Übungsblatt 13

Aufgabe 13.1. Sei F eine subexponentielle Verteilungsfunktion mit $F(0) = 0$, und seien X_i, $i = 1, 2, \dots$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Bestimmen Sie für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $0 \le k \le n$ den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_k > x | X_1 + X_2 + \cdots + X_n > x).$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.

Beweis. Da $F \in \mathcal{S}$ folgt $\mathbb{P}(S_m > x) \sim m\mathbb{P}(X_1 > x)$ für $x \to \infty$ und alle $m \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\mathbb{P}(S_k > x \mid S_n > x) = \frac{\mathbb{P}(S_k > x)}{\mathbb{P}(S_n > x)} \sim \frac{k\bar{F}(x)}{n\bar{F}(x)} = \frac{k}{n}.$$

Da F subexponentiell, wird die Summe vom Maximum, d.h. dem größten Summanden, dominiert. Gegeben, dass S_n groß ist, wissen wir also dass das Maximum groß ist. Damit ist dann auch die Teilsumme S_k groß, wenn das Maximum in den ersten k Summanden angenommen wird. Da die X_i i.i.d. sind, passiert dies mit Wahrscheinlichkeit k/n. □

Aufgabe 13.2. Betrachten Sie das Cramér-Lundberg Modell, mit Schadenhöhen verteilt nach

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x^{\gamma-1}e^{1-x^\gamma}, & x \ge 1, \\ 0 & x < 1. \end{cases}$$

für $\gamma \in (0, 1)$.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert von X_1.

(b) Geben Sie eine Bedingung mit Hilfe der Parameter des Modells an dafür an, dass die Ruinwahrscheinlichkeit < 1 ist.

(c) Bestimmen Sie in diesem Fall die Asymptotik der Ruinwahrscheinlichkeit. Sie dürfen benutzen, dass $F_I \in \mathcal{S}$.

Beweis.
Zu (a): Da $\bar{F}(x) = 1$ für $x < 1$, folgt

$$\mathbb{E}X_1 = 1 + \int_1^\infty x^{\gamma-1}e^{1-x^\gamma}\,dx = 1 - \tfrac{1}{\gamma}\int_0^{-\infty} e^y\,dy = 1 + \tfrac{1}{\gamma}\int_0^\infty e^{-y}\,dy = \tfrac{\gamma+1}{\gamma},$$

wobei wir die Substitution $y = 1 - x^\gamma$ genutzt haben.
Zu (b): Es muss $\rho > 0$ gelten, also

$$\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 = \frac{c\gamma}{\lambda(\gamma+1)} - 1 > 0 \Leftrightarrow c > \frac{\lambda(\gamma+1)}{\gamma}.$$

Zu (c): Da nach Hinweis $F_I \in \mathcal{S}$, gilt unter der NPC $\Psi(u) \sim \frac{\lambda(\gamma+1)}{c\gamma-\lambda(\gamma+1)}\bar{F}_I(u)$. Es bleibt also F_I zu berechnen. Es gilt für $u \in (0,1)$,

$$F_I(u) = \tfrac{\gamma}{\gamma+1}\int_0^u \bar{F}(x)\,dx = \tfrac{\gamma}{\gamma+1}u.$$

Für $u \geq 1$ gilt dann

$$\begin{aligned} F_I(u) &= \tfrac{\gamma}{\gamma+1} + \tfrac{\gamma}{\gamma+1}\int_1^u x^{\gamma-1}e^{1-x^\gamma}\,dx = \tfrac{\gamma}{\gamma+1} - \tfrac{1}{\gamma+1}\int_0^{1-u^\gamma} e^x\,dx \\ &= \tfrac{\gamma}{\gamma+1} - \tfrac{1}{\gamma+1}\Big(e^{1-u^\gamma}-1\Big) = 1 - \tfrac{e^{1-u^\gamma}}{1+\gamma}. \end{aligned}$$

Es folgt für $u \to \infty$,

$$\Psi(u) \sim \frac{\lambda}{c\gamma - \lambda(\gamma+1)}e^{1-u^\gamma}.$$

$\square$

Im Rest der Übung beschäftigen wir uns noch mit einer besonderen Klasse von subexponentiellen Verteilungen, die leicht zu identifizieren ist.

Definition 1.

(i) Eine Funktion $L : (0,\infty) \to (0,\infty)$ heißt *langsam variierend*, wenn für alle $t > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(tx)}{L(x)} = 1.$$

In dem Fall schreiben wir $L \in \mathcal{R}_0$.

(ii) Eine Funktion $H : (0,\infty) \to (0,\infty)$ heißt *regulär variierend* vom Index α, wenn für alle $t > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L(tx)}{L(x)} = t^\alpha.$$

In dem Fall schreiben wir $L \in \mathcal{R}_\alpha$.

Es lassen sich leicht die folgenden Eigenschaften von langsam oder regulär variierenden Funktionen:

Proposition 1.

(i) Falls $L_1, L_2 \in \mathcal{R}_0$, dann ist auch $L_1 + L_2 \in \mathcal{R}_0$

(ii) $H \in \mathcal{R}_\alpha \iff H(x) = x^\alpha L(x)$ für ein $L \in \mathcal{R}_0$.

Aufgabe 13.3. Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ regulär variierend oder langsam variierend sind und bestimmen Sie ggf. den Index α.

(a) $f(x) = \sqrt{x}\log\log(x+\mathrm{e})$,

(b) $g(x) = \mathrm{e}^{\gamma\log(\log(x+e))}$ für $\gamma > 0$,

(c) $h(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} x^2 \log(x+1)$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $L(x) = \log(x+b)$, $b \geq 0$, langsam variiert. Mit dem Satz von L'Hospital folgt dann für alle $t \neq 0$, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = \frac{t}{tx+b} \cdot \frac{x+b}{1} = 1.$$

Ebenso folgt, dass eine endliche Iteration des Logarithmus' langsam variiert. Damit folgt, dass f regulär variierend mit Index $1/2$ ist, da f vom Typ $f(x) = x^{1/2}L(x)$ ist. Da $g(x) = (\log(x+e))^\gamma$, folgt dass g langsam variiert, da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(tx)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\log(tx+e)}{\log(x+e)}\right)^\gamma = 1.$$

Zuletzt erhalt wir für h

$$\frac{h(tx)}{h(x)} = e^{(\sqrt{t}-1)\sqrt{x}} \cdot t^2 \cdot \underbrace{\frac{\log(tx+1)}{\log(x+1)}}_{\to 1} \longrightarrow \begin{cases} 0, & t<1, \\ 1, & t=1, \\ \infty, & t>1. \end{cases}$$

Die Funktion ist also weder langsam noch regulär variierend. □

Aufgabe 13.4.

(a) Seien Y_1 und Y_2 unabhängige Zufallsvariablen mit regulär variierender Tailverteilungsfunktionen $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ für $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass $\overline{F_1 * F_2} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$. Das heißt, die Tail-Verteilungsfunktion der Summe ist wieder regulär variierend mit Index $-\alpha$. Insbesondere gilt $\bar{F}_1 * \bar{F}_2 \sim \bar{F}_1 + \bar{F}_2$.

(b) Sei $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ zum Index $\alpha > 0$ und sei $F(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $F \in \mathcal{S}$.

Beweis.
Zu (a): Aus Proposition 1 wissen wir, dass es L_1, L_2, langsam variierend, gibt mit $\bar{F}_i(x) = L_i(x)x^{-\alpha}$, $i = 1, 2$. Wir schreiben $G = F * F$, dann gilt wegen $\{Y_1 > x\} \cup \{Y_2 > x\} \subset \{Y_1 + Y_2 > x\}$, dass

$$\begin{aligned} \bar{G}(x) &\geq \bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x) - \bar{F}_1(x)\bar{F}_2(x) \\ &= \bar{F}_1(x)(1 - \bar{F}_2(x)) + \bar{F}_2(x) \\ &\sim \bar{F}_1(x) + \bar{F}_2(x) \\ &= (L_1(x) + L_2(x))x^{-\alpha}, \end{aligned}$$

wobei nur der letzte Schritt von der Form der Verteilungsfunktion ausnutzt. Für die obere Schranke bemerken wir, dass für $\delta \in (0,1)$ gilt

$$\{Y_1 + Y_2 > x\} \subset \{Y_1 > (1-\delta)x\} \cup \{Y_2 > (1-\delta)x\} \cup \{Y_1 > \delta x, Y_2 > \delta x\}$$

und damit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_1+Y_2>x) &\le \bar{F}_1((1-\delta)x)+\bar{F}_2((1-\delta)x)+\bar{F}_1(\delta x)\bar{F}_2(\delta x)\\ &= (1-\delta)^{-\alpha}L_1((1-\delta)x)x^{-\alpha}+(1-\delta)^{\alpha}L_2((1-\delta)x)x^{-\alpha}\\ &\quad + L_1(\delta x)L_2(\delta x)x^{-2\alpha}\\ &\sim (1-\delta)^{-\alpha}(L_1(x)+L_2(x))x^{-\alpha}\\ &\xrightarrow{\delta\downarrow 0} (L_1(x)+L_2(x))x^{-\alpha}\end{aligned}$$

Dabei haben wir im vorletzten Schritt benutzt, dass L_i langsam variiert. Da außerdem L_1+L_2 wieder langsam variierend ist, folgt die Behauptung.
Zu (b): Seien $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ i.i.d. mit Verteilungsfunktion F. Dann folgt aus (a), dass

$$\bar{F}^{*n} \sim \bar{F}+\cdots+\bar{F} = n\bar{F},$$

womit die Behauptung folgt. □

Aufgabe 13.5. Wir betrachten das das Cramér-Lundberg Modell mit Pareto(α)-verteilten Schadenhöhen.

(a) Für welche $\alpha > 0$ existiert eine Bedingung dafür, dass der Ruin *nicht* (fast) sicher eintritt?

(b) Bestimmen Sie F_I und zeigen Sie, dass $F_I \in \mathcal{S}$.

(c) Bestimmen Sie die asymptotische Ruinwahrscheinlichkeit $\Psi(u)$ für $u \to \infty$. Geben Sie zusätzlich den Spezialfall $c = 3$, $\alpha = 2$ und $\lambda = 1$ an.

Beweis.
Zu (a): Damit die Ruinwahrscheinlichkeit < 1 ist, muss die NPC erfüllt sein, also $\rho = c/(\lambda\mu) - 1 > 0$, wobei $\mu = \mathbb{E}X_1$, wie üblich. Daher muss $\mu < \infty$ sein, was für $\alpha > 1$ gegeben ist, mit $\mu = \alpha/(\alpha-1)$. Die NPC ist dann erfüllt, falls $c > \lambda\alpha/(\alpha-1)$.
Zu (b): Für $x \in (0,1)$ haben wir $F_I(x) = \frac{\alpha-1}{\alpha}x$ und für $x \ge 1$

$$F_I(x) = \tfrac{\alpha-1}{\alpha}\Big(1+\int_1^x y^{-\alpha}\,dy\Big) = \tfrac{\alpha-1}{\alpha}+\tfrac{1}{\alpha}(1-x^{1-\alpha}) = 1-\tfrac{x^{1-\alpha}}{\alpha}.$$

Offensichtlich ist $F_I \in \mathcal{R}_{1-\alpha}$ und damit auch subexponentiell, d.h. $F_I \in \mathcal{S}$.
Zu (c): Aus (b) folgt, dass

$$\psi(u) \sim \tfrac{1}{\rho\alpha}u^{1-\alpha} = \tfrac{c(\alpha-1)-\lambda\alpha}{\lambda}u^{1-\alpha}.$$

Im Spezialfall $c = 3, \alpha = 2, \lambda = 1$ gilt also $\psi(u) \sim u^{-1}$. □