, f_k$ beliebige ganze Zahlen sein können.
Jetzt läßt sich aus gegebenen Zahlen $f_1, \ldots, f_k$ eine Folge $\{f_n\}$ mit

$$\begin{aligned} f_0 &= k \\ f_1 &= f_1 + \ldots + f_k \\ f_n &= f_1^n + \ldots + f_k^n \ , \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{61}$$

definieren und es gilt der Satz

$$p \in \mathcal{P} \implies f_p \equiv f_1^p \bmod p \ . \tag{62}$$

Tatsächlich läßt sich die Beschränkung auf ganze Zahlen $f_1, \ldots, f_k$ stark abschwächen. Die f_i können beliebige ganze, irrationale oder komplexe Zahlen sein, allerdings müssen sie so gewählt werden, daß alle f_n ganzzahlig sind. Für $k = 2$ sind zum Beispiel die Zahlen

$$f_1 = x + \sqrt{y} \ , \quad f_2 = x - \sqrt{y}$$

dafür geeignet. Für größere k ist es im allgemeinen schwierig, bei gegebenen $f_1, \ldots, f_k$ zu testen, ob alle f_n ganzzahlig sind.
Eine Methode, nur solche $f_1, \ldots, f_k$ auszuwählen, für die alle f_n ganzzahlig sind, liefert die allgemeine Theorie rekursiver Folgen (siehe Kapitel 2).
Jede Folge mit der expliziten Darstellung (61) besitzt eine rekursive Darstellung der Form

$$f_n = c_1 f_{n-1} + \cdots + c_k f_{n-k} \tag{63}$$

mit geeigneten Koeffizienten $c_1, ..., c_k$. Die Zahlen $x_1, ..., x_k$ sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von Folge (63). Es gilt also

$$P_k(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1}x - c_k = (x - x_1) \cdot \cdots \cdot (x - x_k) \ .$$

Die c_j sind mit den x_j nach dem Satz von Vieta verküpft:

$$\begin{aligned}
c_1 &= x_1 + x_2 + ... + x_k \\
c_2 &= -x_1 x_2 - x_1 x_3 - ... - x_1 x_k - x_2 x_3 - ... - x_{k-1} x_k \\
c_3 &= x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + ... + x_{k-2} x_{k-1} x_k \\
... & \\
c_k &= (-1)^{k+1} x_1 x_2 \cdots x_k
\end{aligned}$$

Sind die c_j und die $f_0, ..., f_{k-1}$ ganzzahlig, erzeugt die Vorschrift (63) nur ganze Zahlen. Aus gegebenen c_1,...,c_k lassen sich durch Lösung der Gleichung

$$x^k = c_1 x^{k-1} + \cdots + c_{k-1} x + c_k$$

die Wurzeln $x_1, ..., x_k$ bestimmen. Mit ihnen kann man dann nach

$$\begin{aligned}
f_0 &= k \\
f_1 &= x_1 + ... + x_k \\
... & \\
f_{k-1} &= x_1^{k-1} + ... + x_k^{k-1}
\end{aligned}$$

die Anfangsglieder $f_0, ..., f_{k-1}$ berechnen. Tatsächlich sind diese Anfangsglieder automatisch ganzzahlig, wenn c_1,...,c_k ganzzahlig waren. Aus der Theorie symmetrischer Polynome läßt sich nämlich schlußfolgern, daß man $x_1^j + ... + x_k^j$ aus den Basispolynomen $x_1 + x_2 + ... + x_k$, $x_1 x_2 + ... + x_{k-1} x_k$, ..., $x_1 x_2 \cdots x_j + ... + x_{k-j+1} \cdots x_{k-1} x_k$ bestimmen kann. Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
f_0 &= k \\
f_1 &= c_1 \\
f_2 &= c_1^2 + 2c_2 \\
f_3 &= c_1^3 + 3\Big(c_1 c_2 + c_3\Big) \\
f_4 &= c_1^4 + 4c_1^2 c_2 + 2c_2^2 + 4c_1 c_3 + 4c_4 \\
f_5 &= c_1^5 + 5\Big(c_1^3 c_2 + c_1^2 c_3 + c_1 c_2^2 + c_1 c_4 + c_2 c_3 + c_5\Big) \\
f_6 &= c_1^6 + 6c_1^4 c_2 + 2c_2^3 + 6c_1^3 c_3 + 3c_3^2 + 6c_2 c_4 + 3c_1^2(3c_2^2 + 2c_4) + 6c_1(2c_2 c_3 + c_5) + 6c_6 \\
f_7 &= c_1^7 + 7\Big(c_1^5 c_2 + c_1^4 c_3 + 2c_1^3 c_2^2 + c_1^3 c_4 + 3c_1^2 c_2 c_3 + c_1^2 c_5 + c_1 c_2^3 + c_1 c_3^2 + 2c_1 c_2 c_4 + c_1 c_6 + \\
&+ \ c_2^2 c_3 + c_3 c_4 + c_2 c_5 + c_7\Big) \ .
\end{aligned}$$

Hier sieht man bereits, daß $f_p - f_1^p = f_p - c_1^p$ für beliebig vorgegebene $c_1, ..., c_k$ durch p teilbar ist, wenn p Primzahl ist.
Jedes k-Tupel $c_1, c_2, ..., c_k$ generiert also eine geeignete Folge f_n. Aber nicht jede solche Folge ist sinnvoll. Beispielsweise liefert die Folge

$$f_n = f_{n-1} - f_{n-2} \ , \quad f_0 = 2 \ , \quad f_1 = 1 \tag{64}$$

bis 100 bereits die Pseudoprimzahlen 25, 35, 49, 55, 65, 77, 85, 91 und 95 und unter 1000 insgesamt 166 Pseudoprimzahlen, also wesentlich mehr als der einfachste Fermattest. Folge (64) ist ungeeignet, weil sie periodisch ist. Das läßt sich folgendermaßen sehen: Das charakteristische Polynom von (64)

$$x^2 = x - 1$$

hat die (komplexen) Nullstellen

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \ ,$$

also gilt

$$f_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)^n \ .$$

Aus $|x_1| = |x_2| = 1$ folgt

$$|f_n| \le \left| \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)^n + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right)^n \right| \le \left| \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right|^n + \left| \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right|^n \le 2 \ .$$

Die Folge f_n ist also beschränkt, aber jede beschränkte ganzzahlige rekursive Folge ist periodisch.

Eine geeignete Folge f_n muß somit unbeschränkt sein. Das heißt, wenigstens eine der Nullstellen (o.B.d.A. sei das x_1) des charakteristischen Polynoms muß vom Betrag her größer 1 sein. Für große n verhält sich dann $|f_n|$ wie $|x_1|^n$. Die Folge f_n wächst also exponentiell. Daher ist es sinnvoll, zu versuchen, den Test (62) durchzuführen, ohne f_n explizit zu berechnen.

Auf diese Weise lassen sich Pseudoprimzahlfolgen beliebiger Ordnung erfinden. Die beiden einfachsten, die Lucas– und die Perrin–Folge werden vorgestellt, nachdem ein effektiver numerischer Algorithmus beschrieben wurde.

4.6.2 Ein effektiver numerischer Algorithmus

Wünschenswert wäre ein Algorithmus, der es ermöglicht, eine gegebene Zahl n auf ihre Eigenschaft zu testen, ohne rekursiv nach (63) alle vorhergehenden Folgenglieder f_j mit $j = 1, ..., n$ berechnen zu müssen. Die explizite Darstellung (61) ist im allgemeinen dazu auch nicht geeignet, da die x_i irrational sein können und damit zur Bestimmung von x_i^n mit der nötigen Genauigkeit sehr viele Stellen von x_i berücksichtigt werden müssen, nämlich soviele, daß die Einerstelle vor dem Komma exakt berechnet wird.

In Kapitel 3 wurde gezeigt, daß man jede rekursive Folge k-ter Ordnung als k-dimensionale rekursive Folge erster Ordnung betrachten kann. Es gilt

$$\begin{pmatrix} f_{km} \\ f_{km+1} \\ \vdots \\ f_{km+k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1k} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{k1} & g_{k2} & \cdots & g_{kk} \end{pmatrix}^m \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{k-1} \end{pmatrix}$$

wobei sich die g_{ij} aus den c_i bestimmen lassen. Diese Darstellung ist formal explizit. Es kommt darauf an, die m-te Potenz der Matrix (g_{ij}) modulo $n = km + i$ zu berechnen, was wesentlich schneller durchzuführen ist als die Berechnung von f_n.

4.6.3 Die Lucas–Folge

Die Lucas–Folge ist die einfachste Pseudoprimzahlfolge zweiter Ordnung, also mit $k = 2$.
Die bekannte Fibonaccifolge ist eine rekursive Folge zweiter Ordnung mit der Rekursionsvorschrift

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

und den Anfangsgliedern $f_0 = 1$ und $f_1 = 1$. Die Lucas–Folge hat die gleiche Rekursionsvorschrift, muß aber als Beispiel für die eben vorgestellten Pseudoprimzahlfolgen die Anfangswerte $f_0 = k = 2$ und $f_1 = c_1 = 1$ besitzen. Folglich gilt

$$n \in \mathcal{P} \implies f_n \equiv 1 \bmod n\ .$$

charakteristisches Polynom

$$x^2 = x + 1$$

Nullstellen

$$f_1 = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \approx 1.6180339887498948482045868343 7...$$
$$f_2 = \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right) \approx -0.6180339887498948482045868343 7...$$

Explizite Darstellung

$$f_n = \frac{1}{2^n}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^n + \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right)$$

Zweidimensionale Darstellung

$$\begin{pmatrix} f_{2m+1} \\ f_{2m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^m \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Folgeglieder und Pseudoprimzahlen bis 10^4

n	f_n	$g_n = f_n - f_1^n$	$g_n \bmod n$	prim?
0	2			
1	1	0	0	–
2	3	2	0	+
3	4	3	0	+
4	7	6	2	–
5	11	10	0	+
6	18	17	5	–
7	29	28	0	+
8	47	46	6	–
9	76	75	3	–
10	123	122	2	–
11	199	198	0	+
12	322	321	9	–
13	521	520	0	+
14	843	842	2	–
15	1364	1363	13	–
16	2207	2206	14	–
17	3571	3570	0	+
18	5778	5777	17	–
19	9349	9348	0	+
20	15127	15126	6	–
21	24476	24475	10	–
22	39603	39602	2	–
23	64079	64078	0	+
705			0	$n = 3 \cdot 5 \cdot 47$
2465			0	$n = 5 \cdot 17 \cdot 29$
2737			0	$n = 7 \cdot 17 \cdot 23$
3745			0	$n = 5 \cdot 7 \cdot 107$
4181			0	$n = 37 \cdot 113$
5777			0	$n = 53 \cdot 109$

4.6.4 Die Perrin–Folge

Die Perrin–Folge ist eine Folge dritter Ordnung mit der Rekursionsvorschrift

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-3}$$

und den daraus folgenden Anfangswerten

$$\begin{aligned} f_0 &= 3 \\ f_1 &= 0 \\ f_2 &= 2\ . \end{aligned}$$

Wegen $c_1 = f_1 = 0$ gilt

$$n \in \mathcal{P} \implies f_n \equiv 0 \bmod n\ .$$

charakteristisches Polynom

$$x^3 = x + 1$$

Nullstellen
Es sei

$$a = 9 - \sqrt{69} \quad , \quad b = 9 + \sqrt{69}$$

dann ist

$$a + b = 18 \quad , \quad ab = 12$$

und

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{18}} \approx 1.324717957244746025960908854478 \\ f_2 &= \frac{1}{12}\left(- \sqrt[3]{a^2 b} - \sqrt[3]{ab^2} + i\sqrt{6\left(\sqrt[3]{18a} + \sqrt[3]{18b} - 12\right)}\right) \\ &\approx -0.66235897862237301298045442723\,9 + 0.56227951206230124389918214490\,9i \\ f_3 &= \frac{1}{12}\left(- \sqrt[3]{a^2 b} - \sqrt[3]{ab^2} - i\sqrt{6\left(\sqrt[3]{18a} + \sqrt[3]{18b} - 12\right)}\right) \\ &\approx -0.662358978622373012980454427239 - 0.562279512062301243899182144909i \end{aligned}$$

Dreidimensionale Darstellung

$$\begin{pmatrix} f_{3m} \\ f_{3m+1} \\ f_{3m+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^m \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Numerischer Algorithmus
Ziel ist die schnelle Berechnung von $f_n \bmod n$. Das wird durch eine besonders effiziente Potenzierung der Matrix in der dreidimensionalen Darstellung erreicht.

1. Zerlege $n = 3m + i$, $i \in \{0, 1, 2\}$
2. Berechne Dualdarstellung D von m.
3. Ersetze in D jede Null durch Q und jede 1 durch QM und erhalte das Wort W.
4. Setze $(a, b, c) := (1, 0, 0)$ und führe entsprechend dem Wort W von links nach rechts folgende Operationen modulo n durch:

$$\begin{aligned} M &: \quad (a, b, c) := (a + b, b + c, a + b + c) \\ Q &: \quad (a, b, c) := (a^2 + 2bc, b^2 + c^2 + 2ab, b^2 + 2ac + 2bc) \ . \end{aligned}$$

5. Berechne schließlich

$$f_n \bmod n = \begin{cases} 3a + 2b & \text{für} \quad i = 0 \\ 3b + 2c & \text{für} \quad i = 1 \\ 2a + 2b + 3c & \text{für} \quad i = 2 \ . \end{cases}$$

Beispiel: $f_{19} \bmod 19 = ?$

1. $19 = 3 \cdot 6 + 1$, $m = 6$, $i = 1$
2. Dualdarstellung von 6: $D = 110$.
3. $W = QMQMQ$
4. $$\begin{aligned} & (a,b,c) = (1,0,0) \\ \overset{Q}{\Longrightarrow}\ & (a,b,c) = (1,0,0) \\ \overset{M}{\Longrightarrow}\ & (a,b,c) = (1,0,1) \\ \overset{Q}{\Longrightarrow}\ & (a,b,c) = (1,1,2) \\ \overset{M}{\Longrightarrow}\ & (a,b,c) = (2,3,4) \\ \overset{Q}{\Longrightarrow}\ & (a,b,c) = (9,18,11) \end{aligned}$$
5. $(9,18,11) \overset{i=1}{\Longrightarrow} 3 \cdot 18 + 2 \cdot 11 = 76 \equiv 0 \bmod 19$

Einige Zahlen n können von vornherein ausgeschlossen werden, denn es gilt

$$n \equiv 0 \bmod 4 \implies f_n \not\equiv 0 \bmod 4 \implies f_n \not\equiv 0 \bmod n\ .$$

Das gleiche gilt für $n = 9, 14, \ldots$. Außerdem ist

$$n \equiv 0 \bmod 3\ ,\quad n \not\equiv 0,1,3,9 \bmod 13 \implies f_n \not\equiv 0 \bmod 3 \implies f_n \not\equiv 0 \bmod n$$

Folgeglieder und Pseudoprimzahlen bis 10^9

n	f_n	f_n mod n	prim?
0	3	-	-
1	0	0	-
2	2	0	+
3	3	0	+
4	2	2	−
5	5	0	+
6	5	5	−
7	7	0	+
8	10	2	−
9	12	3	−
10	17	7	−
11	22	0	+
12	29	5	−
13	39	0	+
14	51	9	−
15	68	8	−
16	90	10	−
17	119	0	+
18	158	14	−
19	209	0	+
20	277	17	−
21	367	10	−
22	486	2	−
23	644	0	+
24	853	13	−
25	1130	5	−
26	1497	15	−
27	1983	12	−
28	2627	23	−
29	3480	0	+
30	4610	20	−
31	6107	0	+
271441		0	$n = 521 \cdot 521$
904631		0	$n = 7 \cdot 13 \cdot 9941$
16532714		0	$n = 2 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 53 \cdot 1289$
24658561		0	$n = 19 \cdot 271 \cdot 4789$
27422714		0	$n = 2 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 47 \cdot 2411$
27664033		0	$n = 3037 \cdot 9109$
46672291		0	$n = 4831 \cdot 9661$
102690901		0	$n = 5851 \cdot 17551$
130944133		0	$n = 6607 \cdot 19819$
196075949		0	$n = 5717 \cdot 34297$
214038533		0	$n = 8447 \cdot 25339$
517697641		0	$n = 6311 \cdot 82031$
545670533		0	$n = 13487 \cdot 40459$
801123451		0	$n = 8951 \cdot 89501$
855073301		0	$n = 16883 \cdot 50647$
903136901		0	$n = 17351 \cdot 52051$
970355431		0	$n = 22027 \cdot 44053$

5 Anhang. Lösungsmethoden

5.1 Rechnen mit Summen

5.2 Lineare Gleichungssysteme

5.2.1 Zwei lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten

5.2.2 Drei lineare Gleichungen mit drei Unbekannten

5.3 Polynome

5.4 Prinzip der vollständigen Induktion

Literatur

[1] A. Bartholome, J. Rung, H. Kern. Zahlentheorie fr Einsteiger. 2. Auflage. Vieweg 1996.

[2] J. H. Conway, R. K. Guy. Zahlenzauber: von natürlichen, imaginären und anderen Zahlen. Birkhäuser Verlag. 1997.

[3] A. I. Markuschewitsch. Rekursive Folgen. Deutscher Verlag der Wissenschaften. Berlin. 1968.

[4] W. Engel, U.Pirl. Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR. Band I. Volk und Wissen Verlag Berlin. 1972

[5] A. Engel. Problem Solving Strategies. Springer-Verlag New York. 1998.