Übungsblatt 13

Aufgabe 13.1. Sei F eine subexponentielle Verteilungsfunktion mit $F(0) = 0$, und seien X_i, $i = 1, 2, \dots$ i.i.d. Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F. Bestimmen Sie für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n$ den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_k > x | X_1 + X_2 + \cdots + X_n > x).$$

Interpretieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 13.2. Betrachten Sie das Cramér-Lundberg Modell, mit Schadenhöhen verteilt nach

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x^{\gamma-1} e^{1-x^\gamma}, & x \geq 1, \\ 0 & x < 1. \end{cases}$$

für $\gamma \in (0, 1)$.

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert von X_1.

(b) Geben Sie eine Bedingung mit Hilfe der Parameter des Modells an dafür an, dass die Ruinwahrscheinlichkeit < 1 ist.

(c) Bestimmen Sie in diesem Fall die Asymptotik der Ruinwahrscheinlichkeit. Sie dürfen benutzen, dass $F_I \in \mathcal{S}$.

Im Rest der Übung beschäftigen wir uns noch mit einer besonderen Klasse von subexponentiellen Verteilungen, die leicht zu identifizieren ist.

Definition 1.

(i) Eine Funktion $L : (0, \infty) \to (0, \infty)$ heißt *langsam variierend*, wenn für alle $t > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1.$$

In dem Fall schreiben wir $L \in \mathcal{R}_0$.

(ii) Eine Funktion $H : (0, \infty) \to (0, \infty)$ heißt *regulär variierend* vom Index α, wenn für alle $t > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = t^\alpha.$$

In dem Fall schreiben wir $L \in \mathcal{R}_\alpha$.

Es lassen sich leicht die folgenden Eigenschaften von langsam oder regulär variierenden Funktionen:

Proposition 1.

(i) Falls $L_1, L_2 \in \mathcal{R}_0$, dann ist auch $L_1 + L_2 \in \mathcal{R}_0$

(ii) $H \in \mathcal{R}_\alpha \Longleftrightarrow H(x) = x^\alpha L(x)$ *für ein* $L \in \mathcal{R}_0$.

Aufgabe 13.3. Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ regulär variierend oder langsam variierend sind und bestimmen Sie ggf. den Index α.

(a) $f(x) = \sqrt{x} \log\log(x + \mathrm{e})$,

(b) $g(x) = \mathrm{e}^{\gamma \log(\log(x+e))}$ für $\gamma > 0$,

(c) $h(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}} x^2 \log(x + 1)$.

Aufgabe 13.4.

(a) Seien Y_1 und Y_2 unabhängige Zufallsvariablen mit regulär variierender Tailverteilungsfunktionen $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ für $\alpha > 0$. Zeigen Sie, dass $\overline{F_1 * F_2} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$. Das heißt, die Tail-Verteilungsfunktion der Summe ist wieder regulär variierend mit Index $-\alpha$. Insbesondere gilt $\bar{F}_1 * \bar{F}_2 \sim \bar{F}_1 + \bar{F}_2$.

(b) Sei $\bar{F} \in \mathcal{R}_{-\alpha}$ zum Index $\alpha > 0$ und sei $F(0) = 0$. Zeigen Sie, dass $F \in \mathcal{S}$.

Aufgabe 13.5. Wir betrachten das das Cramér-Lundberg Modell mit Pareto(α)-verteilten Schadenhöhen.

(a) Für welche $\alpha > 0$ existiert eine Bedingung dafür, dass der Ruin *nicht* (fast) sicher eintritt?

(b) Bestimmen Sie F_I und zeigen Sie, dass $F_I \in \mathcal{S}$.

(c) Bestimmen Sie die asymptotische Ruinwahrscheinlichkeit $\Psi(u)$ für $u \to \infty$. Geben Sie zusätzlich den Spezialfall $c = 3$, $\alpha = 2$ und $\lambda = 1$ an.