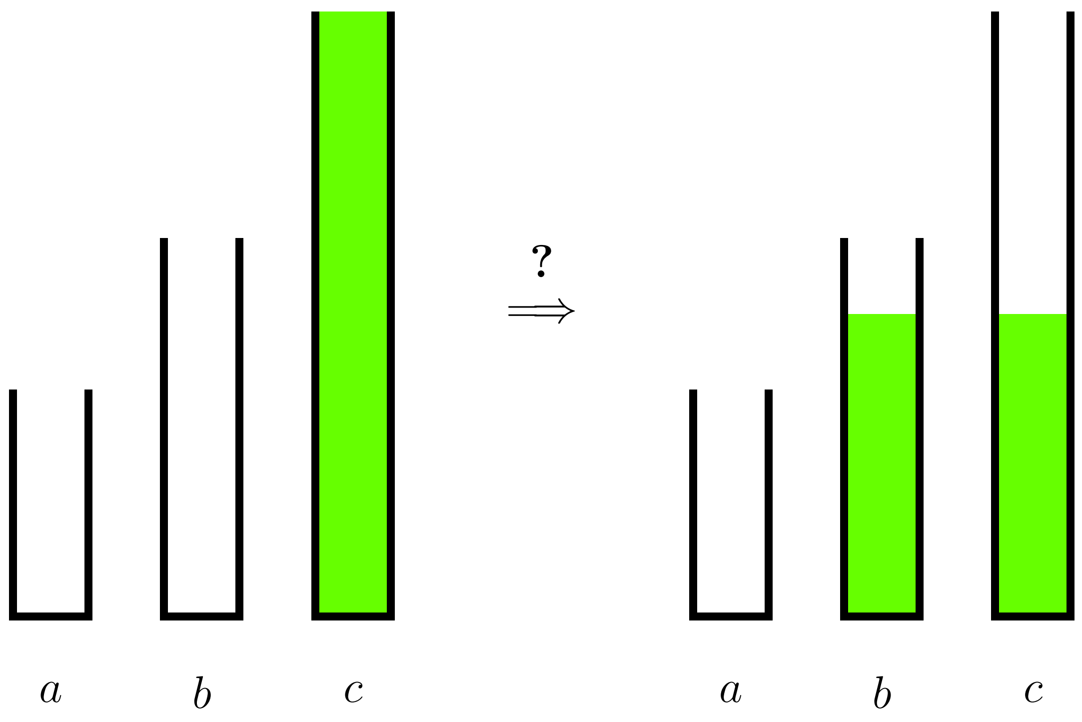
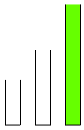
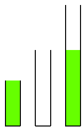
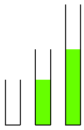
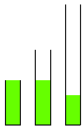
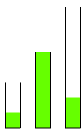
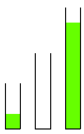
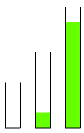
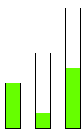
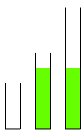
Das 358–Problem*

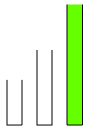
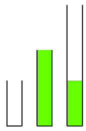
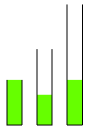
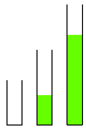
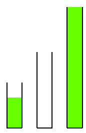
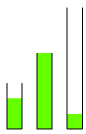
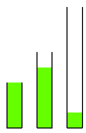
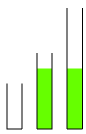
Gegeben sind ein mit Wasser gefülltes 8-Litergefäß und zwei leere 3- bzw. 5-Litergefäße. Ist es möglich, mit nur diesen Hilfsmitteln 4 Liter Wasser abzumessen?



*Vortrag zum Tag der Mathematik, Humboldt–Universität Berlin, 19. Mai 2001

Zwei Lösungen

$a\ b\ c$		
	**(0,0,8)**	$c \longrightarrow a$
	**(3,0,5)**	$a \longrightarrow b$
	**(0,3,5)**	$c \longrightarrow a$
	**(3,3,2)**	$a \longrightarrow b$
	**(1,5,2)**	$b \longrightarrow c$
	**(1,0,7)**	$a \longrightarrow b$
	**(0,1,7)**	$c \longrightarrow a$
	**(3,1,4)**	$a \longrightarrow b$
	**(0,4,4)**	

$a\ b\ c$		
	**(0,0,8)**	$c \longrightarrow b$
	**(0,5,3)**	$b \longrightarrow a$
	**(3,2,3)**	$a \longrightarrow c$
	**(0,2,6)**	$b \longrightarrow a$
	**(2,0,6)**	$c \longrightarrow b$
	**(2,5,1)**	$b \longrightarrow a$
	**(3,4,1)**	$a \longrightarrow c$
	**(0,4,4)**	

Neue Fragen

- **Gibt es andere Lösungen, vielleicht mit noch weniger Zügen?**
- **Kann man mit den gegebenen Gefäßen jede beliebige Wassermenge abmessen?**
- **Kann man von jedem Anfangszustand starten?**
- **Gibt es für beliebige Gefäße und beliebige Wassermengen stets eine Lösung und wie findet man sie?**
- **Beispiel: Gegeben sind ein mit Wasser gefülltes 8-Litergefäß und zwei leere 2- bzw. 4-Litergefäße. Ist es möglich, mit nur diesen Hilfsmitteln 5 Liter Wasser abzumessen?**
- **Beispiel: Gegeben sind ein mit Wasser gefülltes 8-Litergefäß und zwei leere 5- bzw. 6-Litergefäße. Ist es möglich, mit nur diesen Hilfsmitteln 4 Liter Wasser abzumessen?**
- **Kann man von vornherein sagen, ob eine Aufgabe lösbar ist oder nicht?**
- **Gibt es Zusammenhänge mit anderen ähnlichen Aufgaben, z.B. der Sanduhraufgabe? (Man koche Eier mit Hilfe einer 5 und einer 7 Minuten Sanduhr genau 4 Minuten lang.)**

Die Aufgabe als Einpersonenspiel

$$\begin{array}{ccc} \textbf{Ziel} & \Longleftarrow & \textbf{Anfang} \\ \textbf{(0,4,4)} & \Uparrow & \textbf{(0,0,8)} \\ & \Big\| & \\ & \textbf{6 mögliche Züge} & \end{array}$$

$$a \longrightarrow b,\ a \longrightarrow c,\ b \longrightarrow a,\ b \longrightarrow c,\ c \longrightarrow a,\ c \longrightarrow b$$

Wieviel Zustände?

Gefäß a: 4 Möglichkeiten
Gefäß b: 6 Möglichkeiten
Gefäß c: 9 Möglichkeiten

$\Longrightarrow 4 \cdot 6 \cdot 9 = 216$ – **Zustände**

Aber $x + y + z = 8 \Longrightarrow$ **nur** 36 – **Zustände!**

Entspricht Aufgabe: Zerlege 8 in drei Summanden, wobei der erste nicht größer als 3 und der zweite nicht größer als 5 sein soll.

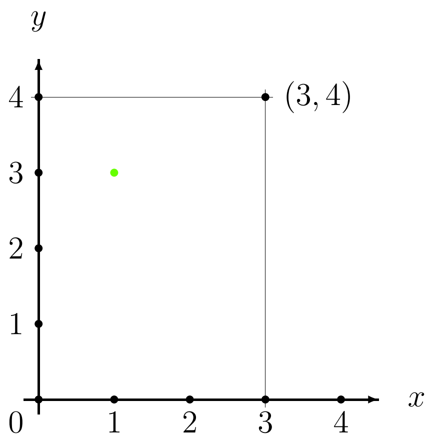
(0,0,8)*	**(0,1,7)***	**(0,2,6)***	**(0,3,5)***	**(0,4,4)***	**(0,5,3)***
(1,0,7)*	**(1,1,6)**	**(1,2,5)**	**(1,3,4)**	**(1,4,3)**	**(1,5,2)***
(2,0,6)*	**(2,1,5)**	**(2,2,4)**	**(2,3,3)**	**(2,4,2)**	**(2,5,1)***
(3,0,5)*	**(3,1,4)***	**(3,2,3)***	**(3,3,2)***	**(3,4,1)***	**(3,5,0)***

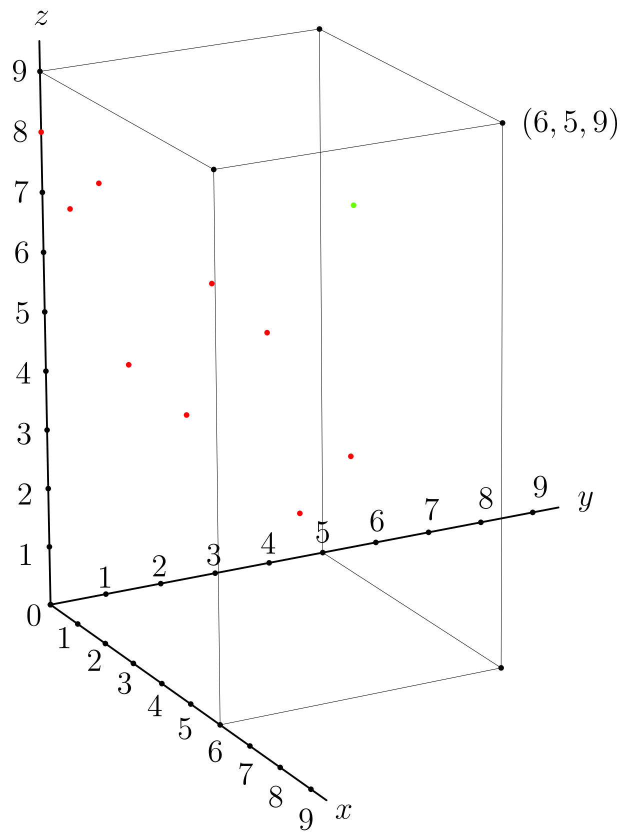
Aber zu Ende kippen! $\Longrightarrow$ **nur** 28 – **Zustände (mit *)**

$$(0,0,8)(c \to a)(a \to b)(c \to a)(a \to b)(b \to c)(a \to b)(c \to a)(a \to b) = (0,4,4)$$

Koordinatensysteme

(x, y) — **zwei Dimensionen**
(x, y, z) — **drei Dimensionen**





$(x, y) = (3, 4)$

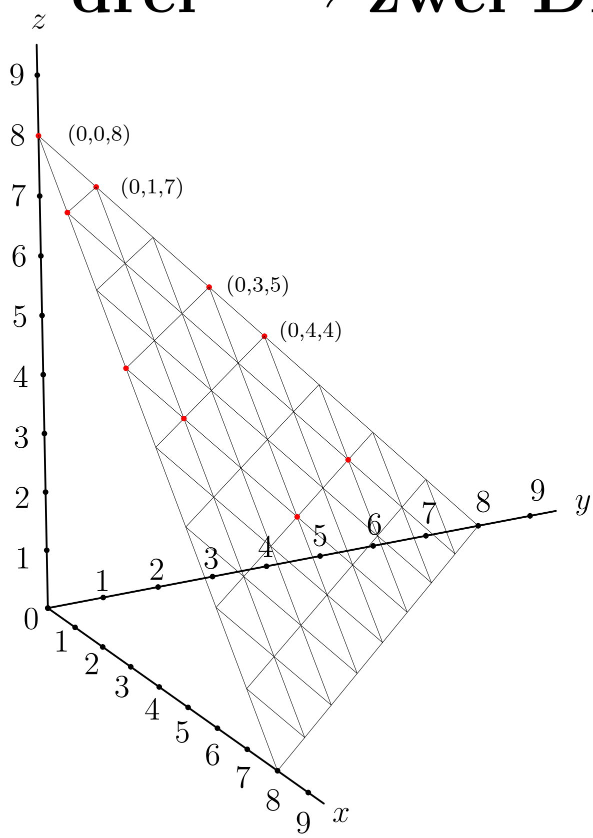
$(x, y) = (1, 3)$

$(x, y, z) = (6, 5, 9)$

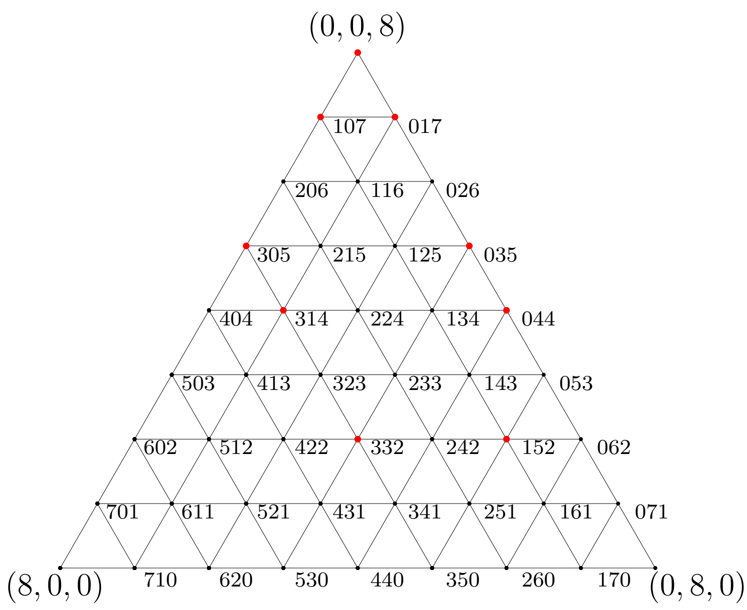
$(x, y, z) = (3, 4, 7)$

(0,0,8) → (3,0,5) → (0,3,5) → (3,3,2) → (1,5,2) → (1,0,7) → (0,1,7) → (3,1,4) → (0,4,4)

drei $\longrightarrow$ zwei Dimensionen



$$x + y + z = 8$$



$(0, 0, 8)$

$(3, 0, 5)$

$(0, 3, 5)$

$(3, 3, 2)$

$(1, 5, 2)$

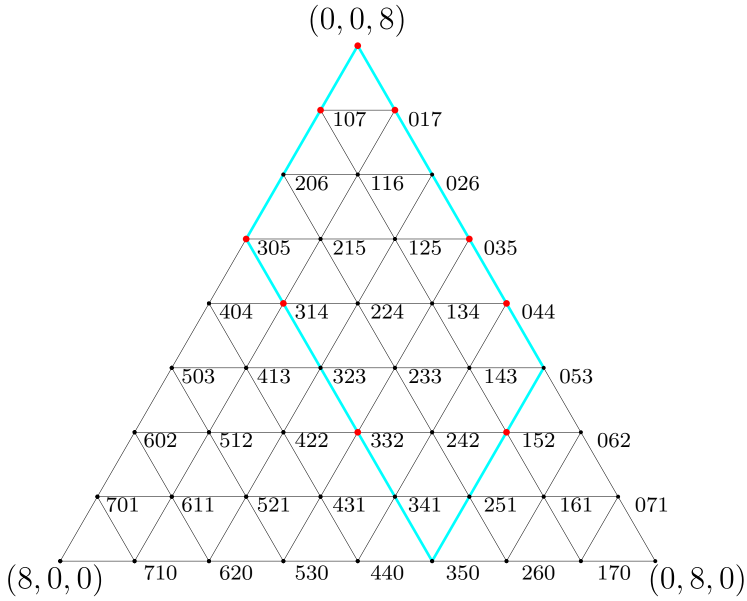
$(1, 0, 7)$

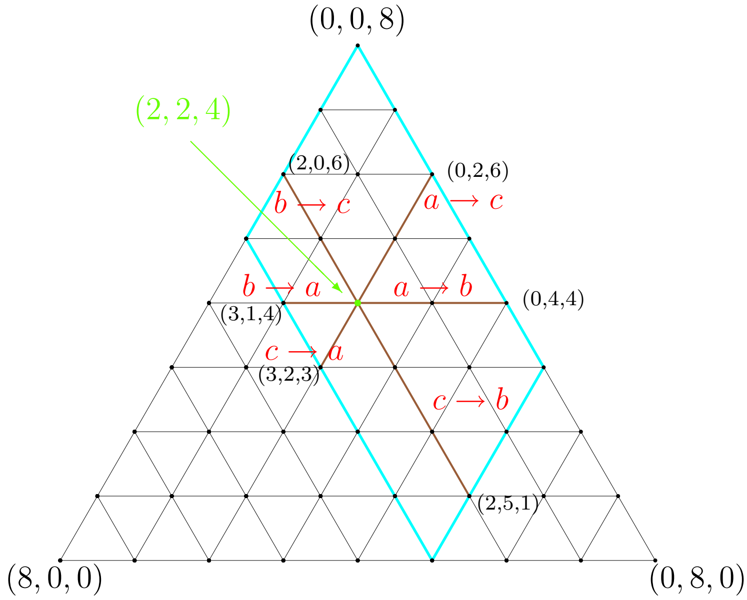
$(0, 1, 7)$

$(3, 1, 4)$

$(0, 4, 4)$

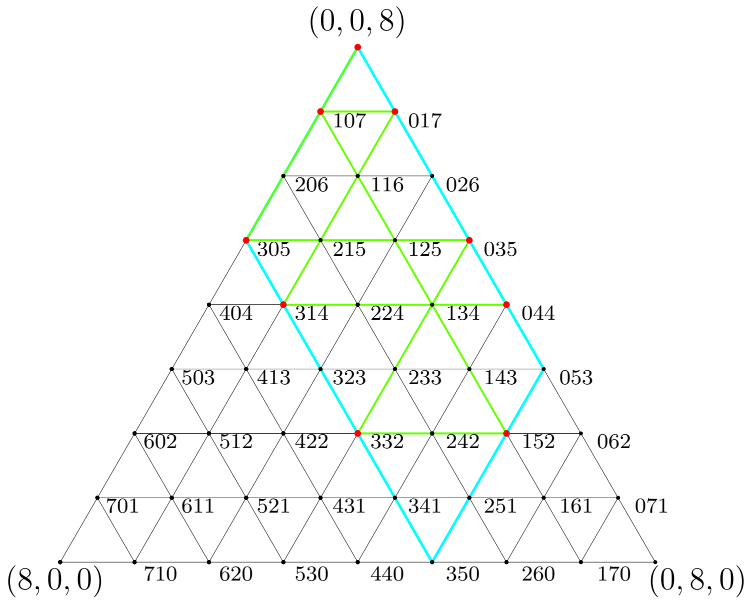
Das Spielfeld

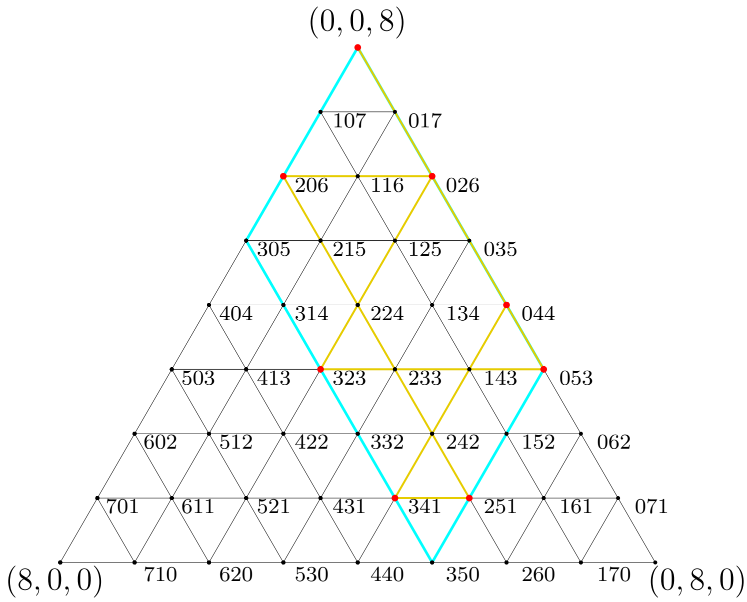




$$
\begin{aligned}
(2,2,4)(a \longrightarrow b) &= (0,4,4)\\
(2,2,4)(a \longrightarrow c) &= (0,2,6)\\
(2,2,4)(b \longrightarrow a) &= (3,1,4)\\
(2,2,4)(b \longrightarrow c) &= (2,0,6)\\
(2,2,4)(c \longrightarrow a) &= (3,2,3)\\
(2,2,4)(c \longrightarrow b) &= (2,5,1)
\end{aligned}
$$

Die Lösungen





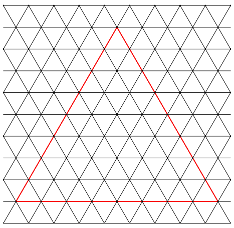
Vorwärts viele Möglichkeiten
Rückwärts nur eine Möglichkeit !!!

Lösung der Aufgabe =
Billard im Parallelogramm auf einem Dreiecksgitter

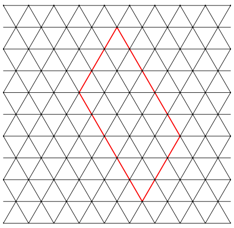
Konvexe Vielecke im Dreiecksgitter

Winkelsumme im n-Eck $= (n-2)180°$
Aber: Nur $60°$ **und** $120°$ **Winkel sind möglich**

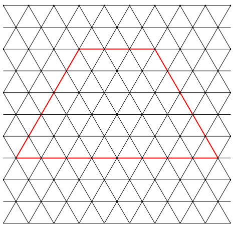
Dreieck $\Longrightarrow$ **Winkelsumme** $= 180°$
$\Longrightarrow$ **drei Winkel** $60°$
$\Longrightarrow$ **gleichseitige Dreiecke**



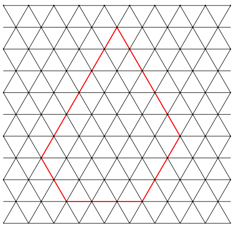
Viereck $\Longrightarrow$ **Winkelsumme** $= 360°$
$\Longrightarrow$ **zwei Winkel** $60°$**, zwei Winkel** $120°$
$\Longrightarrow$ **Parallelogramme und**



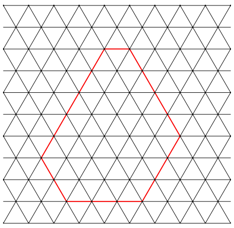
$\Longrightarrow$ **gleichschenklige Trapeze**



Fünfeck $\Longrightarrow$ **Winkelsumme** $= 540°$
$\Longrightarrow$ **ein Winkel** $60°$**, vier Winkel** $120°$

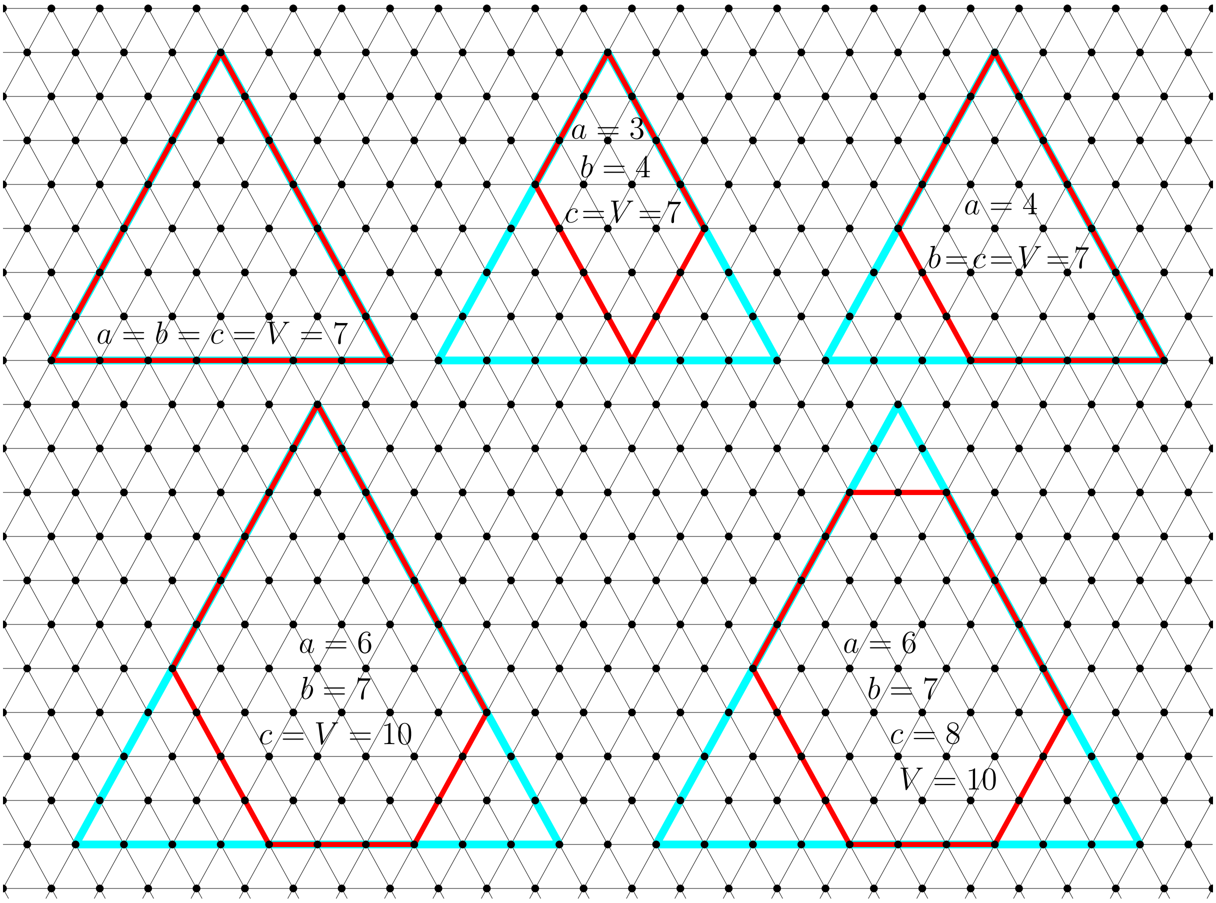


Sechseck $\Longrightarrow$ **Winkelsumme** $= 720°$
$\Longrightarrow$ **sechs Winkel** $120°$



Siebeneck $\Longrightarrow$ **Winkelsumme** $= 900° > 7 \cdot 120°$
$\Longrightarrow$ **klappt nicht**

Konvexe Vielecke und Gefäße



Dreieck $\Longrightarrow$ $a = b = c = V$ **(drei gleichgroße Gefäße)**

Parallelogramm $\Longrightarrow$ $a + b = c = V$ **(klein + mittel = groß)**

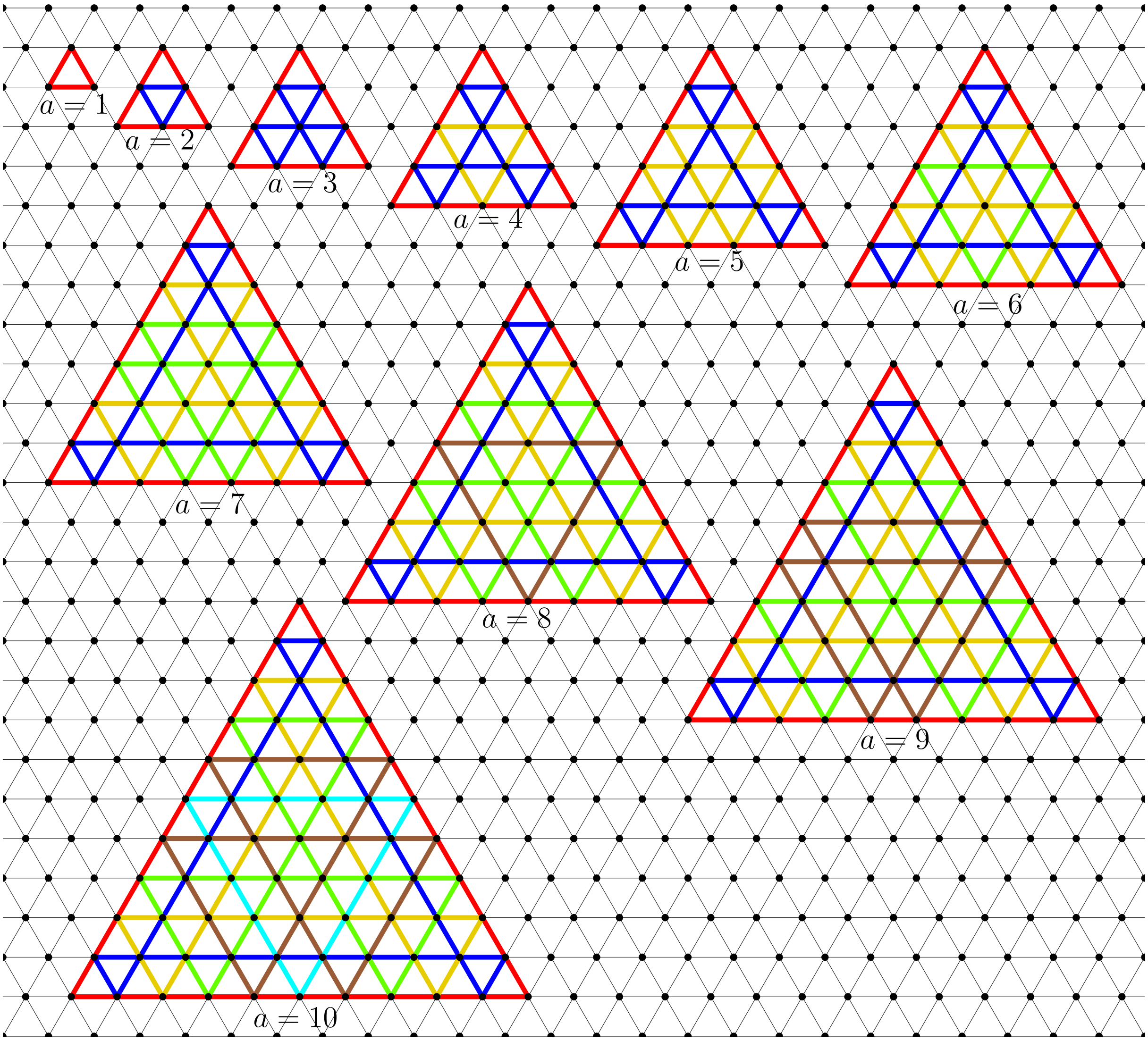
Trapeze $\Longrightarrow$ $a < b = c = V$ **(zwei gleichgroße große Gefäße)**

Fünfeck $\Longrightarrow$ $a + b > c = V$**,** $a \leq b \leq c$ **(keine „kleinen“ Gefäße)**

Sechseck $\Longrightarrow$ $a + b > V$**,** $a \leq b \leq c < V$ **(alles paßt nicht ins größte)**

Billard im Dreieck

a = b = c = V



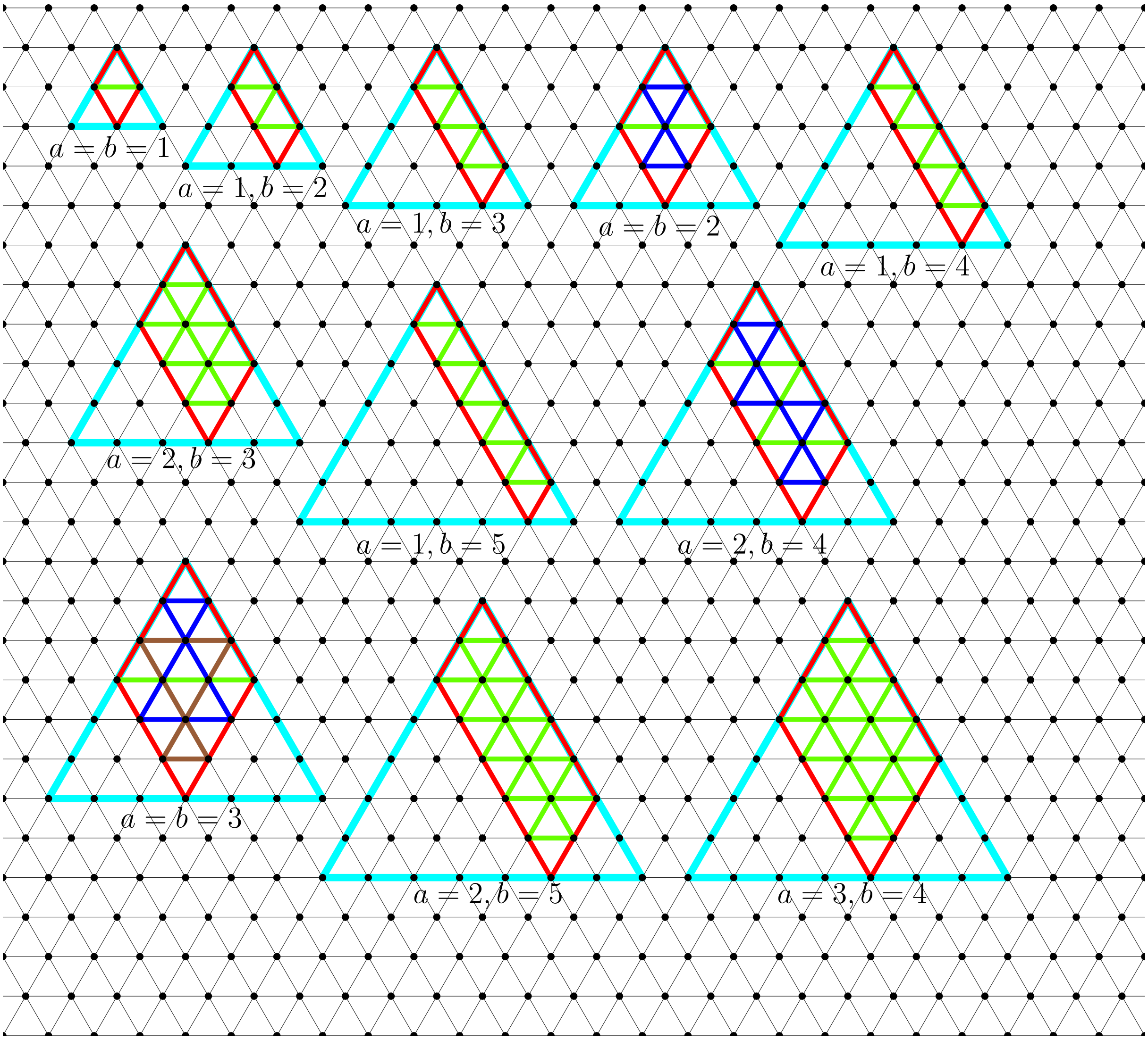
Viele geschlossene Bahnen

Keine stumpfen Ecken $\Longrightarrow$ rote Bahn kann nicht verlassen werden

Schluß: Gleichgroße Gefäße sind zum Abmessen von kleineren Mengen ungeeignet.

Billard im Parallelogramm

$$\mathbf{a + b = c = V}$$



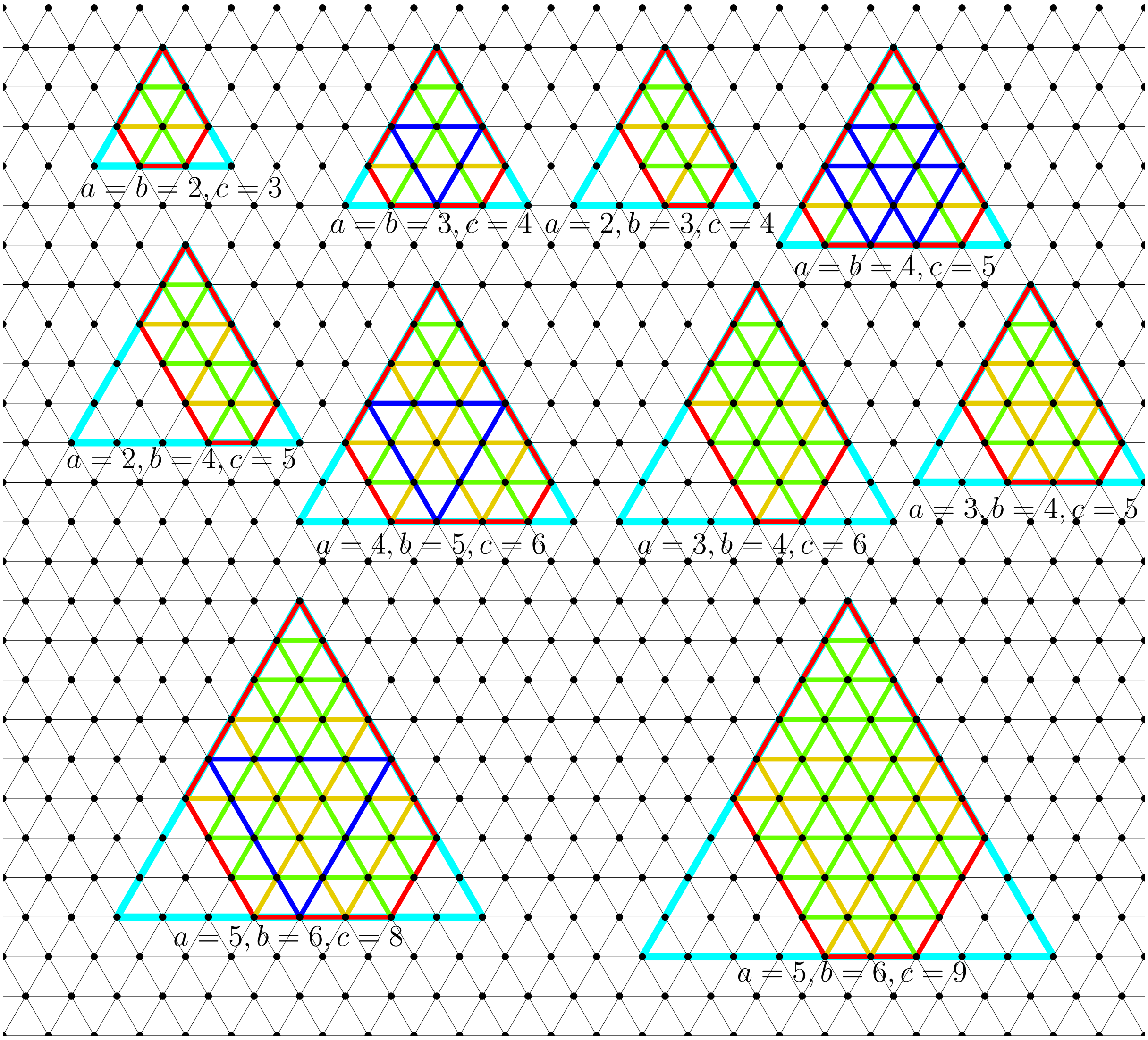
Meistens eine geschlossen Bahn

Rote Bahn kann über stumpfe Ecken verlassen werden

Schluß: Kleine Gefäße müssen teilerfremd sein.

Billard im Fünfeck

$$\mathbf{a + b > c = V}$$



Gut: Zwei geschlossene Bahnen

Rote Bahn kann über vier stumpfe Ecken verlassen werden

5,6,8-Liter $\Longrightarrow$ 4 Liter: nicht lösbar
5,6,9-Liter lösbar

Allgemeine Lösung? $\Longrightarrow$ `stephan@wias-berlin.de`